Test und Verlässlichkeit Grosse Übung zu Foliensatz 3

Prof. G. Kemnitz

20. Juni 2022

Contents

Inhalt: Große Übungen zu Foliensatz 3

Contents

1 Grundlagen

1.1 Charakteristische Größen

Aufgabe 3.1: Erwartungswert, Varianz einer diskreten Verteilung
Gegeben ist die Verteilung in der nachfolgenden Tabelle:

Wert	5	6	8	11	22
Wahrscheinlichkeit	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Wie groß sind

a) Erwartungswert?

b) Varianz?

c) Standardabweichung?

a) Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[X] = 0{,}1 \cdot 5 + 0{,}2 \cdot 6 + 0{,}4 \cdot 8 + 0{,}2 \cdot 11 + 0{,}1 \cdot 22 = 9{,}3$$

b) Varianz als mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X] &= 0{,}1 \cdot (5 - 9{,}3)^2 + 0{,}2 \cdot (6 - 9{,}3)^2 + 0{,}4 \cdot (8 - 9{,}3)^2 \\ &+ 0{,}2 \cdot (11 - 9{,}3)^2 + 0{,}1 \cdot (22 - 9{,}3)^2 = 21{,}4\end{aligned}$$

Varianz nach Verschiebungssatz:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X] &= 0{,}1 \cdot 5^2 + 0{,}2 \cdot 6^2 + 0{,}4 \cdot 8^2 + 0{,}2 \cdot 11^2 \\ &+ 0{,}1 \cdot 22^2 - 9{,}3^2 = 21{,}4\end{aligned}$$

c) Standardabweichung: $\mathrm{sd}[X] = \sqrt{\mathrm{Var}[X]} = \sqrt{21{,}4} = 4{,}63$

Aufgabe 3.2: Erwartungswert, Varianz Datenstichprobe

Für eine Modellfehlermenge von 1000 Fehlern wurden für 10 verschiedene Zufallstestsätze derselben Länge die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler w_i bestimmt:

Versuch i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
w_i	58	49	40	54	67	35	34	57	47	66

Schätzen Sie aus der Datenstichprobe.

a) Erwartungswert?

b) Varianz?

c) Standardabweichung?

a) Erwartungswert:

$$\hat{\mathbb{E}}[X] = \bar{w} = \frac{1}{\#w} \cdot \sum_{i=1}^{\#w} w_i \quad = \quad 50{,}7$$

b)Varianz:

$$\hat{\mathrm{Var}}[X] = \frac{1}{\#w - 1} \cdot \sum_{i=1}^{\#w} \left(w_i - \hat{\mathbb{E}}[X]\right)^2 = 140$$

c) Standardabweichung: $\hat{\mathrm{sd}}[X] = \sqrt{\hat{\mathrm{Var}}[X]} = \sqrt{140} = 11{,}8$

1.3 Lineare Transformationen, ...

Aufgabe 3.3: Varianz einer linearen Transformation

Kontrollieren Sie die Gleichungen für die Varianz einer linearen Transformation:

$$\mathrm{Var}[a \cdot X + b] = a^2 \cdot \mathrm{Var}[X]$$

für eine diskrete Zufallsgröße X, die $\#X$ verschiedene Wert x_i annehmen kann.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X] &= \sum_{i=1}^{\#X} p_i \cdot (x_i - \mathbb{E}[X])^2 \\ \mathrm{Var}[a \cdot X + b] &= \sum_{i=1}^{\#X} p_i \cdot (a \cdot x_i + b - (a \cdot \mathbb{E}[X] + b))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\#X} p_i \cdot \left(a \cdot x_i - a \cdot \mathbb{E}[X] + \underbrace{b - b}_{0}\right)^2 \\ &= a^2 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{\#X} p_i \cdot (x_i - \mathbb{E}[X])^2}_{\mathrm{Var}[X]} \checkmark\end{aligned}$$

Aufgabe 3.4: Beweis Varianz Summe

Zeigen Sie, dass die Varianz der Summe zweier Zufallsgrößen gleich der Summe der Varianzen plus der doppelten Kovarianz ist:

$$\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + 2\cdot\mathrm{Cov}[X,Y]$$

mit der Kovarianz:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[X,Y] &= \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}[X])\cdot(Y-\mathbb{E}[Y])\right)\\ &= \sum_{i=1}^{\#X}\left(\sum_{j=1}^{\#Y}\left(p_i\cdot p_j\cdot(x_i-\mathbb{E}[X])\cdot(y_i-\mathbb{E}[Y])\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X+Y] &= \sum_{i=1}^{\#X}\left(\sum_{j=1}^{\#Y}\left(p_i\cdot p_j\cdot(x_i-\mathbb{E}[X]+y_i-\mathbb{E}[Y])^2\right)\right)\\ &= \sum_{i=1}^{\#X}\left(\sum_{j=1}^{\#Y}\left(p_i\cdot p_j\cdot\left((x_i-\mathbb{E}[X])^2+(y_i-\mathbb{E}[Y])^2+2\cdot(x_i-\mathbb{E}[X])\cdot(y_i-\mathbb{E}[Y])\right)\right)\right)\\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{\#X} p_i\cdot(x_i-\mathbb{E}[X])^2}_{\mathrm{Var}[X]}\cdot\underbrace{\sum_{j=1}^{\#Y} p_j}_{1}+\underbrace{\sum_{j=1}^{\#Y} p_j\cdot(y_j-\mathbb{E}[Y])^2}_{\mathrm{Var}[Y]}\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{\#X} p_i}_{1}+2\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{\#X}\left(\sum_{j=1}^{\#Y}(p_i\cdot p_j\cdot(x_i-\mathbb{E}[X])\cdot(y_i-\mathbb{E}[Y]))\right)}_{\mathbb{E}((X-\mathbb{E}[X])\cdot(Y-\mathbb{E}[Y]))=\mathrm{Cov}[X,Y]}\end{aligned}$$

Aufgabe 3.5: Erwartungswert und Varianz Summe

Drei Holzbausteine, die je eine zu erwartende Höhe von 3 cm mit einer Standardabweichung von 1 mm haben, werden zu einem Turm aufgeschichtet. Welchen Erwartungswert und welche Standardabweichung hat die Höhe des Turms? Die Höhen der Bausteine sollen nicht korrelieren (Kovarianz null).

$\mathbb{E}[h_{\mathrm{ges}}] =$

$\mathrm{sd}[h_{\mathrm{ges}}] =$

Summe der Erwartungswerte:

$$\mathbb{E}[h_{\mathrm{ges}}] = 3\cdot 3\,\mathrm{cm} = 9\,\mathrm{cm}$$

Summe der Varianzen:

$$\mathrm{Var}[h_{\mathrm{ges}}] = 3\cdot(1\,\mathrm{mm})^2$$

Standardabweichung der Summe:

$$\mathrm{sd}[h_{\mathrm{ges}}] = \sqrt{\mathrm{Var}[h_{\mathrm{ges}}]} = \sqrt{3}\,\mathrm{mm}$$

1.4 Verteilung von Zählwerten

Aufgabe 3.6: Verteilung der Fehleranzahl

Die Fehler $i=1$ bis 5 mit folgenden Nachweiswahrscheinlichkeiten

Fehler	1	2	3	4	5
p_i	10%	20%	40%	50%	30%

seinen unabhängig voneinander nachweisbar. Berechnen Sie für die Anzahl der nachweisbaren Fehler
a) die Verteilung durch Ausfüllen der nachfolgenden Tabelle.
b) Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung.

Fehler	0	1	2	3	4	5
F1	90%	10%				
F1, F2			2%			
F1 bis F3				0,8%		
F1 bis F4						
F1 bis F5						

Fehler	0	1	2	3	4	5
F1	90%	10%				
F1, F2	72%	26%	2%			
F1 bis F3	43,2%	44,4%	11,6%	0,8%		
F1 bis F4	21,6%	43,8	28%	6,2%	0,4%	
F1 bis F5	15,12%	37,14%	32,74%	12,74%	2,14%	0,12%

Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\#X} p_i = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}5 + 0{,}3 = 1{,}5$$

Varianz:

$$\operatorname{Var}[X] = \sum_{i=1}^{\#X} p_i \cdot (1 - p_i) = 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}8 \cdot 0{,}2 \ \ldots$$
$$+ 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}95$$

Standardabweichung:

$$\operatorname{sd}[X] = \sqrt{\operatorname{Var}[X]} = 0{,}975$$

2 Näherungen für ZV

2.1 Binomialverteilung

Aufgabe 3.7: Annäherung der Zählverteilung durch eine Binomialverteilung
Annähern der Zählverteilung aus der Aufgabe zuvor durch eine Binomialverteilung mit $\#X = 5$ und $p = \mathbb{E}[X]/\#X$.
a) Verteilung durch Ausfüllen der nachfolgenden Tabelle.
b) Varianz.

Mittlere Nachweiswahrscheinlichkeit und Binomialverteilung:

$$p = \mathbb{E}[X]/\#X =$$
$$\mathbb{P}[X_{\text{Bin}} = k] =$$

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}[X_{\text{Bin}} = k]$						
$\mathbb{P}[X = k]^*$	15,12%	37,14%	32,74%	12,74%	2,14%	0,12%

* Zählverteilung zum Vergleich

a) Verteilung:

$$p = \mathbb{E}[X]/\#X = \frac{1{,}5}{5} = 0{,}3$$
$$\mathbb{P}[X_{\text{Bin}} = k] = \binom{\#X}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{\#X-k}$$

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}[X_{\text{Bin}} = k]$	16,81%	36,02%	30,87%	13,23%	2,84%	0,24%
$\mathbb{P}[X = k]^*$	15,12%	37,14%	32,74%	12,74%	2,14%	0,12%

b) Varianz:

$$\text{Var}[X_{\text{Bin}}] = N \cdot p \cdot (1 - p) = 5 \cdot 0{,}3 \cdot (1 - 0{,}3) = 1{,}05$$

* Zählverteilung; Varianz der Zählverteilung $\text{Var}[X] = 0{,}95$.

2.2 Poisson-Verteilung

Aufgabe 3.8: Annäherung der Zählverteilung durch eine Poisson-Verteilung
Schätzen sie für $n = 10^4$ SL und eine FF-Rate von $\zeta = 10^{-5}\text{FF}/\text{SL}$
a) Eden rwartungswert der Anzahl der FF?
b) die Wahrscheinlichkeit für 0, 1, 2 und > 2 Fehlfunktionen?

Erwartungswert: $\mathbb{E}[X] = \lambda =$ FF
keine FF: $\mathbb{P}[k = 0] =$
eine FF: $\mathbb{P}[k = 1] =$
zwei FF: $\mathbb{P}[k = 2] =$
mehr als zwei FF: $\mathbb{P}[k > 2] =$

a) Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[X] = \lambda = \zeta \cdot n = 0{,}1\,\text{FF}$$

b) keine FF:

$$\mathbb{P}[k = 0] = e^{-\lambda} = 90{,}48\%$$

eine FF:

$$\mathbb{P}[k = 1] = e^{-\lambda} \cdot \lambda = 9{,}05\%$$

zwei FF:

$$\mathbb{P}[k = 2] = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2} = 0{,}45\%$$

mehr als zwei FF:

$$\mathbb{P}[k > 2] = 1 - 90{,}48\% - 9{,}05\% - 0{,}45\% = 0,015\%$$

2.3 Bereichschätz. Poisson

Aufgabe 3.9: Maskierungsanzahl
Bei der Überwachung von Service-Ergebnissen wird im Mittel eine von tausend Fehlfunktion (FF) nicht erkannt. Wie wahrscheinlich ist es, dass
a) bei 1000 SL keine FF unerkannt bleibt?
b) bei 1000 SL mehr als eine FF unerkannt bleibt?
c) bei 5000 SL weniger als 3 FF unerkannt bleiben?
d) bei 5000 SL mehr als 8 FF unerkannt bleiben?

$$\mathbb{P}[X = k] = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

a)

$$\mathbb{P}[\mathrm{X} = 0,\ \lambda = 1] = \mathrm{e}^{-1} = 36{,}8\%$$

b)

$$\mathbb{P}[X > 1,\, \lambda = 1] = 1 - \mathrm{e}^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{1}\right) = 26{,}4\%$$

c)

$$\mathbb{P}[\mathrm{X} \leq 2,\, \lambda = 5] = \mathrm{e}^{-5} \cdot \left(1 + \frac{5}{1} + \frac{5^2}{2!}\right) = 12{,}5\%$$

d)

$$\mathbb{P}[\mathrm{X} > 8,\, \lambda = 5] = 1 - \mathrm{e}^{-5} \cdot \left(1 + \frac{5}{1} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!} + \frac{5^5}{5!} + \frac{5^6}{6!} + \frac{5^7}{7!} + \frac{5^8}{8!}\right)$$
$$= 6{,}81\%$$

Aufgabe 3.10: Schätzen der FF-Rate mit kleinen Zählwerten

Für $N = 10^6$ Service-Anforderungen wurden $x_{\text{ist}} = 5$ FF gezählt. In welchen Bereich liegt die zu erwartende FF-Rate mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$?

$\alpha_1 = \alpha_2$	$k_{\text{ist}} = 4$	$k_{\text{ist}} = 5$	$k_{\text{ist}} = 6$
0,5%	[1,08, 11,0]	[1,54, 12,6]	[2,04, 14,2]
1%	[1,28, 10,0]	[1,79, 11,6]	[2,33, 13,1]
2%	[1,53, 9,08]	[2,09, 10,6]	[2,68, 12,0]
10%	[2,43, 6,68]	[3,15, 7,99]	[3,89, 9,28]
20%	[3,09, 5,51]	[3,90, 6,73]	[4,73, 7,91]

Aus der Tabelle aus der Vorlesung ist für $k_{\text{ist}} = 5$ für den Erwartungswert der Bereich $\lambda \in [1{,}79,\ 11{,}6]$ ablesbar. Das entspricht einer FF-Rate von

$$\zeta \in \left[1{,}79 \cdot 10^{-6},\ 11{,}6 \cdot 10^{-6}\right] \,{}^{\mathrm{FF}}/_{\mathrm{SL}}$$

2.5 Bereichschätzung NVT

Aufgabe 3.11: Werkstück mit normalverteilter Masse

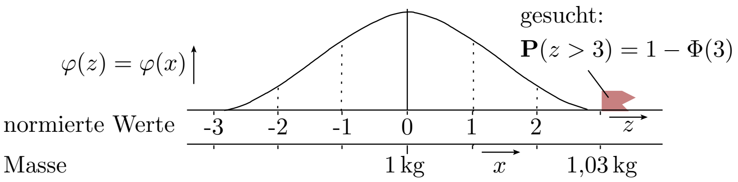
Die Masse Xeines Werkstücks sei eine normalverteilte Zufallsgröße mit dem Erwartungswert $\mu = 1\,\mathrm{kg}$, und der Standardabweichung $\sigma = 10\,\mathrm{g}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse X

a) größer als 1,03 kg ist?

b) kleiner 9,98 kg oder größer 10,2 kg ist?

c) Für welchen symmetrischen Bereich kann mit Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$ garantiert werden?

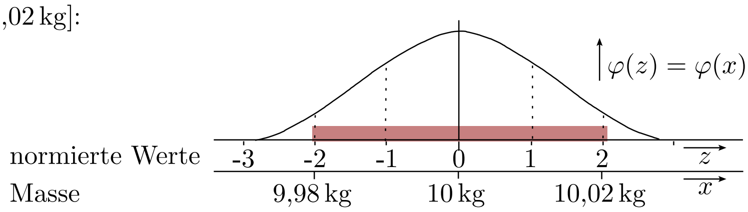
$\mathbb{P}[X > 1{,}03\,\mathrm{kg}]$:



z	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

Gesuchte Wahrscheinlichkeit: $1 - \Phi(3) = 0{,}13\%$

$\mathbb{P}[9{,}98\,\mathrm{kg} \leq X \leq 10{,}02\,\mathrm{kg}]$:



z	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

Gesuchte Wahrscheinlichkeit: $2 \cdot (1 - \Phi(2)) - 1 = 4{,}56\%$

Bereich von X bzw. z, für den gilt:

$$\Phi\left(z_{\min} = \frac{X_{\min} - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(z_{\max} = \frac{X_{\max} - \mu}{\sigma}\right) = 1\%$$

α	2,27%	0,13%	0	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
$\Phi^{-1}(1-\alpha)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

Gesuchter Bereich: $z \in \mp 2{,}33 \Rightarrow X \in 1\,\mathrm{kg} \mp 23{,}3\,\mathrm{g}$,

2.6 Varianzerhöhung

Aufgabe 3.12: Effektive Fehleranzahl

Für eine Modellfehlermenge von 1000 Fehlern wurden für 10 verschiedene Zufallstestsätze derselben Länge die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler bestimmt:

Versuch i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ergebnis x_i	58	49	40	54	67	35	34	57	47	66

a) Schätzen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler.

b) Wie groß ist die Varianzerhöhung gegenüber einer Summe unabhängiger Zählwerte?

Erwartungswert:

$$\hat{\mathbb{E}}[X] \quad = \quad \bar{x} = \frac{1}{\#x} \cdot \sum_{i=1}^{\#x} x_i = 50{,}7$$

Varianz:

$$\hat{\mathrm{Var}}[X] = \frac{1}{\#x - 1} \cdot \sum_{i=1}^{\#x} \left(x_i - \hat{\mathbb{E}}[X]\right)^2 = 140$$

$$\hat{\kappa} = \frac{\hat{\mathrm{Var}}[X]}{\hat{\mathbb{E}}[X]} = \frac{140{,}01}{50{,}7} = 2{,}76$$

Die Varianz ist so hoch, als ob in der Modellfehler immer etwa drei Fehler identisch nachweisbar wären.

2.7 Bereichsschätz. Zählw.

Aufgabe 3.13: Maskierungswahrscheinlichkeit

Bei einer Überwachung wurden von $N = 1000$ Fehlfunktionen $x_{\text{ist}} = 178$ nicht erkannt. Zulässigen Irrtumswahrscheinlichkeiten $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}5\%$. Geringe Maskierungabhängigkeiten ($\kappa = 1{,}5$).

In welchem Bereich liegen der Erwartungswert der Anzahl der Maskierungen und die Maskierungswahrscheinlichkeit p?

Standardabweichung:

$$\operatorname{sd}[X] \approx \sqrt{\kappa \cdot x_{\text{ist}}} = \sqrt{1{,}5 \cdot 178} = 16{,}3$$

α	2,27%	0,13%	0	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
$\Phi^{-1}(1-\alpha)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

$$\begin{aligned}\mu_{\min} &= x_{\text{ist}} - \operatorname{sd}[X] \cdot \Phi^{-1}(1-\alpha_2) \\ &= 178 - 16{,}3 \cdot 2{,}57 = 136 \\ \mu_{\max} &= x_{\text{ist}} + \operatorname{sd}[X] \cdot \Phi^{-1}(1-\alpha_1) \\ &= 178 + 16{,}3 \cdot 2{,}57 = 220\end{aligned}$$

Maskierungswahrscheinlichkeit:

$$p \in [13{,}6\%,\ 22\%]$$

Aufgabe 3.14: Erforderliche Zählwertgröße

Zur Abschätzung der Wahrscheinlichkeit p für ein Service-Versagen wurden für $N = 10^6$ Service-Anforderungen $x_{\text{ist}} = 441$ FF gezählt. Keine Abhängigkeiten $\kappa = 1$.

a) Wie groß sind die Irrtumswahrscheinlichkeit α_1 und α_2, dass ζ außerhalb eines Intervalls $\frac{x_{\text{ist}}}{N} \cdot (1 \pm 10\%)$ liegt?

b) Mit wie vielen Service-Anforderungen ist die Überprüfung fortzusetzen, um die Irrtumswahrscheinlichkeit auf $\alpha_1 = \alpha_2 \leq 1\%$ abzusenken?

$$\alpha_2 = 1 - \Phi\left(\frac{x_{\text{ist}} - \mu_{\min}}{\operatorname{sd}[X]}\right)$$

$$\alpha_1 = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_{\max} - x_{\text{ist}}}{\operatorname{sd}[X]}\right)$$

mit

$$\begin{aligned}x_{\text{ist}} - \mu_{\min} = \mu_{\max} - x_{\text{ist}} &= 0{,}1 \cdot x_{\text{ist}} \\ \operatorname{sd}[X] &\approx \sqrt{x_{\text{ist}}} \\ \alpha_1 = \alpha_2 &= 1 - \Phi\left(\frac{0{,}1 \cdot x_{\text{ist}}}{\sqrt{x_{\text{ist}}}}\right) \\ &= 1 - \Phi(2{,}1) = 1{,}79\%\end{aligned}$$

z	...,0	...,1
1,...	0,8413	0,8643
2,...	0,9772	0,9821
3,...	0,9987	0,9990

α	2,27%	0,13%	0	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
$\Phi^{-1}(1-\alpha)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

Erhöhung der Anzahl der Service-Anforderungen, bis

$$\begin{aligned}1 - \Phi\left(\frac{0{,}1 \cdot x_{\text{ist}}}{\sqrt{x_{\text{ist}}}}\right) &\leq 1\% \\ 0{,}1 \cdot \sqrt{x_{\text{ist}}} &\geq \Phi^{-1}(1-1\%) = 2{,}33 \\ x_{\text{ist}} &\geq \left(10 \cdot \Phi^{-1}(1-1\%)\right)^2 = 543\,\text{FF} = \zeta \cdot N \\ N &\geq 543\,\text{FF} \cdot \frac{10^6\,\text{SL}}{441\,\text{FF}} = 1{,}231 \cdot 10^6\,\text{SL}\end{aligned}$$

Vergrößerung um $2{,}31 \cdot 10^5$ Service-Anforderungen.

Aufgabe 3.15: Mindestmodellfehleranzahl

Wie groß muss die Modellfehleranzahl N unter Vernachlässigung von Nachweisabhängigkeiten ($\kappa = 1$) mindestens sein um mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha \le 2\%$ fü 99% $\mp$ 0,4% garantieren zu können?

In Anlehnung an die Aufgabe zuvor:

$$\alpha_2 = 1 - \Phi\left(\frac{N \cdot (99\% - 98{,}6\%)}{\mathrm{sd}[X]}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{N \cdot 0{,}4\%}{\mathrm{sd}[X]}\right) \le \frac{\alpha}{2}$$
$$\alpha_1 = \Phi\left(\frac{N \cdot (99{,}4\% - 99\%)}{\mathrm{sd}[X]}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{N \cdot 0{,}4\%}{\mathrm{sd}[X]}\right) \le \frac{\alpha}{2}$$
$$N \ge \frac{\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \mathrm{sd}[X]}{0,4\%}$$
$$\mathrm{sd}[X] \le \max\left(\sqrt{N \cdot 98{,}6\% \cdot (1 - 98{,}6\%)},\ \sqrt{N \cdot 99{,}4\% \cdot (1 - 99{,}4\%)}\right)$$
$$= \sqrt{N \cdot 98{,}6\% \cdot (1 - 98{,}6\%)} = 11{,}75\% \cdot \sqrt{N}$$
$$N = \frac{\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot 11{,}75\% \cdot \sqrt{N}}{0,4\%}$$

$$N \ge \frac{\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot 11{,}75\% \cdot \sqrt{N}}{0,4\%}$$
$$\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha = 2\%}{2}\right) = 2{,}33$$
$$N \ge \left(\frac{2{,}33 \cdot 11{,}75\%}{0,4\%}\right)^2 = 4685$$

α	2,27%	0,13%	0	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
$\Phi^{-1}(1-\alpha)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

Es müssen 4685 unabhängig voneinander nachweisbare Modellfehler simuliert werden, von denen der Test 99% ($\approx$ 4638 Fehler) nachweisen muss, bei Nachweisabhängigkeiten κ-mal so viele..

Aufgabe 3.16: Leistungsabhängiges Gehalt

Beim Programmieren entstehen Fehler in der Größenordnung von $\zeta_{\mathrm{E}} \approx \frac{10...100\,\mathrm{Fehler}}{1000\,\mathrm{NLOC}}$. Der Wert schwankt aber von Programmierer zu Programmierer. Zur Motivierung zu qualitativ guter Arbeit soll ein leistungsabhängiges Gehalt in Abhängigkeit vom »Güteparameter« ζ_{E} des Programmierers gezahlt werden. Dazu sei der Güteparameter ζ_{E} mit einer relativen Genauigkeit von $\varepsilon_{\mathrm{rel}} = 20\%$ und einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha_1 = \alpha_2 = 2\%$ für jeden Programmierer zu schätzen. Für wie viele Code-Zeilen müssten dazu von jedem der zu evaluierenden Programmierer in Abhängigkeit vom zu schätzenden Güteparameter ζ_{E} die entstandenen Fehler gezählt werden? Annahme: Fehleranzahl normalverteilt und keine Varianzerhöhung durch Abhängigkeiten bei der Fehlerentstehung ($\kappa = 1$).

Ohne Varianzerhöhung ist die Varianz einer Zählverteilung $\sqrt{\mu}$. Die obere und unter Grenze des wahrscheinlichen Bereichs betragen:

$$x_{\min} = \mu - \Phi^{-1}(1 - \alpha_1) \cdot \sqrt{\mu}$$
$$x_{\max} = \mu + \Phi^{-1}(1 - \alpha_2) \cdot \sqrt{\mu}$$

Mit $\alpha_{1/2} = 2\%$ und $\frac{\mu - x_{\min}}{\sqrt{\mu}} = \frac{x_{\max} - \mu}{\sqrt{\mu}} = \varepsilon_{\mathrm{rel}} = 20\%$ muss gelten:

$$\frac{\Phi^{-1}(1 - \alpha_1) \cdot \sqrt{\mu}}{\mu} = \frac{\Phi^{-1}(1 - \alpha_2) \cdot \sqrt{\mu}}{\mu} = \varepsilon_{\mathrm{rel}}$$
$$\mu = \left(\frac{\Phi^{-1}(1 - \alpha_1)}{\varepsilon_{\mathrm{rel}}}\right)^2 = \left(\frac{2{,}05}{20\%}\right)^2 = 105$$

α	2,27%	0,13%	0	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
$\Phi^{-1}(1-\alpha)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

Die Anzahl der Code-Zeilen muss in Abhängigkeit vom zu schätzenden Güteparameter ζ_{E} so groß sein, dass der Erwartungswert mindestens 105 ist:

$$N \geq \frac{\mu}{\zeta_{\mathrm{E}}} = \frac{105}{1...10\%} = 1.050 \ldots 10.500$$

Praktisch kann man auch solange Code-Zeilen und Fehler zählen, bis die 105 Fehler erreicht sind, und den Güteparameter für die einzelnen Mitarbeiter als Quotient von 105 und Zählwert der Code-Zeilen N_{EX}, die die 105 Fehler enthalten, bestimmen:

$$\zeta_{\mathrm{E}} = \frac{105}{N_{\mathrm{EX}}}$$

3 Misch- und multimodale Verteilung

Aufgabe 3.17: Verteilung der Widerstandswerte

In eine Kiste für 1kΩ-Widerstände wurde

- 500 Widerstände mit normalverteiltem Widerstandswert, Erwartungswert 1,02 kΩ und Standardabweichung 10 Ω und
- 300 Widerstände mit normalverteiltem Widerstandswert, Erwartungswert 9,99 kΩ und Standardabweichung 15 Ω

gemischt. Welche Verteilung haben die Widerstandswerte bei zufälliger Entnahme aus der Kiste?

Beschreibung mit Hilfe der standardisierten Normalverteilung $\Phi(z)$.

$$F_{\mathrm{X}}(R) = \mathbb{P}[X \leq R] =$$

$$F_{\mathrm{X}}(R) = \frac{500}{800} \cdot \Phi\left(\frac{R - 1,02\,\mathrm{k}\Omega}{10\,\Omega}\right) + \frac{300}{800} \cdot \Phi\left(\frac{R - 0,99\,\mathrm{k}\Omega}{15\,\Omega}\right)$$

Aufgabe 3.18: Bereichsschätzung Kapazitätswerte

Gegeben ist eine Stichprobe gemessener Kapazitätswerte in nF:

$$C: \ 1{,}20,\ 1{,}23,\ 1{,}18,\ 1{,}25,\ 1{,}21,\ 1{,}19,\ 1{,}23,\ 1{,}22,\ 1{,}09,\ 1{,}17$$

Gesucht ist der Bereich, in dem der Erwartungswert liegen kann. Zulässige Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 2\%$

a) Erwartungswert und Standardabweichung der Datenstichprobe?

b) Bereich, wenn die Kapazitätswerte normalverteilt sind?

c) Bereich nach der tschebyscheffschen Ungleichung

$$\alpha \leq \mathrm{Var}[X] / \varepsilon^2$$

d.h. ohne Annahmen über die Verteilung der Kapazitätswerte ?

Erwartungswert der Datenstichprobe:

$$\hat{\mathbb{E}}[C] = \frac{1}{10} \cdot (1,20 + 1,23 + 1,18 + 1,25 + 1,21 + 1,19$$
$$+1,23 + 1,22 + 1,09 + 1,17) = 1{,}17$$

Standardabweichung der Datenstichprobe:

$$\hat{\mathrm{sd}}[C] = \sqrt{\frac{(1,20 - 1,179)^2 + (1,23 - 1,179)^2 + \ldots}{9}} = 0,0450$$

... $\hat{\mathbb{E}}[C] = 1{,}17$; $\hat{\mathrm{sd}}[C] = 0,0450$

α	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
$\Phi^{-1}(1-\alpha)$	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C] &\in \hat{\mathbb{E}}[C] \mp \hat{\mathrm{sd}}[C]\cdot\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}=1\%\right)\\ &= 1{,}17 \mp 0,0450\cdot 2{,}33\\ &= [1{,}065,\ 1{,}275]\end{aligned}$$

... $\hat{\mathbb{E}}[C] = 1{,}17$; $\hat{\mathrm{sd}}[C] = 0,0450$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C] &\in \hat{\mathbb{E}}[C] \mp \frac{\hat{\mathrm{sd}}[C]}{\sqrt{\alpha}}\\ &= 1{,}17 \mp \frac{0{,}0540}{\sqrt{2\%}}\\ &= [0{,}861,\ 1{,}497]\end{aligned}$$

4 Weitere Verteilungen

4.1 Pareto-Verteilung

Aufgabe 3.19: Verteilung von Schadenskosten

Die erheblichen Schäden durch autonomer Fahrzeuge ab $x_{\min} = 10.000\,\mathrm{Eur}$ sei so pareto-verteilt, dass $U = 15\%$ der Schadensfälle $W = 90\%$ der Gesamtschadenskosten verursachen.

a) Welchen Formfaktor k hat die Pareto-Verteilung?

b) Ab welcher Schadenshöhe zählt ein Schadensfall zu den 15%, die die 90% Gesamtschadenskosten verursachen?

a) Zwischen dem Anteil der Ursachen U mit der größten Wirkung und dem zu erwartenden Anteil an der Wirkung W durch diese, wurde für eine pareto-verteilte ZG mit $k > 1$ hergeleitet:

$$\begin{aligned}W &= U^{\frac{k-1}{k}}\\ \frac{k-1}{k} = 1-\frac{1}{k} &= \frac{\ln(W)}{\ln(U)}\\ k &= \left(1-\frac{\ln(W)}{\ln(U)}\right)^{-1} = \left(1-\frac{\ln(90\%)}{\ln(15\%)}\right)^{-1} = 0{,}0588\end{aligned}$$

b) Mindestschaden:

$$w_{\min} = x_{\min}\cdot U^{-\frac{1}{k}} = 10.000\,\mathrm{Eur}\cdot U^{-\frac{1}{0{,}0588}} = 60.000\,\mathrm{Eur}$$

Aufgabe 3.20: Verteilung der mittleren Nachweislänge

Gegeben sind die Nachweislängen n_i für 25 Modellfehler:

```
x = [10 11 13 15 17 18 21 24 29 31 33 37 40 52
     67 70 83 110 185 217 290 420 850 1730 5870];
```

Daraus soll der Formparameter k einer parato-verteilten Nachweismenge mit Skalenparameter $n_0 = 10$

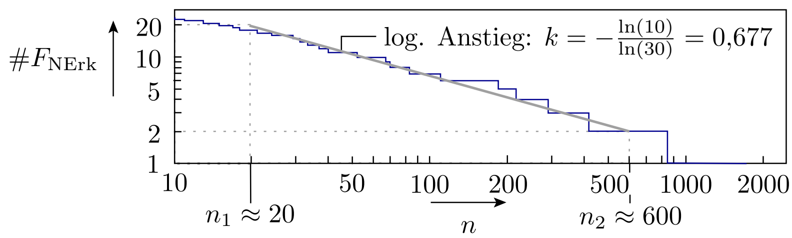
$$F_N(n) = P[N \le n] \approx 1-\left(\frac{10}{n}\right)^k$$

angeschätzt werden.

a) Stellen Sie die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler $\#F_{\mathrm{NErk}}$ als Funktion der Nachweislänge n mit doppelt logarithmischer Achsenteilung dar.

b) Legen Sie eine Ausgleichsgerade in die Graphik und bestimmen Sie aus der Geradengleichung k.

a) Graphische Darstellung:



b) Gesuchter Formfaktor: $k = 0{,}677$

4.4 Verteilung der FF-Rate

Aufgabe 3.21: Modell von Musa, Goel und Okumoto

Das am häufigsten zitierte Zuverlässigkeitswachstumsmodell ist das von Musa, Goel und Okumoto (MGO-Modell[1]). Es unterstellt für den Zusammenhang zwischen der Anzahl der nicht beseitigten Fehler und der Reifezeit t eine abklingende e-Funktion:

$$\#F(t) = a \cdot \mathrm{e}^{-bt}$$

a) Was für eine Verteilung wird hier für die Nachweiszeit unterstellt?

b) Was für eine Dichtefunktion wird für die FF-Rate unterstellt?

t sei die effektive Reifezeit, d.h. die äquivalente Testzeit, für die alle erkennbaren Fehler beseitigt werden.

a) Die Verteilung der Nachweiszeit ist gleich dem Anteil der nachweisbaren Fehler:

$$\mathbb{P}[X_i \le t] = FC(t) = 1 - \mathrm{e}^{-b \cdot t}$$

Exponentialverteilung mit dem Parameter b als Anteil der Nachweisereignisse pro Zeit.

b) Die Dichte der FF-Rate muss das Intergral

$$FC(t) = 1 - \mathrm{e}^{-b\cdot t} = \int_0^1 h(\zeta) \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\zeta \cdot (n - n_0)}\right) \cdot \mathrm{d}\zeta$$

erfüllen. Anschauliche Lösung $b = \zeta_0 \cdot MTS$ und

$$h(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{für } \zeta = \zeta_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das MGO-Modell unterstellt für alle Fehler dieselbe FF-Rate.

Aufgabe 3.22: Abschätzungen über die Dichte der FF-Rate

Ein Testobjekt hat abschätzungsweise nach Beseitigung aller mit ... $n_0 = 10$ Tests erkennbaren Fehler noch $\#F(n_0) = 10^2$ Fehler. Berechnen Sie für die effektiven Testsatzlängen $n_1 = 100$ und $n_2 = 1000$ und die Exponenten der Pareto-Verteilung der Nachweislänge ... $k \in \{0{,}3,\ 0{,}4, \ldots\ 0{,}7\}$ die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler und die Zuverlässigkeit.

FF durch Störungen und Abweichungen von den Modellannahmen sind zu vernachlässigen.

Zu erwartenden Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler und Zuverlässigkeit

$$\#F(n) \approx \#F(n_0) \cdot \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-k}$$

$$Z_{\mathrm{F}}(n) \approx \frac{n}{k \cdot \#F(n)}$$

mit $n_0 = 10$. Für alle Variationen der vorgegebenen Werte für k und n:

[1] Benedikte Elbel, Zuverlässigkeitsorientiertes Testmanagement (2003)

	$k = 0{,}3$	$k = 0{,}4$	$k = 0{,}5$	$k = 0{,}6$	$k = 0{,}7$
$\#F\,(n_1 = 100)$	50	40	32	25	20
$Z_{\mathrm{F}}\,(n_1 = 100)$	6,7	6,3	6,3	6,6	7,2
$n_2 = 100$	25	16	10	6,3	4,0
$Z_{\mathrm{F}}\,(n_2 = 1000)$	130	160	200	260	360

Aufgabe 3.23: Fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit nach Test

Von $\#F_{\mathrm{E}} = 1000$ entstandenen Fehlern erkennt der vorgelagerte statische Test $FC_{\mathrm{S}} = 80\%$, von den verbleibenden 20% erkennen $n_0 = 20$ gezielt gesuchte dynamische Tests $FC_{\mathrm{D}} = 60\%$ und von den dann noch verbleibenden $20\% \cdot 40\%$ erkennen weitere $n_1 = 80$ zufällige Tests $FC_{\mathrm{RT}} = 50\%$. Beseitigung aller erkannten Fehler.

a) Mit welchem Exponenten k nimmt der Anteil der nicht erkannten Fehler $1-FC\,(n)$ bei der Erhöhung der Testsatzlänge von $n_0 = 20$ auf $n = n_0 + n_1 = 100$ unter der Annahme: $1 - FC\,(n) \sim n^{-k}$ ab?

b) Wie groß sind abschätzungsweise die Fehleranzahl, FF-Rate und Zuverlässigkeit nach Beseitigung aller erkannten Fehler?

c) Wie groß sind Fehleranzahl, FF-Raten und Zuverlässigkeit, wenn die Anzahl der Tests von 100 auf 1000 erhöht wird?

d) Wie viele zusätzliche Zufallstests erfordert eine Verringerung der zu erwartenden Anzahl nicht erkennbarer Fehler auf $\#F\,(n) = 5$?

e) Wie viele zusätzliche Zufallstests erfordert eine Erhöhung der fehlerbezogenen Teilzuverlässigkeit auf $Z_{\mathrm{F}}\,(n) = 1000\,\frac{\mathrm{SL}}{\mathrm{FF}}$?

Aus der Annahme folgt:

$$\frac{1 - FC\,(n_0 + n_1)}{1 - FC\,(n_0)} = \left(\frac{n_0 + n_1}{n_0}\right)^{-k}$$

$$\frac{1 - FC\,(20 + 80)}{1 - FC\,(20)} = 0{,}5 = \left(\frac{20 + 80}{20}\right)^{-k}$$

$$k = -\frac{\ln(0{,}5)}{\ln(5)} = 0{,}431$$

$$\#F\,(n_0 + n_1) = \#F_{\mathrm{E}} \cdot (1 - FC_{\mathrm{S}}) \cdot (1 - FC_{\mathrm{D}}) \cdot (1 - FC_{\mathrm{RT}}) = 40\,\text{Fehler}$$

$$\zeta_{\mathrm{F}(n_0+n_1)} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{\#F_{\mathrm{T}}}{(n_0 + n_1)} = 0{,}12$$

$$Z_{\mathrm{FT}} = 1/\zeta_{\mathrm{T}} = 8{,}3\,\frac{\mathrm{SL}}{\mathrm{FF}}$$

Unter Nutzung von $k = 0{,}431$ aus Aufgabenteil a) lässt sich aus der Fehlerüberdeckung $FC_{\mathrm{RT}}\,(n = 100) \approx 0{,}5 \cdot FC_{\mathrm{RT}}\,(n = 1000)$ abschätzen. Rest wie Aufgabenteil b):

$$\left(1 - FC_{\mathrm{RT}}\left(10^3\right)\right) = \left(1 - FC_{\mathrm{RT}}\left(10^2\right)\right) \cdot \left(\frac{10^3}{10^2}\right)^{-k}$$

$$= 0{,}5 \cdot 10^{-0{,}431} = 18{,}5\%$$

$$\#F_{\mathrm{T}} = \#F \cdot (1 - FC_{\mathrm{S}}) \cdot (1 - FC_{\mathrm{D}}) \cdot (1 - FC_{\mathrm{RT}}) = 14{,}8\,\text{Fehler}$$

$$\zeta_{\mathrm{FT}} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{\#F_{\mathrm{T}}}{n} = \frac{0{,}431}{1{,}431} \cdot \frac{14{,}8}{10^3} = 4{,}47 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{FF}}{\mathrm{SL}}$$

$$Z_{\mathrm{FT}} = 1/\zeta_{\mathrm{T}} = 224\,\frac{\mathrm{SL}}{\mathrm{FF}}$$

Ausgehend von $k = 0{,}431$ aus Aufgabenteil a) und $\#F_{\mathrm{T}}\left(n = 10^3\right) = 14{,}8$ aus Aufgabenteil c):

$$\frac{\#F\,(n)}{\#F\,(10^3)} = \frac{5}{14{,}8} = \left(\frac{n}{10^3}\right)^{-k}$$

$$n = 10^3 \cdot \sqrt[k]{\frac{14{,}8\,\text{Fehler}}{5\,\text{Fehler}}} = 1{,}24 \cdot 10^4$$

Die Verringerung der Fehleranzahl auf etwa ein Drittel erfordert eine Testverlängerung um weitere 11.400 Zufallstests.

Ausgehend von $k = 0{,}431$ aus Aufgabenteil a) und $Z_\mathrm{F}\left(n = 10^3\right) = 224\,\frac{\mathrm{SL}}{\mathrm{FF}}$ aus Aufgabenteil c):

$$\frac{Z_\mathrm{F}(n)}{Z_\mathrm{F}(10^3)} = \frac{1000\,\frac{\mathrm{SL}}{\mathrm{FF}}}{224\,\frac{\mathrm{SL}}{\mathrm{FF}}} = \left(\frac{n}{10^3}\right)^{k+1}$$

$$n = 10^3 \cdot \sqrt[k+1]{\frac{1000}{224}} = 1{,}85 \cdot 10^3$$

Die Erhöhung der fehlerbezogenen Teilzuverlässigkeit auf etwa das dreifache erfordert nur weitere 850 Zufallstests.

Aufgabe 3.24: Fehler und FF

Eine Verdopplung der effektiven Testsatzlänge von einem Bezugswert n_0 auf $n_1 = 2 \cdot n_0$ hat die FF-Rate etwa auf ein Drittel reduziert.

a) Welche Verlängerung der effektiven Testsatzlänge gegenüber n_0 ist unter Annahme, dass die Nachweislänge für Fehler pareto-verteilt ist, erforderlich, um die FF-Rate auf 1/100 zu reduzieren?
b) Um welchen Faktor veringert sich die Anzahl der nicht beseitigten Fehler unter Nutzung der Ergebnisse aus Aufgabenteil a?
c) Angenommen, die Nachweislänge sein nicht pareto-, sondern exponentialverteilt, lässt sich dann der Skalenparameter der Verteilung aus den in der Aufgabe gegebenen Werten bestimmen und wenn ja, wie groß ist er?

Der Formfaktor k der Pareto-Verteilung ergibt sich aus dem Zusammenhang, dass die FF-Rate mit der effektiven Testsatzlänge mit dem Exponenten $k+1$ abnimmt:

$$\mathbb{E}\left[\zeta\left(n_1\right)\right] = \mathbb{E}\left[\zeta\left(n_0\right)\right] \cdot \left(\frac{n_1}{n_0}\right)^{-(k+1)}$$

Formfaktor der Pareto-Verteilung:

$$k = -\frac{\log\left(\frac{\mathbb{E}[\zeta(n_1)]}{\mathbb{E}[\zeta(n_0)]}\right)}{\log\left(\frac{n_1}{n_0}\right)} - 1 = -\frac{\log(1/3)}{\log(2)} - 1 = 0{,}585$$

Testverlängerung zur Reduzierung der FF-Rate auf 1/100:

$$n = n_0 \cdot \left(\frac{\mathbb{E}\left[\zeta(n)\right]}{\mathbb{E}\left[\zeta\left(n_0\right)\right]}\right)^{-\frac{1}{k+1}} = n_0 \cdot 0{,}01^{-\frac{1}{1{,}585}} = 18{,}3 \cdot n_0$$

Relative Abnahme der Anzahl der nicht beseitigten Fehler mit der effektiven Testsatzlänge auf:

$$\frac{\mathbb{E}\left[\#F_\mathrm{TB}(n)\right]}{\mathbb{E}\left[\#F_\mathrm{TB}\left(n_0\right)\right]} = \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-k} = 18{,}3^{-0{,}585} = 18{,}27\%\cdot$$

Exponentialverteilung für die Nachweislänge:

$$F_{N_i}(n) = \mathbb{P}\left[N_i \le n\right] = 1 - \mathrm{e}^{-\zeta \cdot n}$$

ist nach Aufgabe 4.1 gleichbedeutend damit, dass alle Fehler dieselbe FF-Rate ζ haben. Gesamte FF-Rate proportional zur Fehleranzahl:

$$\mathbb{E}\left[\zeta(n)\right] \sim \zeta \cdot \left(1 - F_{N_i}(n)\right) = \zeta \cdot \mathrm{e}^{-\zeta \cdot n}$$

Eine Verdopplung von n_1 auf $n_2 = 2 \cdot n_1$ reduziert FF-Rate auf ein Drittel:

$$\frac{\zeta \cdot \left(1 - F_{N_i}\left(n_1\right)\right)}{\zeta \cdot \left(1 - F_{N_i}\left(n_0\right)\right)} = \frac{\mathrm{e}^{-\zeta \cdot n_1}}{\mathrm{e}^{-\zeta \cdot n_0}} = \mathrm{e}^{-\zeta \cdot (n_1 - n_0)} = \frac{1}{3}$$

Zur Abschätzung des Parameters ζ wird die Differen von $n_1 - n_0$ statt des gegebenen Quotienten $n_1/n_0 = 2$ benötigt. Der Skalenparameter ist mit den gegebenen Werte aus der Aufgabe nicht abschätzbar.