Test und Verlässlichkeit Grosse Übung zu Foliensatz 2

Prof. G. Kemnitz

8. Juni 2021

Contents

1 Wahrscheinlichkeit

1.2 Verkettete Ereignisse

Aufgabe 2.1: Würfelexperiment

X und Y seien die zufälligen Augenzahlen bei der Durchführung des Versuchs »würfeln mit zwei Würfeln«:

a) $X + Y > 8$

b) $X > Y$

c) $(X = 5) \wedge (Y < 5)$

d) $X \cdot Y$ ist durch drei teilbar

Bestimmen Sie jeweils

- die möglichen Ergebnisse und deren Anzahl,
- die günstigen Ergebnisse und deren Anzahl,
- die Wahrscheinlichkeit bei gleicher Auftrittshäufigkeit aller möglichen Ergebnisse.

- Anzahl der Möglichkeiten: 36
- günstig: 3+6, 4+5, 4+6, 5+4, bis 5+6, 6+3 bis 6+6
- Anzahl günstig: 1+2+3+4=10
- Wahrscheinlichkeit: 10/36

b) $X > Y$

- Anzahl der Möglichkeiten: 36
- günstig: 2>1, 3>1, 3>2, 4>1 bis 4>3, 5>1 bis 5>4, 6>1 bis 6>5
- Anzahl günstig: 1+2+3+4+5=15
- Wahrscheinlichkeit: 15/36

- Anzahl der Möglichkeiten: 36
- günstig: (5,1) bis (5,4)
- Anzahl günstig: 4
- Wahrscheinlichkeit: 4/36

d) $X \cdot Y$ ist durch drei teilbar

- Anzahl der Möglichkeiten: 36
- günstig: (3,1) bis (3,6), (1,3), (2,3), (4,3), (5,3), (6,1) bis (6,6), (1,6), (2,6), (4,6), (5,6)
- Anzahl günstig: 20
- Wahrscheinlichkeit: 20/36

Aufgabe 2.2: Verkettete Würfelereignisse

a) Welche möglichen Ergebnisse hat das Zufallsexperiment »auswürfeln einer Zahl, bei einer Sechs darf ein zweites Mal gewürfelt werden«?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt jedes der möglichen Ergebnisse ein?

mögliche Ergebnisse	Wahrscheinlichkeit
1 bis 5,	6^{-1}
6+1 bis 6+5	6^{-2}
6+6+1 bis 6+6+5	6^{-3}
...	...

Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Möglichkeiten:

$$\frac{5}{6} + \frac{5}{6^2} + \frac{5}{6^3} + \ldots = 5 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} 6^{-i} = 5 \cdot \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = 1\surd$$

Aufgabe 2.3: Fehlfunktionen durch Fehler

Ein System habe vier Fehler, die unabhängig von einander mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1 = 10\%$, $p_2 = 20\%$, $p_3 = 5\%$ und $p_4 = 1\%$ eine Fehlfunktion je Service-Leistung verursachen.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit p_{FFF} einer durch Fehler verursachten Fehlfunktion je SL?

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass zehn Service-Leistungen korrekt ausgeführt werden?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für jeden der vier Fehler, dass er bei mindestens einer der zehn SL eine FF verursacht?

- Basisereignisse A_i: Fehlfunktion bei einer SL verursacht durch Fehler i, $\mathbb{P}[A_i] = p_i$

- Ereignis A (Versagen durch einen von vier Fehlern):

$$\begin{aligned} A &= A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee A_4 \\ A &= \overline{\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4} \end{aligned}$$

- Wahrscheinlichkeit von A:

$$\begin{aligned} p_{\text{FFF}} = \mathbb{P}(A) = 1 - \prod_{i=1}^{4} (1 - p_i) \cdot \\ = 1 - 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}99 = 23{,}3\% \end{aligned}$$

- Basisereignisse A_i: Versagen bei SL i, $\mathbb{P}[A_i] = p_{\text{FFF}}$
- Ereignis B (Kein Versagen bei SL 1 bis 10):

$$B = \bar{A}_1 \wedge \bar{A}_2 \wedge \ldots \wedge \bar{A}_{10}$$

- Wahrscheinlichkeit von B:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) = \prod_{i=1}^{10} (1 - p_{\text{FFF}}) \\ = (1 - 23{,}3\%)^{10} = 2\% \end{aligned}$$

- Basisereignisse A_{ij}: FF durch Fehler i in SL j, $\mathbb{P}[A_{ij}] = p_i$
- Ereignis C_i (FF durch Fehler i bei mindestens eine der 10 SL):

$$\begin{aligned} C_i &= A_{i.1} \vee A_{i.2} \vee \ldots \vee A_{i.10} \\ &= \overline{\bar{A}_{i.1} \bar{A}_{i.2} \ldots \bar{A}_{i.10}} \\ \mathbb{P}(C_i) &= 1 - \prod_{i=1}^{10} (1 - p_i) = 1 - (1 - p_i)^{10} \end{aligned}$$

p_i	10%	20%	5%	1%
$\mathbb{P}(C_i)$	65,1%	89,3%	40,1%	9,6%

1.3 Bedingte Wahrscheinl.

Aufgabe 2.4: Gewichteter Zufallstest

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein 8-Bit-Vektor für eine Service-Anfrage an eine Schaltung mit dem Wert $\mathbf{x} =$ "11111110" angefordert wird, wenn

a) unabhängig voneinander für jedes Bit mit einer Wahrscheinlichkeit von $g = 50\%$ zufällig eine Eins und sonst eine Null gewählt wird?

b) unabhängig voneinander für jedes Bit mit einer Wahrscheinlichkeit von $g = 60\%$ zufällig eine Eins und sonst eine Null gewählt wird?

c) Dasselbe wie in den Aufgabenteilen zuvor, nur dass für die höchstwertigen vier Bits immer derselben Zufallswert ausgewählt wird.

Die Wahrscheinlichkeit g wird auch als Wichtung der Bitstelle bezeichnet. Bitweise Wichtung wird beim Test digitaler Schaltungen eingesetzt, um die Nachweiswahrscheinlichkeiten sehr schlecht nachweisbarer Fehler zu erhöhen.

Definieren von Ereignissen G_i, dass für Bit i eine Eins ausgewählt wird. Für die beiden ersten Aufgabenteile gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \text{"11111110"} &= G_7 \wedge G_6 \wedge G_5 \wedge G_4 \wedge G_3 \wedge G_2 \wedge G_1 \wedge \bar{G}_0 \\ P(\mathbf{x} = \text{"11111110"}) &= g^7 \cdot (1 - g) \end{aligned}$$

g	50%	60%
G_4 bis G_7 unabhängig	$2^{-8} \approx 0{,}4\%$	$0{,}6^7 \cdot 0{,}4 = 1\%$

Für $G_7 = G_6 = G_5 = G_4$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \text{"11111110"} &= G_4 \wedge G_3 \wedge G_2 \wedge G_1 \wedge \bar{G}_0 \\ P(\mathbf{x} = \text{"11111110"}) &= g^4 \cdot (1-g) \end{aligned}$$

g	50%	60%
G_4 bis G_7 unabhängig	$2^{-8} \approx 0{,}4\%$	$0{,}6^7 \cdot 0{,}4 = 1\%$
$G_7 = G_6 = G_5 = G_4$	$2^{-5} \approx 3\%$	$0{,}6^4 \cdot 0{,}4 = 5\%$

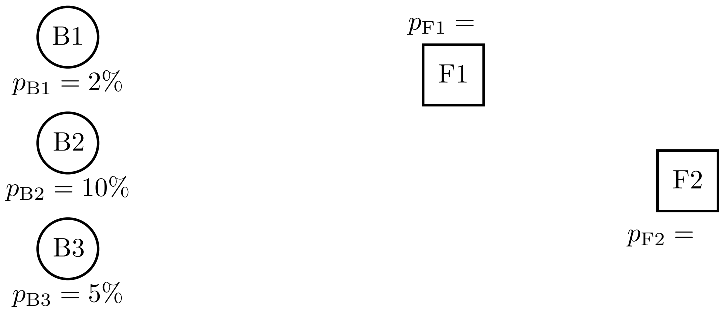
1.4 Fehlerbaumanalyse

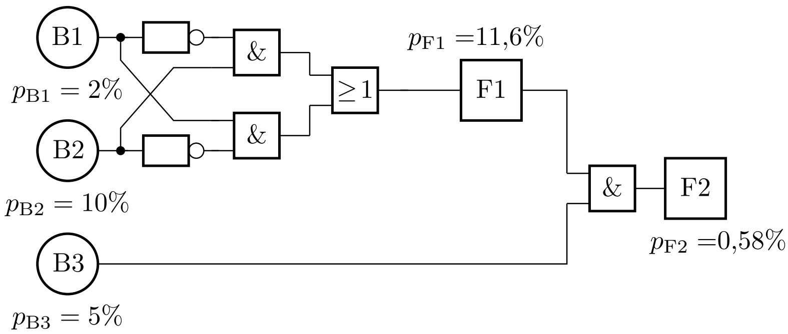
Aufgabe 2.5: Fehlerbaumanalyse

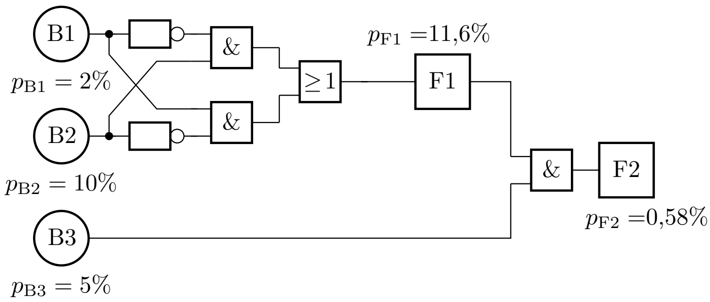
Ereignis F_1 tritt ein, wenn entweder B_1 und nicht B_2 oder nicht B_1 und B_2 eintritt. Das Ereignis F_2 tritt nur ein, wenn F_1 und B_3 eintreten. Wahrscheinlichkeiten der Basisereignisse B_1 bis B_3: $p_{\mathrm{B1}} = 2\%$, $p_{\mathrm{B2}} = 10\%$ und $p_{\mathrm{B3}} = 5\%$.

a) Beschreibung als Fehlerbaum?

b) Wahrscheinlichkeit für F_1 und F_2?



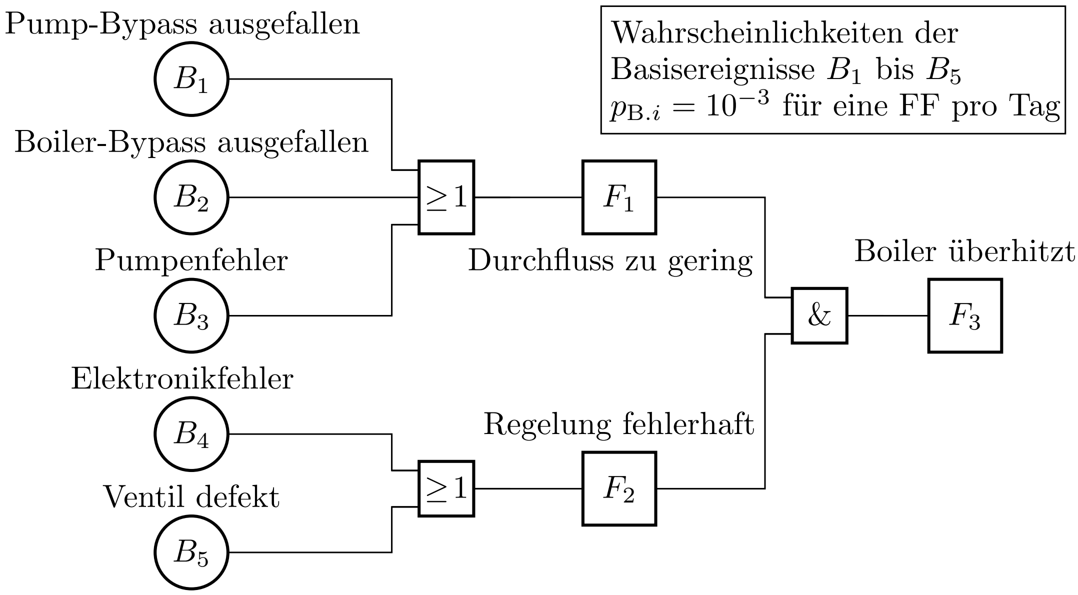




$$\begin{aligned} P\left(\mathrm{B1} \wedge \overline{\mathrm{B2}}\right) &= p_{\mathrm{B1}} \cdot (1 - p_{\mathrm{B2}}) = 2\% \cdot 90\% = 1{,}8\% \\ P\left(\mathrm{B2} \wedge \overline{\mathrm{B1}}\right) &= p_{\mathrm{B2}} \cdot (1 - p_{\mathrm{B1}}) = 10\% \cdot 98\% = 9{,}8\% \\ p_{\mathrm{F1}} &= P\left(\mathrm{B1} \wedge \overline{\mathrm{B2}}\right) + P\left(\mathrm{B2} \wedge \overline{\mathrm{B1}}\right)^* = 1{,}8\% + 9{,}8\% = 11{,}6\% \\ p_{\mathrm{F2}} &= P(\mathrm{F1} \wedge \mathrm{B3}) = 11,6\% \cdot 5\% = 0{,}58\% \end{aligned}$$

(* Die Bedingungen $\mathrm{B1} \wedge \overline{\mathrm{B2}}$ und $\mathrm{B2} \wedge \overline{\mathrm{B1}}$ schließen sich gegenseitig aus.)

Aufgabe 2.6: Auswertung Fehlerbaum



Wahrscheinlichkeiten $p_{\mathrm{F}i}$ der Fehlerereignisse F_1 bis F_3 pro Tag?

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{F1}} &= 1-(1-\mathbb{P}[B_1])\cdot(1-\mathbb{P}[B_2])\cdot(1-\mathbb{P}[B_3]) \\ &\approx \mathbb{P}(B_1)+\mathbb{P}[B_2]+\mathbb{P}[B_3] = 0,3\frac{\%}{\mathrm{Tag}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{F2}} &= 1-(1-\mathbb{P}[B_4])\cdot(1-\mathbb{P}[B_5]) \approx 0,2\,\frac{\%}{\mathrm{Tag}} \\ p_{\mathrm{F3}} &= p_{\mathrm{F1}}\cdot p_{\mathrm{F2}} \approx 6\cdot 10^{-6}\,\mathrm{Tag}^{-1} \end{aligned}$$

1.5 Markov-Ketten

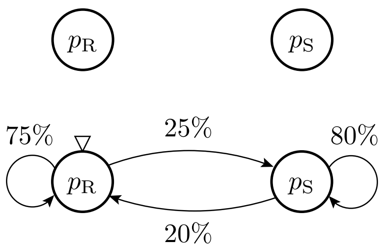
Aufgabe 2.7: Wettervorhersage mit Markov-Kette

Die Wettervorhersage für die Folgetage soll durch eine Markov-Kette mit den zwei Zuständen R – »Regen« und S – »Sonnenschein« beschrieben werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen Regentag wieder ein Regentag folgt, sei 75% und die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen Sonnentag wieder ein Sonnentag folgt, sei 80%.

a) Beschreibung als Markov-Kette mit Startzustand »Regentag«?

b) Aufstellen der Übergangsfunktion?

c) Wenn es am Tag $i = 0$ regnet, wie groß ist für die Tage $i = 1$ bis 4 die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonne scheint?



$$\begin{pmatrix} p_{\mathrm{R}} \\ p_{\mathrm{S}} \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{\mathrm{R}} \\ p_{\mathrm{S}} \end{pmatrix}_{n}$$

$$\begin{pmatrix} p_{\mathrm{R}} \\ p_{\mathrm{S}} \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{\mathrm{R}} \\ p_{\mathrm{S}} \end{pmatrix}_{n}$$

Tag	0	1	2	3	4
p_{R}	1	0,75	0,6125	0,53687	0,49528
p_{S}	0	0,25	0,3875	0,46313	0,50472

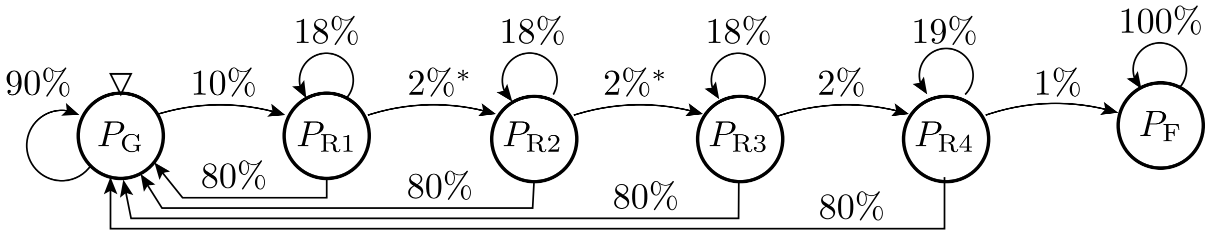
Aufgabe 2.8: Risikoanalyse

Eine schwerwiege Fehlfunktion bei einer Maschine kann nur auftreten, wenn sie vom Grundzustand G nacheinander in höhere Riskozustände R_1 bis R_4 übergeht. Das Bedienpersonal erkennt erhöhte Risikozustände mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% und initialisiert das System dann neu (Rückkehr in den Grundzustand G). Die Wahrscheinlichkeit für den Übergang von einem in den nächsten Risikozustand betrage in jedem Zeitschritt, wenn nicht neuinitialisiert wird, 10%. In Risikozustand R_4 tritt ohne rechtzeitige Neuinitialisierung mit 5% die schwerwiegende Fehlersituation F ein.

a) Beschreibung als Markov-Kette?

b) Programm zur Simulation der Markov-Kette?

c) Wahrscheinlichkeit, dass die schwerwiegende Fehlersituation mindestens einmal eingetreten ist, für $n = 1$ bis 7 und $n = 10^6$?




```
PG = 100; PR1 = 0; PR2=0; PR3=0; PR4=0; PF=0;
print('  n|   P_G|     PR1|    PR2|    PR3|     PR4 |     PF');
for n in range(1,8):
 PG_n = PG*0.9 + PR1*0.8 + PR2*0.8 + PR3*0.8 + PR4*0.8;
 PR1_n = PG*0.10 + PR1*0.18;
 PR2_n = PR1*0.02 + PR2*0.18;
 PR3_n = PR2*0.02 + PR3*0.18;
 PR4_n = PR3*0.02 + PR4*0.19;
 PF = PR4*0.01 + PF;
 PG=PG_n; PR1=PR1_n; PR2=PR2_n; PR3=PR3_n; PR4=PR4_n;
 print('%3i|%6.3f| %6.3f|%6.3f|%6.3f|%8.6f|%8.6f'%(n,
   PG, PR1, PR2, PR3, PR4, PF))
```

```
  n|   P_G|     PR1|    PR2|    PR3|     PR4 |     PF
  1|90.000| 10.000| 0.000| 0.000|0.000000|0.000000
  2|89.000| 10.800| 0.200| 0.000|0.000000|0.000000
  3|88.900| 10.844| 0.252| 0.004|0.000000|0.000000
  4|88.890| 10.842| 0.262| 0.006|0.000080|0.000000
  5|88.889| 10.841| 0.264| 0.006|0.000130|0.000001
  6|88.889| 10.840| 0.264| 0.006|0.000150|0.000002
  7|88.889| 10.840| 0.264| 0.006|0.000157|0.000004
-----------------------------------------------
10^6|87.485| 10.669| 0.260| 0.006|0.000157|1.579632
```

2 Fehlernachweisw.

2.1 Ohne Gedächtnis

Aufgabe 2.9: Nachweiswahrscheinlichkeit

Ein System hat im Mittel bei jeder 10^4-ten Service-Leistung eine Fehlfunktion. 70% der FF werden einem ersten, 20% einem zweiten und die restlichen 10% nicht lokalisierbaren Fehlern zugeordnet.

a) Welche Nachweiswahrscheinlichkeiten p_1 und p_2 haben die beiden zugeordneten Fehler?

b) Wie lang muss ein Zufallstest mindestens sein, damit der schlechter nachweisbare zugeordnete Fehler mindestens mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% nachgewiesen wird?

c) Welche Zuverlässigkeit hat das System, wenn die beiden zugeordneten Fehler beseitigt sind?

a) Nachweiswahrscheinlichkeiten der beiden zugeordneten Fehler:

$$p_1 = 0{,}7 \cdot 10^{-4}; \quad p_2 = 0{,}2 \cdot 10^{-4}$$

b) Testsatzlänge für den Nachweis von Fehler 2:

$$\begin{aligned} p_2(n) &= 1 - e^{-n \cdot p_2} \geq 99\% \\ n &\geq -\frac{\ln(1-99\%)}{p_2} = 2{,}3 \cdot 10^5 \end{aligned}$$

Nach Beseitigung der zugeordneten Fehler ist eine Verringerung der Häufigkeit der FF auf 10% und damit eine Verzehnfachung der Zuverlässigkeit zu erwarten:

$$Z = 10^5 \, \frac{\mathrm{SL}}{\mathrm{FF}}$$

Aufgabe 2.10: Testsatzlänge RAM-Test

Für einen Speicher mit 2^{32} Speicherplätzen sei angenommen, dass kein Fehler seltener als im Mittel aller 50 Zugriffe auf einen der 2^{32} Speicherplätze eine FF verursacht.

a) Ab welcher Testsatzlänge n in Speicherzugriffen erkennt ein Zufallstest jeden Fehler mindestens mit 99% Wahrscheinlichkeit?

b) Wie viele Stunden dauert ein Test mit der Mindesttestsatzlänge aus Aufgabenteil a) bei 10^8 Speicherzugriffen pro Sekunde?

Mindestnachweiswahrscheinlichkeit je Speicherzugriff:

$$p_{\min} = \left(50 \cdot 2^{32}\right)^{-1}$$

Mindestnachweiswahrscheinlichkeit bei n Speicherzugriffen:

$$p_{\min}(n) = 1 - e^{-n \cdot p_{\min}} \geq 99\%$$

Gesuchte Testsatzlänge:

$$n \geq -\ln(1-99\%) \cdot \frac{1}{p_{\min}} = -\ln(1\%) \cdot 50 \cdot 2^{32} \approx 10^{12}$$

Mindesttestdauer:

$$\begin{aligned} t &= n \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s} \\ &= 10^{12} \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s} = 2{,}75\,\mathrm{h} \end{aligned}$$

2.2 Mit Gedächtnis

Aufgabe 2.11: RAM-Kopplungsfehler

Schreiben einer 1 in Zelle i verändert Zelle j von 0 nach 1, nachweisbar durch die Testfolge:

- Schreibe 0 in Zelle j, Wahrscheinlichkeit $p_{\mathrm{W0}} = \frac{1}{4\cdot\#A}$
- Schreibe 1 in Zelle i, Wahrscheinlichkeit $p_{\mathrm{W1}} = \frac{1}{4\cdot\#A}$
- Lese Zelle j ohne zwischenzeitlichen Schreibzugriff auf Zelle j, Wahrscheinlichkeit $p_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2\cdot\#A}$.

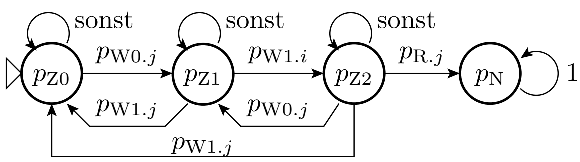
a) Beschreibung des Fehlernachweises durch eine Markov-Kette?

b) Simulation der Markov-Kette mit $\#A = 128$?

c) Darstellung der bedingten Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler in Schritt n nachgewiesen wird, wenn er in Schritt $n-1$ noch nicht nachgewiesen war

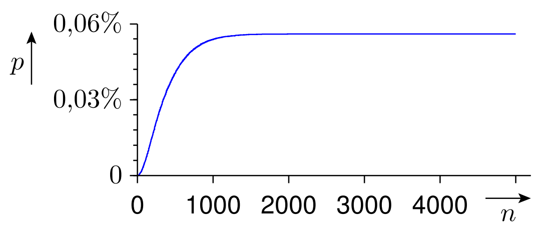
$$p_{\Delta\mathrm{N}}(n) = \frac{p_{\mathrm{N}}(n+1) - p_{\mathrm{N}}(n)}{1 - p_{\mathrm{N}}(n)}$$

für $n = 1$ bis 5000?



Z0 – Fehleranregung nicht vorbereitet; Z1 – Fehleranregung vorbereitet; Z2 – Fehler angeregt; N – Fehler nachgewiesen.

```
pZ0=1; pZ1=0; pZ2=0; pN(1)=0; N=5000;
A=128; pR = 1/(2*A); pW = 1/(4*A);
for n = 1:N
  pZ0_n = pZ0 * (1-pW) + pZ1*pW         + pZ2*pW;
  pZ1_n = pZ0 *    pW  + pZ1*(1-pW-pR)  + pZ2*pW;
  pZ2_n = pZ1 *    pR  + pZ2*(1-2*pW-pR);
  pN    = pN(n) + pZ2 * pR;
  p(n)  = pZ2*pR / (pZ0+pZ1+pZ2);
  pZ0=pZ0_n; pZ1=pZ1_n; pZ2=pZ2_n;
end;
plot(1:N, p);
```



Ab $n \geq 2000$ bleibt der relative Wahrscheinlichkeitszuwachs konstant $p_{\Delta\mathrm{N}}(n) \approx 0{,}057\%$. Zunahme der Nachweiswahrscheinlichkeit wie »ohne Gedächtnis«

$$p(n) \approx 1 - e^{-n\cdot p_{\Delta\mathrm{N}}}$$

3 Fehlerbeseitigungsw.

3.3 Ersatziteration

Aufgabe 2.12: Fehleranteil nach Ersatz

Für ein gefertigtes Gerät ist die zu erwartende Ausbeute $\mathbb{E}[Y] = 60\%$ und der Test erkennt $FC = p_{\mathrm{E}} = 90\%$ der fehlerhaften Geräte. Erkannte fehlerhafte Geräte werden ersetzt.

a) Wie groß ist der Fehleranteil der Geräte nach der Fertigung? (Gleich der Wahrscheinlichkeit p_{F}, dass ein gefertigtes Gerät fehlerhaft ist.)

b) Wie hoch ist der zu erwartende Fehleranteil nach Ersatz der erkennbar defekten Geräte? (Gleich der Wahrscheinlichkeit p_{FT}, dass ein Gerät nach der Test-und-Ersatz-Iteration fehlerhaft ist.)

Zu erwartende Ausbeute als Anteil der erkannten fehlerhaften Schaltkreise:

$$\mathbb{E}[Y] = 1 - p_{\mathrm{F}} \cdot p_{\mathrm{E}}$$

Wahrscheinlichkeit, dass ein gefertigtes Gerät fehlerhaft ist:

$$p_{\mathrm{F}} = \frac{1 - \mathbb{E}[Y]}{p_{\mathrm{E}}} = \frac{1 - 60\%}{90\%} = 44{,}4\%$$

Fehleranteil der gefertigten Geräte 0,444 dpu (dpu – Defects per Unit).

Wahrscheinlichkeit, dass ein Gerät nach Ersatz der erkennbar defekten Geräte fehlerhaft ist:

$$p_{\mathrm{FT}} = \frac{p_{\mathrm{F}} \cdot (1 - p_{\mathrm{E}})}{1 - p_{\mathrm{F}} \cdot p_{\mathrm{E}}} = \frac{44{,}4\% \cdot (1 - 90\%)}{1 - 44{,}4\% \cdot 90\%} = 7{,}4\%$$

Zu erwartender Fehleranteil

$$DL_{\mathrm{Ers}} = 0{,}074\,\mathrm{dpu} = 74.000\,\mathrm{dpm}$$

(dpm – Defects per Million). Etwa noch jedes 14. Gerät ist fehlerhaft.

Aufgabe 2.13: Fehlerüberdeckung Schaltkreistest

Die zu erwartende Ausbeute einer Schaltkreisfertigung sei $\mathbb{E}[Y] = 80\%$ und der Fehleranteil der vom Test als gut befundenen Schaltkreise sei $DL_{\mathrm{T}} = 1000\,\mathrm{dpm}$.

a) Auf welche Fehlerüberdeckung $FC = p_{\mathrm{E}}$ der Tests lässt das schließen?

b) Wie wirkt sich ein Ausbeuteeinbruch auf $\mathbb{E}[Y] = 30\%$ durch eine technologische Umstellung auf den Fehleranteil der gefertigten Schaltkreise aus?

Ausbeute als Anteil der erkannten fehlerhaften Schaltkreise:

$$\mathbb{E}[Y] = 1 - p_{\mathrm{F}} \cdot p_{\mathrm{E}}$$

Wahrscheinlichkeit, dass ein als fehlerfrei ausgewiesenes Objekt fehlerhaft ist (siehe Vorlesung):

$$\begin{aligned} DL_{\mathrm{T}} = p_{\mathrm{FT}} &= \frac{p_{\mathrm{F}} \cdot (1 - p_{\mathrm{E}})}{1 - p_{\mathrm{F}} \cdot p_{\mathrm{E}}} = \frac{(1 - \mathbb{E}[Y]) \cdot (1 - p_{\mathrm{E}})}{\mathbb{E}[Y] \cdot p_{\mathrm{E}}} \\ FC = p_{\mathrm{E}} &= \frac{1 - \mathbb{E}[Y]}{1 - \mathbb{E}[Y] \cdot (1 - p_{\mathrm{FT}})} = \frac{1 - 80\%}{1 - 80\% \cdot (1 - 10^{-3})} \\ &= 1 - 4 \cdot 10^{-3} = 99{,}6\% \end{aligned}$$

Anmerkung: Größenordnung der (Modell-) Fehlerüberdeckungen für Schaltkreise 95% bis 99%. Sind die tatsächlichen Fehlerüberdeckungen und/oder die tatsächlichen Fehleranteile viel höher?

$$\begin{aligned} DL_{\mathrm{T}} = p_{\mathrm{FT}} &= \frac{(1 - Y) \cdot (1 - p_{\mathrm{E}})}{Y \cdot p_{\mathrm{E}}} = \frac{(1 - 30\%) \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{30\% \cdot (1 - 4 \cdot 10^{-6})} \\ &= \frac{(1 - 30\%) \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{30\% \cdot (1 - 4 \cdot 10^{-3})} = 9{,}3 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Ein Ausbeuteeinbruch von 80% auf 30% bewirkt, dass sich der Fehleranteil der eingesetzten Schaltkreise mehr als verdoppelt.

3.4 Reparaturiteration

Aufgabe 2.14: Fehlerbeseitigung durch Reparatur (1)

Ein Programm von 1.000 NLOC habe abschätzungsweise nach dem Syntaxtest und der erfolgreichen Abarbeitung der ersten Testbeispiele noch 20 Fehler. Der nachfolgende Test habe einer Erkennungswahrscheinlichkeit von $p_\mathrm{E} = 60\%$.

a) Wie groß muss die Reparaturgüte Q_Rep mindestens sein, damit sich die Anzahl der nicht beseitigten Fehler halbiert?

b) Wie groß darf die Fehlerentstehungsrate η_Rep (neu entstehende Fehlern je Reparaturversuch) maximal sein, wenn die Erfolgswahrscheinlichkeit der Reparatur $p_\mathrm{R} = 30\%$ beträgt?

Anteil der nicht beseitigt Fehler:

$$\frac{\#F_\mathrm{TB}}{\#F} = \left(1 + \frac{p_\mathrm{E}}{Q_\mathrm{Rep}}\right) \cdot (1 - p_\mathrm{E}) \leq 0{,}5$$

aufgelöst nach der erforderlichen Reparaturgüte:

$$Q_\mathrm{Rep} = \frac{p_\mathrm{E}}{\frac{\frac{\mathbb{E}[\#F_\mathrm{TB}]}{\mathbb{E}[\#F]}}{1-p_\mathrm{E}} - 1} \geq \frac{60\%}{\frac{50\%}{1-60\%} - 1} = 2{,}4$$

Maßeinheit der Reparaturgüte: »beseitigte Fehler je neu entstandener Fehler«.
Mindestreparaturgüte

$$Q_\mathrm{Rep} \quad = \quad \frac{p_\mathrm{R}}{\eta_\mathrm{Rep}} \geq 2{,}4$$

aufgelöst nach der maximal zulässigen Fehlerenstehungsrate je Reparaturversuch:

$$\eta_\mathrm{Rep} = \frac{p_\mathrm{R}}{Q_\mathrm{Rep}} \leq \frac{30\%}{2{,}4} = 12{,}5\%$$

neu entstehende Fehler je Reparaturversuch.

Aufgabe 2.15: Fehlerbeseitigung durch Reparatur (2)

Der Test eines Programms erkennt 95% der $\#F = 100$ entstandenen Fehler. Die Beseitigung eines erkannten Fehler erfordert im Mittel 5 Reparaturversuche ($p_\mathrm{R} = 1/5$) und bei 10 Reparaturversuchen entsteht im Mittel 1 neuer Fehler ($\eta_\mathrm{FR} = 0{,}1$).

a) Wie groß ist die zu erwartende Fehleranzahl $\#F_\mathrm{TB}$ im Einsatz?

b) Zu erwartende Fehleranzahl $\#F_\mathrm{TB}$ im Einsatz, wenn schlechte Fehlerlokalisierung und Verzicht auf Rückbau die Anzahl der Reperaturversuche je erkannter Fehler und die Fehlerentstehungsrate je Reparaturversuch η_FR je um 50% erhöhen?

Die Fehlerüberdeckung entspricht der Erkennungswahrscheinlichkeit p_e. Alles andere ist für die Abschätzung

$$\#F_\mathrm{TB} = \frac{\#F \cdot (1 - p_\mathrm{E})}{1 - \frac{p_\mathrm{E} \cdot \eta_\mathrm{FR}}{p_\mathrm{R}}}$$

gegeben:

$$\#F_\mathrm{TB} = \frac{100 \cdot (1 - 95\%)}{1 - \frac{95\% \cdot 0{,}1}{0{,}2}} = 9{,}5$$

Davon sind abschätzungsweise 5 nicht erkannte Fehler aus dem Entstehungsprozess und 4,5 bei Reparaturversuchen entstandene Fehler. Gebrochene Werte für die Fehleranzahl sind hier ok, weil in Wirklichkeit Erwartungswerte geschätzt werden (siehe später Foliensatz F3).

7,5 statt 5 Reparaturversuche je Fehler $\Rightarrow p_\mathrm{R} = 1/7{,}5$ und $\eta_\mathrm{FR} = 1/7{,}5 \Rightarrow \eta_\mathrm{FR} = 1{,}5$, d.h. Sonderfall $p_\mathrm{R} = \eta_\mathrm{FR}$:

$$\#F_\mathrm{TB} = \frac{\#F \cdot (1 - p_\mathrm{E})}{1 - \frac{p_\mathrm{E} \cdot \eta_\mathrm{FR}}{p_\mathrm{R}}} = \frac{100 \cdot (1 - 95\%)}{1 - 95\%} = 100$$

Es werden 95% der ursprünlichen und neu entstehenden Fehler so durch neu entstehende ersetzt, dass ihre FF-Rate kleiner als der Kehrwert der Testsatzlänge ist. Mit einem Test deutlich länger als 100 wird ein System durch die Fehlerbeseitigungsiteration trotz der immer noch gleicher Fehleranzahl zuverlässiger.

5 Fehlerentstehung

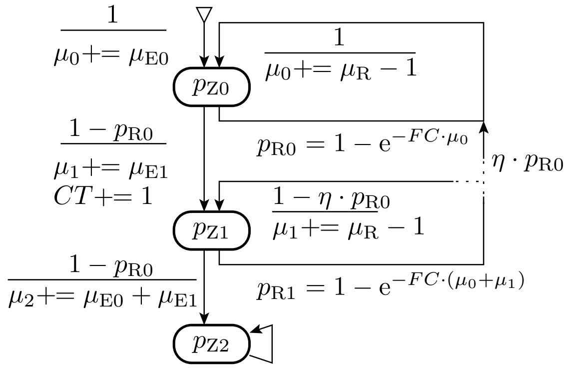
Aufgabe 2.16: Stufenmodell

Stufenmodell aus zwei Phasen. Nach jeder Phase soll, wenn ein erkennbarer Fehler vorliegt, eine Fehlerbeseitigungsiteration folgen, die den Fehler beseitigt und im Mittel μ_R neue Fehler erzeugt. Nach der ersten Phase Rückgriff zur ersten Phase, nach der zweiten mit Wahrscheinlichkeit, dass aus der ersten Phase noch ein Fehler stammt mal einem Parameter $0 \le \eta \le 1$, Rückgriff zur ersten, sonst zur zweiten Phase. Beim Abarbeitung und wiederholter Abarbeitung einer Phasen Erhöhung der Fehleranzahl im Mittel für Phase 1 um $\mu_\mathrm{E1} = 2$ und Phase 2 um $\mu_\mathrm{E2} = 8$.

a) Nachbilden des Fehlerentstehungs- und Beseitigungsprozess durch eine Markov-Kette. Ergänzen von Kantenzählern für die Anzahl der zu erwartenden Fehler aus beiden Phasen und im fertigen System sowie für die zu erwartende Anzahl der Abarbeitungen der zweiten Entstehungsphase.

b) Programm zur Simulation der Markov-Kette.

c) Beispieluntersuchungen für $\eta \in \{0,\ 10\%,\ 50\%\}$.



- Start mit Abarbeitung der 1. Phase. Dabei entstehen im Mittel 2 Fehler. Startzustand Z_0.
- Rückgriff erfolgt, wenn mindestens ein erkennbarer Fehler. Die Fehleranzahl ist hier als poissonverteilt angenommen.
- Beim Rückgriff wird ein Fehler beseitigt und es entstehen im Mittel μ_R neue Fehler.
- Ohne Rückgriff wird Phase 2 abgearbeitet. Dabei entstehen im Mittel 8 Fehler. Übergang in Zustand Z_1.
- Beim Rückgriff nach Phase 2 ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler aus Phase 1, statt aus Phase 2 beseitigt wird, gleich der Wahrscheinlich, dass aus Phase 1 noch ein erkennbarer Fehler existiert mal Parameter η zur Rückgriffunterdrückung.
- Nach Phase 1 muss in Phase 2 nachgebessert werden, wobei wieder 8 Fehler entstehen.
- Wenn nach Phase 2 kein Fehler erkannt wird, Übergang nach Z_2 »Projekt fertig«.
- Die bei jedem Übergang hinzukommenden fertigen Projekte enthalten jeweils Fehler aus der ersten und der zweiten Phase.

Nachbildung als Programm:

```
from math import exp
pz = [1.0, 0.0, 0.0]                  # Anfangszustand
mu0 = 2; mu1 = 0; mu2 = 0; Ct = 0     # Anfangszählwerte
muR = 0.5      # erw. Anz. der bei einer Reparatur entstehenden Fehler
muE1 = 8       # erw. Anz. der bei Abarbeitung von Phase 2 entst. Fehler
FC = 0.8       # Fehlerüberdeckung der Tests
eta = 1        # Parameter zur Rückgriffbeschränkung
```

```
for idx in range(1, 60):
  pr0  = 1-exp(-FC*mu0)          # Wahrsch. erkennb. Fehler nach Phase 1
  pr1  = 1-exp(-FC*(mu0+mu1)) # Wahrsch. erkennb. Fehler nach Phase 2
  pz00 = pz[0] * pr0 + pz[1] * pr0*eta * pr1  # Kante nach z0
  mu0 += pz00 *(muR-1)                          # Fehlerz. Phase
  pz01 = pz[0] * (1 - pr0)                      # Kante von z0 nach z1
  Ct  += pz01                                   # Abarbeitungsz. Phase 2
  pz11 = pz[1]* pr1 * (1-eta*pr0)               # Kante von z1 nach z1
  mu1 += pz11 *(muR-1) + pz01 * muE1            # Fehlerz. Phase 2
  pz12 = pz[1] * (1 - pr1)                      # Kante von z1 nach z2
  mu2 += pz12 * (mu0 + mu1)                     # Fehlerz. Gesamtprojekt
  pz = (pz00, pz01 + pz11, pz12 + pz[2])
  if idx%2 == 0:
    print("%3d␣:␣%5.1f␣%5.1f␣%5.1f␣|␣%5.2f␣%5.2f␣%5.2f␣|␣%4.2f"%(
      idx, 100*pz[0], 100*pz[1], 100*pz[2], mu0, mu1, mu2, Ct))
```

Simulation mit $\eta = 0$ (keine Rückgriffe):

```
Nr.:   pZ0   pZ1   pZ2 |  mu0   mu1   mu2 |  Ct
  3 : 37.5  60.0   2.6 | 1.13  4.71  0.13 | 0.63
  6 :  6.6  89.6   3.8 | 0.92  6.09  0.22 | 0.93
  9 :  0.9  94.0   5.1 | 0.89  5.18  0.30 | 0.99
 12 :  0.1  91.6   8.3 | 0.88  3.85  0.46 | 1.00
 15 :  0.0  82.8  17.2 | 0.88  2.56  0.80 | 1.00
 18 :  0.0  62.7  37.3 | 0.88  1.51  1.33 | 1.00
 21 :  0.0  34.2  65.8 | 0.88  0.85  1.88 | 1.00
 24 :  0.0  13.1  86.9 | 0.88  0.57  2.21 | 1.00
 27 :  0.0   4.0  96.0 | 0.88  0.47  2.33 | 1.00
 30 :  0.0   1.2  98.8 | 0.88  0.44  2.37 | 1.00
 33 :  0.0   0.3  99.7 | 0.88  0.43  2.38 | 1.00
 36 :  0.0   0.1  99.9 | 0.88  0.43  2.38 | 1.00
```

- Der Phasenübergang erfolgt, wenn die Anzahl der erkennbaren Fehler deutlich unter 1 absinkt.
- Es entstehen insgesamt nur 10 Fehler. Nach Abschluss von Phase 1 werden nur noch Fehler in Phase 2 beseitigt.
- Nach 36 Phasenübergängen + Fehlerbeseitigungsiterationen ist das Projekt mit 99,9% Wahrscheinlichkeit abgeschlossen.

Simulation mit $\eta = 10\%$ (seltene Rückgriffe):

```
Nr.:   pZ0   pZ1   pZ2 |  mu0   mu1   mu2 |  Ct
  3 : 40.7  56.7   2.5 | 1.10  4.78  0.13 | 0.63
  6 : 13.2  83.3   3.5 | 0.81  6.90  0.20 | 1.02
  9 :  7.5  88.4   4.1 | 0.68  7.06  0.24 | 1.19
 12 :  5.9  89.5   4.7 | 0.58  6.77  0.29 | 1.31
 15 :  4.9  89.6   5.5 | 0.50  6.33  0.35 | 1.42
 18 :  4.1  89.1   6.9 | 0.44  5.79  0.43 | 1.51
 21 :  3.4  87.5   9.1 | 0.39  5.16  0.56 | 1.59
 24 :  2.8  84.4  12.8 | 0.34  4.48  0.75 | 1.67
 27 :  2.3  78.5  19.2 | 0.30  3.79  1.03 | 1.73
 30 :  1.8  68.6  29.6 | 0.27  3.14  1.40 | 1.78
 33 :  1.3  54.3  44.4 | 0.25  2.58  1.85 | 1.82
 36 :  0.8  37.6  61.6 | 0.24  2.17  2.28 | 1.84
 39 :  0.5  22.7  76.8 | 0.23  1.90  2.62 | 1.86
 42 :  0.3  12.2  87.5 | 0.22  1.76  2.83 | 1.87
 45 :  0.1   6.1  93.7 | 0.22  1.68  2.95 | 1.88
```

Aus Phase 1 werden mehr Fehler beseitigt, aber in Phase 2 entstehen mehr Fehler. Insgesamt längere Projektdauer und mehr Fehler im Endergebnis.

Simulation mit $\eta = 50\%$ (keine Unterdrückung von Rückgriffen):

Nr.:	pZ0	pZ1	pZ2	mu0	mu1	mu2	Ct
3 :	51.9	45.7	2.4	1.02	5.07	0.12	0.65
6 :	26.3	70.8	2.9	0.51	9.59	0.17	1.30
9 :	13.1	83.9	3.0	0.26	12.22	0.17	1.75
12 :	6.7	90.4	3.0	0.14	13.16	0.17	2.02
15 :	3.4	93.6	3.0	0.07	13.03	0.17	2.17
18 :	1.8	95.2	3.0	0.04	12.29	0.17	2.25
21 :	0.9	96.1	3.0	0.02	11.22	0.18	2.29
24 :	0.5	96.5	3.1	0.01	9.96	0.18	2.31
27 :	0.3	96.5	3.2	0.01	8.61	0.20	2.32
33 :	0.1	94.9	5.0	0.00	5.82	0.31	2.33
39 :	0.0	79.9	20.1	0.00	3.18	0.89	2.33
45 :	0.0	28.5	71.5	0.00	1.64	1.97	2.33
51 :	0.0	3.0	97.0	0.00	1.34	2.34	2.33
57 :	0.0	0.2	99.8	0.00	1.31	2.38	2.33

Aus Phase 1 werden alle Fehler beseitigt, aber in Phase 2 entstehen mehr als doppelt so viele Fehler wie ohne Rückgriffe, weil die 2. Phase 2,33 mal durchlauf wird. Gegenüber $\eta = 10\%$ dauert die Iteration länger, aber weniger Fehler im Endergebnis.

- Eine wirklichkeitsnahe Modellierung eines Stufenmodells ist anspruchsvoll.
- Das Erlauben/Unterbinden von Rückgriffen über mehrere Phasen hat Einfluss auf den Entwurfsaufwand und die zu erwartende Fehleranzahl in den Projekten.
- Das präsentierte Modell hat außer, dass nur zwei Phasen betrachtet werden, noch erhebliche Schwachstellen:
  - Die Anzahl der entstehenden Fehler in jeder Phase ist vom Arbeitsaufwand und damit von der Projektgröße anhängig.
  - Bei den Nachbesserungen in einer Phase aufgrund von Änderungen in der Phase zuvor, wird sich die Anzahl der entstehenden Fehler von Durchlauf 0 unterscheiden.
  - Nach jeder Phase werden andere Tests mit anderen Fehlerüberdeckungen durchgeführt.
  - ...