Test und Verlässlichkeit Grosse Übung zu Foliensatz 4

Prof. G. Kemnitz

15. Juni 2020

Contents

1 Nachweislänge

1.3 Schätzen der FFR-Dichte

Aufgabe 4.1: Modell von Musa, Goel und Okumoto

Das am häufigsten zitierte Zuverlässigkeitswachstumsmodell ist das von Musa, Goel und Okumoto (MGO-Modell[1]). Es unterstellt für den Zusammenhang zwischen der Anzahl der nicht beseitigten Fehler und der Reifezeit t eine abklingende e-Funktion:

$$\varphi(t) = a \cdot \mathrm{e}^{-bt}$$

Was für eine Verteilung der FF-Rate unterstellt das MGO-Modell?

Lösung 4.1

Ersatz der Nutzungsdauer t durch $\frac{n}{MTS}$ führt auf die zugehörige Verteilung der Nachweislänge:

$$F_N(n) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{b \cdot n}{MTS}}$$

Diese ist im allgemeinen Fall eine Mischverteilung von Verteilungen der Nachweislängen von Fehlern mit unterschiedlichem ζ_i:

$$F_{N.i}(n) = 1 - \mathrm{e}^{-\zeta_i \cdot n}$$

Im speziellen Fall wird nur die Verteilung für eine Nachweislänge ζ_i »gemischt«:

$$F_N(n) = F_{N.i}(n) \text{ für } \zeta_i = \frac{b}{MTS}$$

[1] Benedikte Elbel, Zuverlässigkeitsorientiertes Testmanagement (2003)

Die FFR-Dichte, mit der die Verteilungen für unterschiedliche ζ_i zu mischen sind, damit das MGO-Modell gilt, ist eine Zweipunktverteilung:

$$h(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{für } \zeta = \frac{b}{MTS} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2 Fehleranzahl

2.1 Entstehende Fehler

Aufgabe 4.2: Stufenmodell

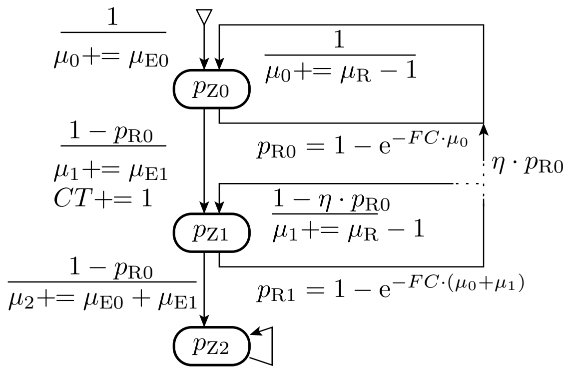
Stufenmodell aus zwei Phasen. Nach jeder Phase soll, wenn ein erkennbarer Fehler vorliegt, eine Fehlerbeseitigungsiteration folgen, die den Fehler beseitigt und im Mittel μ_{R} neue Fehler erzeugt. Nach der ersten Phase Rückgriff zur ersten Phase, nach der zweiten mit Wahrscheinlichkeit, dass aus der ersten Phase noch ein Fehler stammt mal einem Parameter $0 \le \eta \le 1$, Rückgriff zur ersten, sonst zur zweiten Phase. Beim Abarbeitung und wiederholter Abarbeitung einer Phasen Erhöhung der Fehleranzahl im Mittel für Phase 1 um $\mu_{\mathrm{E1}} = 2$ und Phase 2 um $\mu_{\mathrm{E2}} = 8$.

a) Nachbilden des Fehlerentstehungs- und Beseitigungsprozess durch eine Markov-Kette. Ergänzen von Kantenzählern für die Anzahl der zu erwartenden Fehler aus beiden Phasen und im fertigen System sowie für die zu erwartende Anzahl der Abarbeitungen der zweiten Entstehungsphase.

b) Programm zur Simulation der Markov-Kette.

c) Beispieluntersuchungen für $\eta \in \{0,\ 10\%,\ 50\%\}$.

Lösung 4.2a



- Start mit Abarbeitung der 1. Phase. Dabei entstehen im Mittel 2 Fehler. Startzustand Z_0.
- Rückgriff erfolgt, wenn mindestens ein erkennbarer Fehler. Die Fehleranzahl ist hier als poissonverteilt angenommen.
- Beim Rückgriff wird ein Fehler beseitigt und es entstehen im Mittel μ_{R} neue Fehler.
- Ohne Rückgriff wird Phase 2 abgearbeitet. Dabei entstehen im Mittel 8 Fehler. Übergang in Zustand Z_1.
- Beim Rückgriff nach Phase 2 ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler aus Phase 1, statt aus Phase 2 beseitigt wird, gleich der Wahrscheinlich, dass aus Phase 1 noch ein erkennbarer Fehler existiert mal Parameter η zur Rückgriffunterdrückung.
- Nach Phase 1 muss in Phase 2 nachgebessert werden, wobei wieder 8 Fehler entstehen.
- Wenn nach Phase 2 kein Fehler erkannt wird, Übergang nach Z_2 »Projekt fertig«.
- Die bei jedem Übergang hinzukommenden fertigen Projekte enthalten jeweils Fehler aus der ersten und der zweiten Phase.

Lösung 4.2b

Nachbildung als Programm:

```
from math import exp
pz = [1.0, 0.0, 0.0]                      # Anfangszustand
mu0 = 2; mu1 = 0; mu2 = 0; Ct = 0         # Anfangszählwerte
muR = 0.5       # erw. Anz. der bei einer Reparatur entstehenden Fehler
muE1 = 8        # erw. Anz. der bei Abarbeitung von Phase 2 entst. Fehler
FC = 0.8        # Fehlerüberdeckung der Tests
eta = 1         # Parameter zur Rückgriffbeschränkung
for idx in range(1, 60):
  pr0  = 1-exp(-FC*mu0)          # Wahrsch. erkennb. Fehler nach Phase 1
  pr1  = 1-exp(-FC*(mu0+mu1))   # Wahrsch. erkennb. Fehler nach Phase 2
  pz00 = pz[0] * pr0 + pz[1] * pr0*eta * pr1   # Kante nach z0
  mu0 += pz00 *(muR-1)                           # Fehlerz. Phase
  pz01 = pz[0] * (1 - pr0)                       # Kante von z0 nach z1
  Ct  += pz01                                    # Abarbeitungsz. Phase 2
  pz11 = pz[1]* pr1 * (1-eta*pr0)                # Kante von z1 nach z1
  mu1 += pz11 *(muR-1) + pz01 * muE1             # Fehlerz. Phase 2
  pz12 = pz[1] * (1 - pr1)                       # Kante von z1 nach z2
  mu2 += pz12 * (mu0 + mu1)                      # Fehlerz. Gesamtprojekt
  pz = (pz00, pz01 + pz11, pz12 + pz[2])
  if idx%2 == 0:
    print("%3d : %5.1f %5.1f %5.1f | %5.2f %5.2f %5.2f | %4.2f"%(
      idx, 100*pz[0], 100*pz[1], 100*pz[2], mu0, mu1, mu2, Ct))
```

Lösung 4.2c

Simulation mit $\eta = 0$ (keine Rückgriffe):

Nr.:	pZ0	pZ1	pZ2	mu0	mu1	mu2	Ct
3 :	37.5	60.0	2.6	1.13	4.71	0.13	0.63
6 :	6.6	89.6	3.8	0.92	6.09	0.22	0.93
9 :	0.9	94.0	5.1	0.89	5.18	0.30	0.99
12 :	0.1	91.6	8.3	0.88	3.85	0.46	1.00
15 :	0.0	82.8	17.2	0.88	2.56	0.80	1.00
18 :	0.0	62.7	37.3	0.88	1.51	1.33	1.00
21 :	0.0	34.2	65.8	0.88	0.85	1.88	1.00
24 :	0.0	13.1	86.9	0.88	0.57	2.21	1.00
27 :	0.0	4.0	96.0	0.88	0.47	2.33	1.00
30 :	0.0	1.2	98.8	0.88	0.44	2.37	1.00
33 :	0.0	0.3	99.7	0.88	0.43	2.38	1.00
36 :	0.0	0.1	99.9	0.88	0.43	2.38	1.00

- Der Phasenübergang erfolgt, wenn die Anzahl der erkennbaren Fehler deutlich unter 1 absinkt.
- Es entstehen insgesamt nur 10 Fehler. Nach Abschluss von Phase 1 werden nur noch Fehler in Phase 2 beseitigt.
- Nach 36 Phasenübergängen + Fehlerbeseitigungsiterationen ist das Projekt mit 99,9% Wahrscheinlichkeit abgeschlossen.

Simulation mit $\eta = 10\%$ (seltene Rückgriffe):

Nr.:	pZ0	pZ1	pZ2	mu0	mu1	mu2	Ct
3 :	40.7	56.7	2.5	1.10	4.78	0.13	0.63
6 :	13.2	83.3	3.5	0.81	6.90	0.20	1.02
9 :	7.5	88.4	4.1	0.68	7.06	0.24	1.19
12 :	5.9	89.5	4.7	0.58	6.77	0.29	1.31
15 :	4.9	89.6	5.5	0.50	6.33	0.35	1.42
18 :	4.1	89.1	6.9	0.44	5.79	0.43	1.51
21 :	3.4	87.5	9.1	0.39	5.16	0.56	1.59

24 :	2.8	84.4	12.8	0.34	4.48	0.75	1.67
27 :	2.3	78.5	19.2	0.30	3.79	1.03	1.73
30 :	1.8	68.6	29.6	0.27	3.14	1.40	1.78
33 :	1.3	54.3	44.4	0.25	2.58	1.85	1.82
36 :	0.8	37.6	61.6	0.24	2.17	2.28	1.84
39 :	0.5	22.7	76.8	0.23	1.90	2.62	1.86
42 :	0.3	12.2	87.5	0.22	1.76	2.83	1.87
45 :	0.1	6.1	93.7	0.22	1.68	2.95	1.88

Aus Phase 1 werden mehr Fehler beseitigt, aber in Phase 2 entstehen mehr Fehler. Insgesamt längere Projektdauer und mehr Fehler im Endergebnis.

Simulation mit $\eta = 50\%$ (keine Unterdrückung von Rückgriffen):

Nr.:	pZ0	pZ1	pZ2	mu0	mu1	mu2	Ct
3 :	51.9	45.7	2.4	1.02	5.07	0.12	0.65
6 :	26.3	70.8	2.9	0.51	9.59	0.17	1.30
9 :	13.1	83.9	3.0	0.26	12.22	0.17	1.75
12 :	6.7	90.4	3.0	0.14	13.16	0.17	2.02
15 :	3.4	93.6	3.0	0.07	13.03	0.17	2.17
18 :	1.8	95.2	3.0	0.04	12.29	0.17	2.25
21 :	0.9	96.1	3.0	0.02	11.22	0.18	2.29
24 :	0.5	96.5	3.1	0.01	9.96	0.18	2.31
27 :	0.3	96.5	3.2	0.01	8.61	0.20	2.32
33 :	0.1	94.9	5.0	0.00	5.82	0.31	2.33
39 :	0.0	79.9	20.1	0.00	3.18	0.89	2.33
45 :	0.0	28.5	71.5	0.00	1.64	1.97	2.33
51 :	0.0	3.0	97.0	0.00	1.34	2.34	2.33
57 :	0.0	0.2	99.8	0.00	1.31	2.38	2.33

Aus Phase 1 werden alle Fehler beseitigt, aber in Phase 2 entstehen mehr als doppelt so viele Fehler wie ohne Rückgriffe, weil die 2. Phase 2,33 mal durchlauf wird. Gegenüber $\eta = 10\%$ dauert die Iteration länger, aber weniger Fehler im Endergebnis.

- Eine wirklichkeitsnahe Modellierung eines Stufenmodells ist anspruchsvoll.
- Das Erlauben/Unterbinden von Rückgriffen über mehrere Phasen hat Einfluss auf den Entwurfsaufwand und die zu erwartende Fehleranzahl in den Projekten.
- Das präsentierte Modell hat außer, dass nur zwei Phasen betrachtet werden, noch erhebliche Schwachstellen:
  - Die Anzahl der entstehenden Fehler in jeder Phase ist vom Arbeitsaufwand und damit von der Projektgröße anhängig.
  - Bei den Nachbesserungen in einer Phase aufgrund von Änderungen in der Phase zuvor, wird sich die Anzahl der entstehenden Fehler von Durchlauf 0 unterscheiden.
  - Nach jeder Phase werden andere Tests mit anderen Fehlerüberdeckungen durchgeführt.
  - ...

Aufgabe 4.3: Leistungsabhängiges Gehalt

Beim Programmieren entstehen Fehler in der Größenordnung von $\zeta_E \approx 1...10\%$ je Codezeile. Der Wert schwankt aber von Programmierer zu Programmierer. Zur Motivierung zu qualitativ guter Arbeit soll ein leistungsabhängiges Gehalt in Abhängigkeit vom »Güteparameter« ζ_E des Programmierers gezahlt werden. Dazu sei der Güteparameter ζ_E mit einer relativen Genauigkeit von $\varepsilon_{rel} = 20\%$ und einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha_1 = \alpha_2 = 2\%$ für jeden Programmierer zu schätzen. Für wie viele Code-Zeilen müssten dazu von jedem der zu evaluierenden Programmierer in Abhängigkeit vom zu schätzenden Güteparameter ζ_E die entstandenen Fehler gezählt werden? Annahme: Fehleranzahl normalverteilt und keine Varianzerhöhung durch Abhängigkeiten bei der Fehlerentstehung ($\kappa = 1$).

Lösung 4.3

Ohne Varianzerhöhung ist die Varianz einer Zählverteilung $\sqrt{E[X]}$. Die obere und unter Grenze des wahrscheinlichen Bereichs betragen:

$$x_{\min} = \mathbb{E}[X] + \phi^{-1}(\alpha_1) \cdot \sqrt{\mathbb{E}[X]} = \mathbb{E}[X] - \phi^{-1}(1-\alpha_1) \cdot \sqrt{\mathbb{E}[X]}$$
$$x_{\max} = \mathbb{E}[X] + \phi^{-1}(1-\alpha_2) \cdot \sqrt{\mathbb{E}[X]}$$

Mit $\alpha_{1/2} = 2\%$ und $\frac{\mathbb{E}[X]-x_{\min}}{\mathbb{E}[X]} = \frac{x_{\max}-\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[X]} = \varepsilon_{\mathrm{rel}} = 20\%$ muss gelten:

$$\frac{\phi^{-1}(1-\alpha_1) \cdot \sqrt{\mathbb{E}[X]}}{E[X]} = \frac{\phi^{-1}(1-\alpha_2) \cdot \sqrt{\mathbb{E}[X]}}{\mathbb{E}[X]} = \varepsilon_{\mathrm{rel}}$$
$$\mathbb{E}[X] = \left(\frac{\phi^{-1}(1-\alpha_1)}{\varepsilon_{\mathrm{rel}}}\right)^2 = \left(\frac{2{,}05}{20\%}\right)^2 = 105$$

α	2,27%	0,13%	0	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
$\Phi^{-1}(1-\alpha)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

Die Anzahl der Code-Zeilen muss in Abhängigkeit vom zu schätzenden Güteparameter ζ_{E} so groß sein, dass der Erwartungswert mindestens 105 ist:

$$N \geq \frac{\mathbb{E}[X]}{\zeta_{\mathrm{E}}} = \frac{105}{1...10\%} = 1.050\ldots 10.500$$

Praktisch kann man auch solange Code-Zeilen und Fehler zählen, bis die 105 Fehler erreicht sind, und den Güteparameter für die einzelnen Mitarbeiter als Quotient von 105 und Zählwert der Code-Zeilen N_{EX}, die die 105 Fehler enthalten, bestimmen:

$$\zeta_{\mathrm{E}} = \frac{105}{N_{\mathrm{EX}}}$$

3 FF-Rate im Einsatz

3.3 Zu erwartende FF-Rate

Aufgabe 4.4: Fehler und FF

Eine Verdopplung der effektiven Testsatzlänge von einem Bezugswert n_0 auf $n_1 = 2 \cdot n_0$ hat die FF-Rate etwa auf ein Drittel reduziert.

a) Welche Verlängerung der effektiven Testsatzlänge gegenüber n_0 ist unter Annahme, dass die Nachweislänge für Fehler pareto-verteilt ist, erforderlich, um die FF-Rate auf 1/100 zu reduzieren?
b) Um welchen Faktor veringert sich die Anzahl der nicht beseitigten Fehler unter Nutzung der Ergebnisse aus Aufgabenteil a?
c) Angenommen, die Nachweislänge sein nicht pareto-, sondern exponentialverteilt, lässt sich dann der Skalenparameter der Verteilung aus den in der Aufgabe gegebenen Werten bestimmen und wenn ja, wie groß ist er?

Lösung 4.4c

Der Formfaktor k der Pareto-Verteilung ergibt sich aus dem Zusammenhang, dass die FF-Rate mit der effektiven Testsatzlänge mit dem Exponenten $k+1$ abnimmt:

$$\mathbb{E}[\zeta(n_1)] = \mathbb{E}[\zeta(n_0)] \cdot \left(\frac{n_1}{n_0}\right)^{-(k+1)}$$

Formfaktor der Pareto-Verteilung:

$$k = -\frac{\log\left(\frac{\mathbb{E}[\zeta(n_1)]}{\mathbb{E}[\zeta(n_0)]}\right)}{\log\left(\frac{n_1}{n_0}\right)} - 1 = -\frac{\log(1/3)}{\log(2)} - 1 = 0{,}585$$

Testverlängerung zur Reduzierung der FF-Rate auf 1/100:

$$n = n_0 \cdot \left(\frac{\mathbb{E}[\zeta(n)]}{\mathbb{E}[\zeta(n_0)]}\right)^{-\frac{1}{k+1}} = n_0 \cdot 0{,}01^{-\frac{1}{1{,}585}} = 18{,}3 \cdot n_0$$

Lösung 4.4b

Relative Abnahme der Anzahl der nicht beseitigten Fehler mit der effektiven Testsatzlänge auf:

$$\frac{\mathbb{E}\left[\#F_{\mathrm{TB}}\left(n\right)\right]}{\mathbb{E}\left[\#F_{\mathrm{TB}}\left(n_0\right)\right]} = \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-k} = 18{,}3^{-0{,}585} = 18{,}27\%\cdot$$

Lösung 4.4c

Exponentialverteilung für die Nachweislänge:

$$F_{N_i}\left(n\right) = \mathbb{P}\left[N_i \le n\right] = 1 - \mathrm{e}^{-\zeta\cdot n}$$

ist nach Aufgabe 4.1 gleichbedeutend damit, dass alle Fehler dieselbe FF-Rate ζ haben. Gesamte FF-Rate proportional zur Fehleranzahl:

$$\mathbb{E}\left[\zeta\left(n\right)\right] \sim \zeta\cdot\left(1 - F_{N_i}\left(n\right)\right) = \zeta\cdot\mathrm{e}^{-\zeta\cdot n}$$

Eine Verdopplung von n_1 auf $n_2 = 2\cdot n_1$ reduziert FF-Rate auf ein Drittel:

$$\frac{\zeta\cdot\left(1 - F_{N_i}\left(n_1\right)\right)}{\zeta\cdot\left(1 - F_{N_i}\left(n_0\right)\right)} = \frac{\mathrm{e}^{-\zeta\cdot n_1}}{\mathrm{e}^{-\zeta\cdot n_0}} = \mathrm{e}^{-\zeta\cdot(n_1 - n_0)} = \frac{1}{3}$$

Zur Abschätzung des Parameters ζ wird die Differen von $n_1 - n_0$ statt des gegebenen Quotienten $n_1/n_0 = 2$ benötigt. Der Skalenparameter ist mit den gegebenen Werte aus der Aufgabe nicht abschätzbar.

5 Ausfälle

5.2 Ausfallrate Hauptnutzungsphase

Aufgabe 4.5: Ausfallrate und mittlere Lebensdauer

Wie groß ist die mittlere Lebensdauer eines Rechners aus

- 30 Schaltkreisen mit einer Ausfallrate von 150 fit,
- 100 diskreten Bauteilen mit einer Ausfallrate von 30 fit und
- 500 Lötstellen mit einer Ausfallrate von 0,5 fit?

Lösung 4.5

Die Ausfallraten addieren sich. Gesamtausfallrate:

$$\lambda = 30\cdot 150\,\mathrm{fit} + 100\cdot 30\,\mathrm{fit} + 500\cdot 0{,}5\,\mathrm{fit} = 7750\,\mathrm{fit}$$

Zu erwartende (mittlere) Lebensdauer:

$$\begin{aligned} E\left[t_{\mathrm{L}}\right] &= \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{7750\cdot 10^{-9}\,\mathrm{h}^{-1}} \\ &= 129\cdot 10^{3}\,\mathrm{h} = 14{,}7\,\mathrm{Jahre} \end{aligned}$$

Aufgabe 4.6: Ausfall eines Transistors

Durch den Ausfall eines Tranistors in einem Schaltkreis steigt die FF-Rate eines Rechners von $\zeta_1 = 10^{-5}\,\frac{\text{FF}}{\text{SL}}$ auf $\zeta_2 = 10^{-4}\,\frac{\text{FF}}{\text{SL}}$.

a) Wie hoch ist die Zuverlässigkeit des Rechners vor und nach dem Ausfall des Transistors?

b) Welche FF-Rate verursacht der defekte Transistor?

a) Zuverlässigkeit als Kehrwert der FF-Rate:

- vor dem Ausfall:

$$Z_1 = \frac{1}{10^{-5}\,\frac{\text{FF}}{\text{SL}}} = 10^5\,\frac{\text{SL}}{\text{FF}}$$

- nach dem Ausfall:

$$Z_2 = \frac{1}{10^{-4}\,\frac{\text{FF}}{\text{SL}}} = 10^4\,\frac{\text{SL}}{\text{FF}}$$

b) FF-Rate des defekten Transistors:

$$\zeta_{\text{Tr}} = \zeta_2 - \zeta_1 = 9 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{FF}}{\text{SL}}$$

Aufgabe 4.7: Ausfallrate von Glühlampen

Von 10.000 Glühlampen waren am 19. Tag noch 9.600 Lampen funktionsfähig und an diesem Tag fielen 5 Lampen aus.

a) Wie hoch war die Ausfallrate im Mittel an den ersten 18 Tagen?

b) Wie hoch war die Ausfallrate am 19. Tag?

a) Mittlere Ausfallrate an den ersten 18 Tagen:

$$\begin{aligned}\lambda_{1-18} &= \frac{400\,\text{Ausfälle}}{10.000\,\text{Objekte} \cdot 18\,\text{Tage} \cdot 24\,\frac{\text{h}}{\text{Tag}}} \\ &= 9{,}26 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{Ausfälle}}{\text{h}} = 92.600\,\text{fit}\end{aligned}$$

b) Ausfallrate am 19 Tagen:

$$\lambda_{1-18} = \frac{5\,\text{Ausfälle}}{9.600\,\text{Objekte} \cdot 24\,\text{h}} = 2{,}17 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{Ausfälle}}{\text{h}} = 21.700\,\text{fit}$$

Die Ausfallrate nimmt offenbar in den betrachteten ersten Tagen der Nutzungsdauer noch ab. Frühphase.

Aufgabe 4.8: Dauerbetrieb oder Ausschalten

Das Netzteil eines Rechners habe im normalen Betrieb eine Ausfallrate $\lambda = 9000$ fit. Im ausgeschalteten Zustand sei die Ausfallrate 0. Bei einem Einschaltvorgang werden die Bauteile des Netzteils stärker belastet, so dass das Netzteil mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,01% ausfällt. Ab welcher Ausschaltdauer erhöht das Ausschalten die Überlebenswahrscheinlichkeit des Rechners?

Die gesuchte Ausschaltdauer t_{AD} ist die Zeit, ab der die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls im normalen Betrieb größer als die Ausfallwahrscheinlichkeit p_{ES} beim Einschalten ist:

$$\begin{aligned}1 - R(t_{\text{AD}}) &= 1 - e^{-\lambda \cdot t_{\text{AD}}} < p_{\text{ES}} \\ t_{\text{AD}} &> -\frac{\ln(1 - p_{\text{ES}})}{\lambda} = -\frac{\ln(1 - 0{,}01\%)}{9000 \cdot 10^{-9}\text{h}^{-1}} \approx 11\,\text{h}\end{aligned}$$

5.3 Voralterung

Aufgabe 4.9: Voralterung

a) Was ist Voralterung und wie erhöht sich durch sie die mittlere Lebensdauer der vorgealterten Objekte?

b) Ein Rechner wird zum Nutzungsbeginn einen Monat lang mit erhöhter Betriebsspannung und übertaktet betrieben. Mindert oder erhöht das die Ausfallrate innerhalb der nachfolgenden ein bis zwei Jahre[a]?

c) Verkürzt oder verlängert ein zeitlich begrenzter übertakteter Betrieb mit erhöhter Betriebsspannung die mittlere Lebensdauer?

---

[a] Die Ermügungsphase beginnt erst nach mehreren Jahren, in der Regel mit dem Austrocknen der Elektrolytkondensatoren in den Netzteilen.

a) Voralterung erhöht die Ausfallrate auch für die potentiellen Schwachstellen, die Frühausfälle verursachen. Die kränklichen Bauteile sterben und werden vor dem Einsatz ersetzt. Unter normalen Betriebsbedingungen ist die Ausfallrate vorgealterter Bauteile geringer und die mittlere Lebensdauer höher.

b) Der übertaktete Betrieb mit erhöhter Betriebsspannung ist eine Voralterung. Überleben tun die Systeme ohne Kinderkrankheiten. Die Ausfallrate innerhalb der nachfolgenden ein bis zwei Jahre ist unter Normalbedingungen geringer.

c) In der Hauptnutzungsphase erhöht sich während des übertakteten Betriebs mit erhöhter Betriebsspannung die Ausfallrate. Danach ist sie wieder normal. Wenn die Zeitintervalle der Übertaktung im Betrachtungsintervall liegen, verkürzt sich die Lebensdauer, sonst nicht. In jedem Fall verkürzt sich die Zeit, bis in der Ermüdungsphase die Ausfallrate wieder zunimmt.

5.4 Redundanz

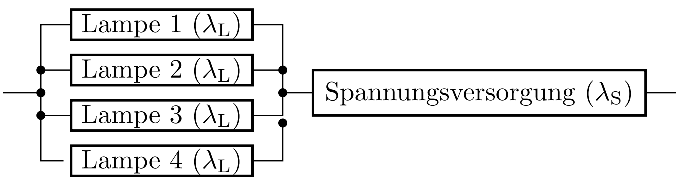
Aufgabe 4.10: Flurbeleuchtung

Die Flurbeleuchtung sei verfügbar, wenn mindestens eine von vier Lampen mit einer mittleren Lebensdauer von $\mathbb{E}[t_{\mathrm{LL}}] = 1.000\,\mathrm{h}$ und die Spannungsversorgung mit einer mittleren Lebensdauer $\mathbb{E}[t_{\mathrm{LS}}] = 10.000\,\mathrm{h}$ funktioniert.

a) Verfügbarkeitsplan?

b) Ausfallrate des Gesamtsystems?

a) Die Lampen bilden eine Paralleschaltung mit der Spannungsversorgung in Reihe:



Die drei nicht unbedingt erforderlichen Lampen bilden eine heiße Reserve.

b) Ausfallrate der Lampeneinheit:

$$\lambda_{\mathrm{Lges}} \approx \frac{\lambda_{\mathrm{L}}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1} \approx 0{,}48 \cdot \lambda_{\mathrm{L}}$$

Ausfallrate des Gesamtsystems:

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathrm{ges}} &\approx \frac{1}{\mathbb{E}\left[t_{\mathrm{LS}}\right]_{\mathrm{S}}} + 0{,}48 \cdot \lambda_{\mathrm{L}} \\ &= \frac{1}{E\left[t_{\mathrm{LS}}\right]} + 0{,}48 \cdot \frac{1}{E\left[t_{\mathrm{LL}}\right]} = 5{,}8 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{h}^{-1} = 5{,}8 \cdot 10^{5}\,\mathrm{fit}\end{aligned}$$

Aufgabe 4.11: Kalte und heiße Reserve

a) Wie hoch ist die mittlere Lebensdauer $\mathbb{E}\left[t_{\mathrm{L.ges}}\right]$ einer Lichterkette in Form einer Reihenschaltung aus 10 Lampen, wenn jede Lampe einzeln eine mittlere Lebensdauer von $\mathbb{E}\left[t_{\mathrm{LL}}\right] = 1000\,\mathrm{h}$ besitzt?

b) Auf welchen Wert erhöht sich die mittlere Lebensdauer, wenn eine zusätzliche kalte Reserve von 2 Ersatzlampen existiert, die zum Beanspruchungsbeginn noch funktionieren und die ersten zwei ausfallenden Lampen ersetzen?

a) Die Reihenschaltung von zehn Lampen hat die zehnfache Aufallrate und ein zehntel der zu erwartenden Lebensdauer einer Lampe:

$$\lambda_{\mathrm{L.ges}} = \frac{1}{\mathbb{E}\left[t_{\mathrm{L.ges}}\right]} = 10 \cdot \frac{1}{\mathbb{E}\left[t_{\mathrm{LL}}\right]};\ \mathbb{E}\left[t_{\mathrm{L.ges}}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[t_{\mathrm{L.L}}\right]}{10} = 100\,\mathrm{h}$$

b) Das Gesamtsystem mit zwei Lampen als kalte Reserve fällt aus, wenn dreimal eine von zehn Lampen ausgefallen ist. Die mittlere Lebensdauer verdreifacht sich:

$$\mathbb{E}\left[t_{\mathrm{L.2KR}}\right] = 3 \cdot \mathbb{E}\left[t_{\mathrm{L.ges}}\right] = 300\,\mathrm{h}$$

5.5 Wartung

Aufgabe 4.12: Überlebenswahrscheinlichkeit und Wartung

a) Wie groß ist die Überlebenswahrscheinlichkeit eines zum Zeitpunkt $t = 0$ funktionierenden Systems mit einer über die Zeit konstanten Ausfallraten von $\lambda = 1000\,\mathrm{fit}$ nach einer Nutzungsdauer von 100 Tagen?

b) Wie lang darf das Wartungsintervall τ maximal sein, damit die Überlebenswahrscheinlichkeit auf nicht weniger als 99,9% absinkt[a]?

[a] Wartung hier im Sinne von Test und Ersatz oder Repartur ausgefallener Systeme.

Lösung 4.12a

Überlebenswahrscheinlichkeit bei einer konstanten Ausfallrate:

$$\begin{aligned}\lambda &= -\frac{1}{R(t)} \cdot \frac{d\,R(t)}{dt} \\ R(t) &= e^{-\lambda \cdot t}\end{aligned}$$

Überlebenswahrscheinlichkeit nach $t = 100\,\mathrm{Tage} = 2400\,\mathrm{h}$ bei $\lambda = 1000\,\mathrm{fit} = 10^{-6}\,\frac{\mathrm{Ausfälle}}{\mathrm{h}}$:

$$R(t) = e^{-10^{-6}\,\frac{\mathrm{Ausfälle}}{\mathrm{h}} \cdot 2400\,\mathrm{h}} = 99{,}76\%$$

Lösung 4.12b

Wartungsintervall τ für $R(t = \tau) \geq 99{,}9\%$:

$$\tau \leq -\frac{\log(R(\tau))}{\lambda} = -\frac{\log(99{,}9\%)}{10^{-6}\,\mathrm{h}^{-1}} = 1.000\,\mathrm{h} = 41{,}7\,\mathrm{Tage}$$