Test und Verlässlichkeit
Grosse Übung zu Foliensatz 3

Prof. G. Kemnitz

Institut für Informatik, TU Clausthal (TV_GUeF3)

14. Mai 2020

Inhalt: Große Übungen zu Foliensatz 3

Grundlagen
1.2 Lineare Transformationen, ...
1.3 Verteilung von Zählwerten
Näherungen für ZV
2.1 Binomialverteilung
2.2 Poisson-Verteilung
2.3 Bereichschätz. Poisson
2.5 Bereichschätzung NVT
2.6 Varianzerhöhung
2.7 Bereichsschätz. Zählw.
Misch- und multimodale Verteilung
Weitere Verteilungen
4.1 Pareto-Verteilung

Grundlagen

Aufgabe 3.1: Erwartungswert, Varianz einer diskreten Verteilung

Gegeben ist die Verteilung in der nachfolgenden Tabelle:

Wert	5	6	8	11	22
Wahrscheinlichkeit	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Wie groß sind

a) Erwartungswert?

b) Varianz?

c) Standardabweichung?

Gegeben ist die Verteilung in der nachfolgenden Tabelle:

Wert	5	6	8	11	22
Wahrscheinlichkeit	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Wie groß sind

a) Erwartungswert?

a) Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[X] = 0{,}1 \cdot 5 + 0{,}2 \cdot 6 + 0{,}4 \cdot 8 + 0{,}2 \cdot 11 + 0{,}1 \cdot 22 = 9{,}3$$

Wert	5	6	8	11	22
Wahrscheinlichkeit	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Wie groß sind

b) Varianz?

c) Standardabweichung?

b) Varianz als mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[X\right] &= 0{,}1\cdot(5-9{,}3)^2+0{,}2\cdot(6-9{,}3)^2+0{,}4\cdot(8-9{,}3)^2\\ &+ 0{,}2\cdot(11-9{,}3)^2+0{,}1\cdot(22-9{,}3)^2=21{,}4\end{aligned}$$

Varianz nach Verschiebungssatz:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[X\right] &= 0{,}1\cdot 5^2+0{,}2\cdot 6^2+0{,}4\cdot 8^2+0{,}2\cdot 11^2\\ &+ 0{,}1\cdot 22^2-9{,}3^2=21{,}4\end{aligned}$$

c) Standardabweichung: $\mathrm{sd}\left[X\right]=\sqrt{\mathrm{Var}\left[X\right]}=\sqrt{21{,}4}=4{,}63$

Aufgabe 3.2: Erwartungswert, Varianz Datenstichprobe

Für eine Modellfehlermenge von 1000 Fehlern wurden für 10 verschiedene Zufallstestsätze derselben Länge die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler bestimmt:

Versuch i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ergebnis $\varphi_{\mathrm{NErk}.i}$	58	49	40	54	67	35	34	57	47	66

Schätzen Sie aus der Datenstichprobe.

a) Erwartungswert?

b) Varianz?

c) Standardabweichung?

Für eine Modellfehlermenge von 1000 Fehlern wurden für 10 verschiedene Zufallstestsätze derselben Länge die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler bestimmt:

Versuch i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ergebnis $\varphi_{\mathrm{NErk}.i}$	58	49	40	54	67	35	34	57	47	66

Schätzen Sie aus der Datenstichprobe.

a) Erwartungswert?

a) Erwartungswert:

$$\hat{\mathbb{E}}[X] = \bar{w} = \frac{1}{\#w} \cdot \sum_{i=1}^{\#w} w_i \quad = \quad \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$
$$= \quad 50{,}7$$

Für eine Modellfehlermenge von 1000 Fehlern wurden für 10 verschiedene Zufallstestsätze derselben Länge die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler bestimmt:

Versuch i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ergebnis $\varphi_{\mathrm{NErk}.i}$	58	49	40	54	67	35	34	57	47	66

Schätzen Sie aus der Datenstichprobe.

b) Varianz?

c) Standardabweichung?

b)Varianz:

$$\hat{\mathrm{Var}}[X] = \frac{1}{\#w - 1} \cdot \sum_{i=1}^{\#w} \left(w_i - \hat{\mathbb{E}}[X]\right)^2 = 140$$

c) Standardabweichung: $\hat{\mathrm{sd}}[X] = \sqrt{\hat{\mathrm{Var}}[X]} = \sqrt{140} = 11{,}8$

Lineare Transformationen, ...

Aufgabe 3.3: Varianz einer linearen Transformation

Kontrollieren Sie die Gleichungen für die Varianz einer linearen Transformation:

$$\mathrm{Var}\left[a\cdot X+b\right]=a^{2}\cdot\mathrm{Var}\left[X\right]$$

für eine diskrete Zufallsgröße X, die $\#X$ verschiedene Wert x_i annehmen kann.

Kontrollieren Sie die Gleichungen für die Varianz einer linearen Transformation:

$$\mathrm{Var}\left[a\cdot X+b\right]=a^2\cdot\mathrm{Var}\left[X\right]$$

für eine diskrete Zufallsgröße X, die $\#X$ verschiedene Wert x_i annehmen kann.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[X\right] &= \sum_{i=1}^{N} p_i\cdot\left(x_i-\mathbb{E}\left[X\right]\right)^2\\ \mathrm{Var}\left[a\cdot X+b\right] &= \sum_{i=1}^{N} p_i\cdot\left(a\cdot x_i+b-\left(a\cdot\mathbb{E}\left[X\right]+b\right)\right)^2\\ &= a^2\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{N} p_i\cdot\left(x_i-\mathbb{E}\left[X\right]\right)^2}_{\mathrm{Var}[X]}\ \surd\end{aligned}$$

Aufgabe 3.4: Beweis Varianz Summe

Zeigen Sie, dass die Varianz der Summe zweier Zufallsgrößen gleich der Summe der Varianzen plus der doppelten Kovarianz ist:

$$\operatorname{Var}[X+Y] = \operatorname{Var}[X] + \operatorname{Var}[Y] + 2\cdot\operatorname{Cov}[X,Y]$$

mit der Kovarianz:

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}[X,Y] &= \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}[X])\cdot(Y-\mathbb{E}[Y])\right)\\ &=\\ &= \sum_{i=1}^{N_\mathrm{x}}\left(\sum_{j=1}^{N_\mathrm{y}}(p_i\cdot p_j\cdot(x_i-\mathbb{E}[X])\cdot(y_i-\mathbb{E}[Y]))\right)\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Varianz der Summe zweier Zufallsgrößen gleich der Summe der Varianzen plus der doppelten Kovarianz ist:

$$\mathrm{Var}\left[X+Y\right] = \mathrm{Var}\left[X\right] + \mathrm{Var}\left[Y\right] + 2\cdot\mathrm{Cov}\left[X,Y\right]$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}\left[X+Y\right] = \ldots \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{N_\mathrm{x}} \left(\sum_{j=1}^{N_\mathrm{y}} \left(p_i\cdot p_j\cdot\left(x_i-\mathbb{E}\left[X\right]+y_i-\mathbb{E}\left[Y\right]\right)^2\right)\right) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{N_\mathrm{x}} \left(\sum_{j=1}^{N_\mathrm{y}} \left(p_i\cdot p_j\cdot\left(\left(x_i-\mathbb{E}\left[X\right]\right)^2+\left(y_i-\mathbb{E}\left[Y\right]\right)^2+2\cdot\left(x_i-\mathbb{E}\left[X\right]\right)\cdot\left(y_i-\mathbb{E}\left[Y\right]\right)\right)\right)\right) \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{N_\mathrm{x}} p_i\cdot\left(x_i-\mathbb{E}\left[X\right]\right)^2}_{\mathrm{Var}[X]}\cdot\underbrace{\sum_{j=1}^{N_\mathrm{y}} p_j}_{1} + \underbrace{\sum_{j=1}^{N_\mathrm{y}} p_j\cdot\left(y_j-\mathbb{E}\left[Y\right]\right)^2}_{\mathrm{Var}[Y]}\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{N_\mathrm{x}} p_i}_{1} \\
&+2\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{N_\mathrm{x}}\left(\sum_{j=1}^{N_\mathrm{y}}\left(p_i\cdot p_j\cdot\left(x_i-\mathbb{E}\left[X\right]\right)\cdot\left(y_i-\mathbb{E}\left[Y\right]\right)\right)\right)}_{\mathbb{E}((X-\mathbb{E}[X])\cdot(Y-\mathbb{E}[Y]))=\mathrm{Cov}[X,Y]}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.5: Erwartungswert und Varianz Summe

Drei Holzbausteine, die je eine zu erwartende Höhe von 3 cm mit einer Standardabweichung von 1 mm haben, werden zu einem Turm aufgeschichtet. Welchen Erwartungswert und welche Standardabweichung hat die Höhe des Turms? Die Höhen der Bausteine sollen nicht korrelieren (Kovarianz null).

$$E\left(h_{\text{ges}}\right) =$$

$$\sqrt{D^2\left(h_{\text{ges}}\right)} =$$

Drei Holzbausteine, die je eine zu erwartende Höhe von 3 cm mit einer Standardabweichung von 1 mm haben, werden zu einem Turm aufgeschichtet. Welchen Erwartungswert und welche Standardabweichung hat die Höhe des Turms? Die Höhen der Bausteine sollen nicht korrelieren (Kovarianz null).

Summe der Erwartungswerte:

$$\mathbb{E}\left[H_{\text{ges}}\right] = 3 \cdot 3\,\text{cm} = 9\,\text{cm}$$

Summe der Varianzen:

$$\text{Var}\left[H_{\text{ges}}\right] = 3 \cdot (1\,\text{mm})^2$$

Standardabweichung der Summe:

$$\text{sd}\left[H_{\text{ges}}\right] = \sqrt{\text{Var}\left[H_{\text{ges}}\right]} = \sqrt{3}\,\text{mm}$$

Verteilung von Zählwerten

Aufgabe 3.6: Verteilung der Fehleranzahl

Die Fehler $i = 1$ bis 5 mit folgenden Nachweiswahrscheinlichkeiten

Fehler	1	2	3	4	5
p_i	10%	20%	40%	50%	30%

seinen unabhängig voneinander nachweisbar. Berechnen Sie für die Anzahl der nachweisbaren Fehler

a) die Verteilung durch Ausfüllen der nachfolgenden Tabelle.

b) Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung.

Fehleranzahl	0	1	2	3	4	5
F1	90%	10%				
F1, F2			2%			
F1 bis F3				0,8%		
F1 bis F4						
F1 bis F5						

Die Fehler $i = 1$ bis 5 mit folgenden Nachweiswahrscheinlichkeiten

Fehler	1	2	3	4	5
p_i	10%	20%	40%	50%	30%

seinen unabhängig voneinander nachweisbar. Berechnen Sie für die Anzahl der nachweisbaren Fehler
a) die Verteilung durch Ausfüllen der nachfolgenden Tabelle.

Fehleranz.	0	1	2	3	4	5
F1	90%	10%				
F1, F2	72%	26%	2%			
F1 bis F3	43,2%	44,4%	11,6%	0,8%		
F1 bis F4	21,6%	43,8	28%	6,2%	0,4%	
F1 bis F5	15,12%	37,14%	32,74%	12,74%	2,14%	0,12%

Die Fehler $i = 1$ bis 5 mit folgenden Nachweiswahrscheinlichkeiten

Fehler	1	2	3	4	5
p_i	10%	20%	40%	50%	30%

seinen unabhängig voneinander nachweisbar. Berechnen Sie für die Anzahl der nachweisbaren Fehler
b) Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung.

Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\#X} p_i = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}5 + 0{,}3 = 1{,}5$$

Varianz:

$$\operatorname{Var}[X] = \sum_{i=1}^{\#X} p_i \cdot (1 - p_i) = 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}8 \cdot 0{,}2 \ \ldots$$

$$+ 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}95$$

Standardabweichung:

$$\operatorname{sd}[X] = \sqrt{\operatorname{Var}[X]} = 0{,}975$$

Näherungen für ZV

Binomialverteilung

Aufgabe 3.7: Annäherung der Zählverteilung durch eine Binomialverteilung

Annähern der Zählverteilung aus der Aufgabe zuvor durch eine Binomialverteilung mit $N=5$ und $p=\mathbb{E}[X]/N$.

a) Verteilung durch Ausfüllen der nachfolgenden Tabelle.

b) Varianz.

Mittlere Nachweiswahrscheinlichkeit: $p=$

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}[X=k]$	$(1-p)^5$	$5\cdot p\cdot(1-p)^4$	$10\cdot p^2\cdot(1-p)^3$	$10\cdot p^3\cdot(1-p)^2$
Zählvert.	16,81%	36,02%	30,87%	13,23%

Annähern der Zählverteilung aus der Aufgabe zuvor durch eine Binomialverteilung mit $N = 5$ und $p = \mathbb{E}[X]/N$.
a) Verteilung durch Ausfüllen der nachfolgenden Tabelle.
b) Varianz.

a) Verteilung:

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}[X = k]$	16,81%	36,02%	30,87%	13,23%	2,84%	0,24%

Zählverteilung aus der Aufgabe zuvor zum Vergleich:

$\mathbb{P}[X = k]$	15,12%	37,14%	32,74%	12,74%	2,14%	0,12%

b) Varianz:

$$\mathrm{Var}[X] = N \cdot p \cdot (1 - p) = 5 \cdot 0{,}3 \cdot (1 - 0{,}3) = 1{,}05$$

(Varianz der Zählverteilung 0,95)

Poisson-Verteilung

Aufgabe 3.8: Annäherung der Zählverteilung durch eine Poisson-Verteilung

Anzahl der Service-Anforderungen $n = 10^4$. Wahrscheinlichkeit einer Fehlfunktion je Service-Leistung sei $p_{\mathrm{FF}} = 10^{-5}$.
a) Erwartungswert der Anzahl der FF?
b) Wahrscheinlichkeit für 0, 1, 2 und > 2 Fehlfunktionen?

Erwartungswert: $\mathbb{E}[X] =$ $\frac{FF}{10000\,SL}$

keine FF: $\mathbb{P}[k = 0] =$

eine FF: $\mathbb{P}[k = 1] =$

zwei FF: $\mathbb{P}[k = 2] =$

mehr als zwei FF: $\mathbb{P}[k > 2] =$

Anzahl der Service-Anforderungen $n = 10^4$. Wahrscheinlichkeit einer Fehlfunktion je Service-Leistung sei $p_{\mathrm{FF}} = 10^{-5}$.
a) Erwartungswert der Anzahl der FF?
b) Wahrscheinlichkeit für 0, 1, 2 und > 2 Fehlfunktionen?

a) Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[X] = p_{\mathrm{FF}} \cdot 10^4 = 0{,}1\,\frac{FF}{1000\,SL}$$

b) keine FF:

$$\mathbb{P}[k=0] = e^{-\mathbb{E}[X]} = 90{,}48\%$$

eine FF:

$$\mathbb{P}[k=1] = e^{-\mathbb{E}[X]} \cdot \mathbb{E}[X] = 9{,}05\%$$

zwei FF:

$$\mathbb{P}[k=2] = e^{-\mathbb{E}[X]} \cdot \frac{\mathbb{E}[X]^2}{2} = 0{,}45\%$$

mehr als zwei FF:

$$\mathbb{P}[k>2] = 1 - 90{,}48\% - 9{,}05\% - 0{,}45\% = 0,015\%$$

Bereichschätz. Poisson

Aufgabe 3.9: Maskierungsanzahl

Bei der Überwachung von Service-Ergebnissen wird im Mittel eine von tausend Fehlfunktion (FF) nicht erkannt. Wie wahrscheinlich ist es, dass

a) von tausend FF keine unerkannt bleibt?
b) von tausend FF mehr als eine unerkannt bleibt?
c) von 5000 FF weniger als 3 unerkannt bleiben?
d) von 5000 FF mehr als 8 unerkannt bleiben?a)

$$\mathrm{Pois}\,(\lambda,\ \mathrm{x}) = \mathbb{P}\left[X \le x\right] = \sum_{k=0}^{k \le x} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

Bei der Überwachung von Service-Ergebnissen wird im Mittel eine von tausend Fehlfunktion (FF) nicht erkannt. Wie wahrscheinlich ist es, dass
a) von tausend FF keine unerkannt bleibt?
b) von tausend FF mehr als eine unerkannt bleibt?
a)

$$\mathrm{Pois}\left(\lambda,\ \mathrm{x}\right) = \mathbb{P}\left[X \leq x\right] = \sum_{k=0}^{k \leq x} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

a)

$$\mathrm{Pois}\left(1,\ 0\right) = e^{-1} = 36{,}8\%$$

b)

$$1 - \mathrm{Pois}\left(1,\ 1\right) = 1 - e^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{1}\right) = 26{,}4\%$$

Bei der Überwachung von Service-Ergebnissen wird im Mittel eine von tausend Fehlfunktion (FF) nicht erkannt. Wie wahrscheinlich ist es, dass
c) von 5000 FF weniger als 3 unerkannt bleiben?
d) von 5000 FF mehr als 8 unerkannt bleiben?a)

$$\mathrm{Pois}\left(\lambda,\ \mathrm{x}\right) = \mathbb{P}\left[X \le x\right] = \sum_{k=0}^{k \le x} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

c)

$$\mathrm{Pois}\left(5,\ 2\right) = e^{-5} \cdot \left(1 + \frac{5}{1} + \frac{5^2}{2!}\right) = 12{,}5\%$$

d)

$$1 - \mathrm{Pois}\left(5,\ 8\right) = 1 - e^{-5} \cdot \left(1 + \frac{5}{1} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!} + \frac{5^5}{5!} + \frac{5^6}{6!} + \frac{5^7}{7!} + \frac{5^8}{8!}\right)$$
$$= 6{,}81\%$$

Aufgabe 3.10: Schätzen der FF-Rate mit kleinen Zählwerten

Für $N = 10^6$ Service-Anforderungen wurden $x_{\mathrm{ist}} = 5$ FF gezählt. In welchen Bereich liegt die zu erwartende FF-Rate mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$?

Für $N = 10^6$ Service-Anforderungen wurden $x_{\mathrm{ist}} = 5$ FF gezählt. In welchen Bereich liegt die zu erwartende FF-Rate mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$?

$\alpha_1 = \alpha_2$	$k_{\mathrm{ist}} = 4$	$k_{\mathrm{ist}} = 5$	$k_{\mathrm{ist}} = 6$
0,5%	[1,08, 11,0]	[1,54, 12,6]	[2,04, 14,2]
1%	[1,28, 10,0]	[1,79, 11,6]	[2,33, 13,1]
2%	[1,53, 9,08]	[2,09, 10,6]	[2,68, 12,0]
10%	[2,43, 6,68]	[3,15, 7,99]	[3,89, 9,28]
20%	[3,09, 5,51]	[3,90, 6,73]	[4,73, 7,91]

Aus der Tabelle aus der Vorlesung ist für $k_{\mathrm{ist}} = 5$ für den Erwartungswert der Bereich $\lambda \in [1{,}79,\ 11{,}6]$ ablesbar. Das entspricht einer FF-Rate von

$$\zeta \in \left[1{,}79 \cdot 10^{-6},\ 11{,}6 \cdot 10^{-6}\right]$$

Bereichschätzung NVT

Aufgabe 3.11: Werkstück mit normalverteilter Masse

X— normalverteilte Masse eines Werkstücks. Erwartungswert $\mu = 1\,\mathrm{kg}$, Standardabweichung $\sigma = 10\,$g. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse X

a) größer als 1,03 kg ist?

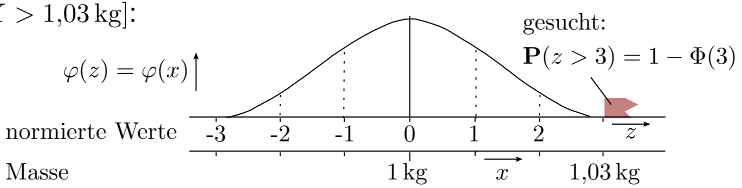
b) kleiner 9,98 kg oder größer 10,2 kg ist?

c) Für welchen symmetrischen Bereich kann mit Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$ garantiert werden?

X— normalverteilte Masse eines Werkstücks. Erwartungswert $\mu = 1\,\mathrm{kg}$, Standardabweichung $\sigma = 10\,$g. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse X

a) größer als 1,03 kg ist?

$\mathbb{P}\left[X > 1{,}03\,\mathrm{kg}\right]$:



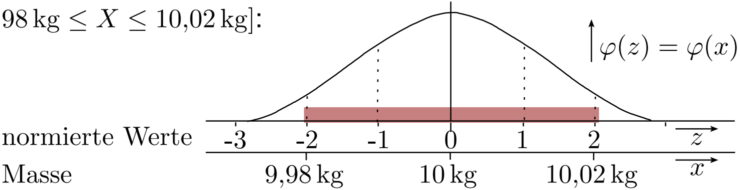
z	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

Gesuchte Wahrscheinlichkeit: $1 - \Phi\left(3\right) = 0{,}13\%$

X— normalverteilte Masse eines Werkstücks. Erwartungswert $\mu = 1\,\mathrm{kg}$, Standardabweichung $\sigma = 10\,$g. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse X

b) kleiner 9,98 kg oder größer 10,2 kg ist?

$\mathbb{P}\left[9{,}98\,\mathrm{kg} \le X \le 10{,}02\,\mathrm{kg}\right]$:



z	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

Gesuchte Wahrscheinlichkeit: $2 \cdot (1 - \Phi(2)) - 1 = 4{,}56\%$

X— normalverteilte Masse eines Werkstücks. Erwartungswert $\mu = 1\,\mathrm{kg}$, Standardabweichung $\sigma = 10\,$g. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse X

c) Für welchen symmetrischen Bereich kann mit Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$ garantiert werden?

Bereich von X bzw z, für den gilt:

$$\Phi\left(z_{\min} = \frac{X_{\min} - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(z_{\max} = \frac{X_{\max} - \mu}{\sigma}\right) = 1\%$$

α	2,27%	0,13%	0	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
$\Phi^{-1}(1-\alpha)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

Gesuchter Bereich: $z \in \mp 2{,}33 \Rightarrow X \in 1\,\mathrm{kg} \mp 23{,}3\,\mathrm{g}$,

Varianzerhöhung

Aufgabe 3.12: Effektive Fehleranzahl

Für eine Modellfehlermenge von 1000 Fehlern wurden für 10 verschiedene Zufallstestsätze derselben Länge die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler bestimmt:

Versuch i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ergebnis x_i	58	49	40	54	67	35	34	57	47	66

a) Schätzen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler.

b) Wie groß ist die Varianzerhöhung gegenüber einer Summe unabhängiger Zählwerte?

Für eine Modellfehlermenge von 1000 Fehlern wurden für 10 verschiedene Zufallstestsätze derselben Länge die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler bestimmt:

Versuch i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ergebnis x_i	58	49	40	54	67	35	34	57	47	66

a) Schätzen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler.

Erwartungswert:

$$\hat{\mathbb{E}}[X] \quad = \quad \bar{x} = \frac{1}{\#x} \cdot \sum_{i=1}^{\#x} x_i = 50{,}7$$

Varianz:

$$\hat{\mathrm{Var}}[X] = \frac{1}{\#x - 1} \cdot \sum_{i=1}^{\#x} \left(x_i - \hat{\mathbb{E}}[X]\right)^2 = 140$$

Für eine Modellfehlermenge von 1000 Fehlern wurden für 10 verschiedene Zufallstestsätze derselben Länge die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler bestimmt:

Versuch i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ergebnis x_i	58	49	40	54	67	35	34	57	47	66

b) Wie groß ist die Varianzerhöhung gegenüber einer Summe unabhängiger Zählwerte?

$$\hat{\kappa} = \frac{\hat{\operatorname{Var}}[X]}{\hat{\mathbb{E}}[X]} = \frac{140{,}01}{50{,}7} = 2{,}76$$

Die Varianz ist so hoch, als ob in der Modellfehler immer etwa drei Fehler identisch nachweisbar wären.

Bereichsschätz. Zählw.

Aufgabe 3.13: Maskierungswahrscheinlichkeit

Bei einer Überwachung wurden von $N = 1000$ Fehlfunktionen $x_{\text{ist}} = 178$ nicht erkannt. Zulässigen Irrtumswahrscheinlichkeiten $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}5\%$. Geringe Maskierungabhängigkeiten $(\kappa = 1{,}5)$. In welchem Bereich liegen der Erwartungswert der Anzahl der Maskierungen und die Maskierungswahrscheinlichkeit p?

Bei einer Überwachung wurden von $N = 1000$ Fehlfunktionen $x_{\text{ist}} = 178$ nicht erkannt. Zulässigen Irrtumswahrscheinlichkeiten $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}5\%$. Geringe Maskierungabhängigkeiten $(\kappa = 1{,}5)$. In welchem Bereich liegen der Erwartungswert der Anzahl der Maskierungen und die Maskierungswahrscheinlichkeit p?

Standardabweichung:

$$\text{sd}[X] \approx \sqrt{\kappa \cdot x_{\text{ist}}} = \sqrt{1{,}5 \cdot 178} = 16{,}3$$

α	2,27%	0,13%	0	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
$\Phi^{-1}(1-\alpha)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X]_{\text{UG}} &= x_{\text{ist}} - \text{sd}[X] \cdot \Phi^{-1}(1-\alpha_2) \\ &= 178 - 16{,}3 \cdot 2{,}57 = 136 \\ \mathbb{E}[X]_{\text{OG}} &= x_{\text{ist}} + \text{sd}[X] \cdot \Phi^{-1}(1-\alpha_1) \\ &= 178 + 16{,}3 \cdot 2{,}57 = 220\end{aligned}$$

Maskierungswahrscheinlichkeit:

$$p \in [13{,}6\%,\ 22\%]$$

Aufgabe 3.14: Erforderliche Zählwertgröße

Zur Abschätzung der Wahrscheinlichkeit p für ein Service-Versagen wurden für $N = 10^6$ Service-Anforderungen $x_{\text{ist}} = 441$ FF gezählt. Keine Abhängigkeiten $\kappa = 1$.

a) Wie groß sind die Irrtumswahrscheinlichkeit α_1 und α_2, dass ζ außerhalb eines Intervalls $\frac{x_{\text{ist}}}{N} \cdot (1 \pm 10\%)$ liegt?

b) Mit wie vielen Service-Anforderungen ist die Überprüfung fortzusetzen, um die Irrtumswahrscheinlichkeit auf $\alpha_1 = \alpha_2 \leq 1\%$ abzusenken?

Zur Abschätzung der Wahrscheinlichkeit p für ein Service-Versagen wurden für $N = 10^6$ Service-Anforderungen $x_{\text{ist}} = 441$ FF gezählt. Keine Abhängigkeiten $\kappa = 1$.

a) Wie groß sind die Irrtumswahrscheinlichkeit α_1 und α_2, dass ζ außerhalb eines Intervalls $\frac{x_{\text{ist}}}{N} \cdot (1 \pm 10\%)$ liegt?

$$\alpha_2 = 1 - \Phi\left(\frac{x_{\text{ist}} - \mathbb{E}[X]_{\text{UG}}}{\text{sd}[X]}\right)$$

$$\alpha_1 = 1 - \Phi\left(\frac{\mathbb{E}[X]_{\text{OG}} - x_{\text{ist}}}{\text{sd}[X]}\right)$$

mit

$$x_{\text{ist}} - \mathbb{E}[X]_{\text{UG}} = \mathbb{E}[X]_{\text{OG}} - x_{\text{ist}} = 0{,}1 \cdot x_{\text{ist}}$$

$$\text{sd}[X] \approx \sqrt{x_{\text{ist}}}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1 - \Phi\left(\frac{0{,}1 \cdot x_{\text{ist}}}{\sqrt{x_{\text{ist}}}}\right)$$

$$= \Phi(2{,}1) = 1{,}79\%$$

z	...,0	...,1
1,...	0,8413	0,8643
2,...	0,9772	0,9821
3,...	0,9987	0,9990

Zur Abschätzung der Wahrscheinlichkeit p für ein Service-Versagen wurden für $N = 10^6$ Service-Anforderungen $x_{\text{ist}} = 441$ FF gezählt. Keine Abhängigkeiten $\kappa = 1$.

b) Mit wie vielen Service-Anforderungen ist die Überprüfung fortzusetzen, um die Irrtumswahrscheinlichkeit auf $\alpha_1 = \alpha_2 \leq 1\%$ abzusenken?

α	2,27%	0,13%	0	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
$\Phi^{-1}(1-\alpha)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

Erhöhung der Anzahl der Service-Anforderungen, bis

$$1 - \Phi\left(\frac{0{,}1 \cdot x_{\text{ist.1}}}{\sqrt{x_{\text{ist.1}}}}\right) \leq 1\%$$

$$0{,}1 \cdot \sqrt{x_{\text{ist.1}}} \geq \Phi^{-1}(1-1\%) = 2{,}33$$

$$x_{\text{ist.1}} \geq \left(10 \cdot \Phi^{-1}(1-1\%)\right)^2 = 543$$

Zur Abschätzung der Wahrscheinlichkeit p für ein Service-Versagen wurden für $N = 10^6$ Service-Anforderungen $x_{\text{ist}} = 441$ FF gezählt. Keine Abhängigkeiten $\kappa = 1$.

$$x_{\text{ist.1}} \geq \left(10 \cdot \Phi^{-1}\left(1 - 1\%\right)\right)^2 = 543$$

auf etwa:

$$N_1 = N \cdot \frac{543}{441} = 1{,}231 \cdot 10^6$$

d.h. um $2{,}31 \cdot 10^5$ Service-Anforderungen.

Aufgabe 3.15: Mindestmodellfehleranzahl

Wie groß muss die Modellfehleranzahl N unter Vernachlässigung von Nachweisabhängigkeiten $(\kappa = 1)$ mindestens sein und wie viele Fehler davon muss der Test nachweisen, um mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha \leq 2\%$ für eine Modellfehlerüberdeckung im Bereich von $FC = 99\% \mp 0{,}4\%$ garantieren zu können?

Wie groß muss die Modellfehleranzahl N unter Vernachlässigung von Nachweisabhängigkeiten $(\kappa = 1)$ mindestens sein und wie viele Fehler davon muss der Test nachweisen, um mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha \leq 2\%$ für eine Modellfehlerüberdeckung im Bereich von $FC = 99\% \mp 0{,}4\%$ garantieren zu können?

In Anlehnung an die Aufgabe zuvor:

$$\alpha_2 = 1 - \Phi\left(\frac{N \cdot (99\% - 98{,}6\%)}{\mathrm{sd}\left[X\right]}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{N \cdot 0{,}4\%}{\mathrm{sd}\left[X\right]}\right) \leq \frac{\alpha}{2}$$

$$\alpha_1 = \Phi\left(\frac{N \cdot (99{,}4\% - 99\%)}{\mathrm{sd}\left[X\right]}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{N \cdot 0{,}4\%}{\mathrm{sd}\left[X\right]}\right) \leq \frac{\alpha}{2}$$

$$N \geq \frac{\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \mathrm{sd}\left[X\right]}{0,4\%}$$

$$\mathrm{sd}\left[X\right] \leq \max\left(\sqrt{N \cdot 98{,}6\% \cdot (1 - 98{,}6\%)},\ \sqrt{N \cdot 99{,}4\% \cdot (1 - 99{,}4\%)}\right)$$

$$= \sqrt{N \cdot 98{,}6\% \cdot (1 - 98{,}6\%)} = 11{,}75\% \cdot \sqrt{N}$$

$$N = \frac{\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot 11{,}75\% \cdot \sqrt{N}}{0,4\%}$$

Wie groß muss die Modellfehleranzahl N unter Vernachlässigung von Nachweisabhängigkeiten $(\kappa = 1)$ mindestens sein und wie viele Fehler davon muss der Test nachweisen, um mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha \leq 2\%$ für eine Modellfehlerüberdeckung im Bereich von $FC = 99\% \mp 0{,}4\%$ garantieren zu können?

$$N \geq \frac{\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot 11{,}75\% \cdot \sqrt{N}}{0{,}4\%}$$

$$\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha=2\%}{2}\right) = 2{,}33$$

$$N \geq \left(\frac{2{,}33\cdot 11{,}75\%}{0{,}4\%}\right)^2 = 4685$$

α	2,27%	0,13%	0	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
$\Phi^{-1}(1-\alpha)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

Es müssen 4685 unabhängig voneiander nachweisbare Modellfehler simuliert werden, bei Nachweisabhängigkeiten κ-mal so viele, von denen der Test 99% nachweisen muss.

Misch- und multimodale Verteilung

Aufgabe 3.16: Verteilung der Widerstandswerte

In eine Kiste für 1kΩ-Widerstände wurde

- 500 Widerstände mit normalverteiltem Widerstandswert, Erwartungswert 1,02 kΩ und Standardabweichung 10 Ω und
- 300 Widerstände mit normalverteiltem Widerstandswert, Erwartungswert 9,99 kΩ und Standardabweichung 15 Ω

gemischt. Welche Verteilung haben die Widerstandswerte bei zufälliger Entnahme aus der Kiste?

Beschreibung mit Hilfe der standardisierten Normalverteilung $\Phi(z)$.

$$F_{\mathrm{X}}(R) = \mathbb{P}[X \leq R] =$$

In eine Kiste für 1kΩ-Widerstände wurde

- 500 Widerstände mit normalverteiltem Widerstandswert, Erwartungswert 1,02 kΩ und Standardabweichung 10 Ω und
- 300 Widerstände mit normalverteiltem Widerstandswert, Erwartungswert 9,99 kΩ und Standardabweichung 15 Ω

gemischt. Welche Verteilung haben die Widerstandswerte bei zufälliger Entnahme aus der Kiste?

Beschreibung mit Hilfe der standardisierten Normalverteilung $\Phi(z)$.

$$F_{\mathrm{X}}(R) = \frac{500}{800} \cdot \Phi\left(\frac{R - 1,02\,\mathrm{k}\Omega}{10\,\Omega}\right) + \frac{300}{800} \cdot \Phi\left(\frac{R - 0,99\,\mathrm{k}\Omega}{15\,\Omega}\right)$$

Aufgabe 3.17: Bereichsschätzung Kapazitätswerte

Gegeben ist eine Stichprobe gemessener Kapazitätswerte in nF:

$$C: \ 1{,}20,\ 1{,}23,\ 1{,}18,\ 1{,}25,\ 1{,}21,\ 1{,}19,\ 1{,}23,\ 1{,}22,\ 1{,}09,\ 1{,}17$$

Gesucht ist der Bereich, in dem der Erwartungswert liegen kann.
Zulässige Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 2\%$

a) Erwartungswert und Standardabweichung der Datenstichprobe?

b) Bereich, wenn die Kapazitätswerte normalverteilt sind?

c) Bereich nach der tschebyscheffschen Ungleichung

$$\alpha \leq \mathrm{Var}\left[X\right]/\varepsilon^2$$

d.h. ohne Annahmen über die Verteilung der Kapazitätswerte ?

Gegeben ist eine Stichprobe gemessener Kapazitätswerte in nF:

$$C: \text{ 1,20, 1,23, 1,18, 1,25, 1,21, 1,19, 1,23, 1,22, 1,09, 1,17}$$

Gesucht ist der Bereich, in dem der Erwartungswert liegen kann.
Zulässige Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 2\%$

a) Erwartungswert und Standardabweichung der Datenstichprobe?

Erwartungswert der Datenstichprobe:

$$\hat{\mathbb{E}}[C] = \frac{1}{10} \cdot (1,20 + 1,23 + 1,18 + 1,25 + 1,21 + 1,19 + 1,23 + 1,22 + 1,09 + 1,17) = 1{,}17$$

Standardabweichung der Datenstichprobe:

$$\hat{\mathrm{sd}}[C] = \sqrt{\frac{(1,20 - 1,179)^2 + (1,23 - 1,179)^2 + \dots}{9}} = 0,0450$$

Gegeben ist eine Stichprobe gemessener Kapazitätswerte in nF:

$$C\,:\; 1{,}20,\, 1{,}23,\, 1{,}18,\, 1{,}25,\, 1{,}21,\, 1{,}19,\, 1{,}23,\, 1{,}22,\, 1{,}09,\, 1{,}17$$

Gesucht ist der Bereich, in dem der Erwartungswert liegen kann. Zulässige Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 2\%$

b) Bereich, wenn die Kapazitätswerte normalverteilt sind?

... $\hat{\mathbb{E}}\left[C\right] = 1{,}17$; $\hat{\mathrm{sd}}\left[C\right] = 0,0450$

α	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
$\Phi^{-1}\left(1-\alpha\right)$	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[C\right] &\in \hat{\mathbb{E}}\left[C\right] \mp \hat{\mathrm{sd}}\left[C\right]\cdot\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}=1\%\right)\\ &= 1{,}17 \mp 0,0450\cdot 2{,}33\\ &= \left[1{,}065,\ 1{,}275\right]\end{aligned}$$

Gegeben ist eine Stichprobe gemessener Kapazitätswerte in nF:

$$C:\ 1{,}20,\ 1{,}23,\ 1{,}18,\ 1{,}25,\ 1{,}21,\ 1{,}19,\ 1{,}23,\ 1{,}22,\ 1{,}09,\ 1{,}17$$

Gesucht ist der Bereich, in dem der Erwartungswert liegen kann.
Zulässige Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 2\%$

c) Bereich nach der tschebyscheffschen Ungleichung

$$\alpha \leq \mathrm{Var}\left[X\right]/\varepsilon^2$$

d.h. ohne Annahmen über die Verteilung der Kapazitätswerte ?

... $\hat{\mathbb{E}}\left[C\right] = 1{,}17$; $\hat{\mathrm{sd}}\left[C\right] = 0,0450$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[C\right] &\in \hat{\mathbb{E}}\left[C\right] \mp \frac{\hat{\mathrm{sd}}\left[C\right]}{\sqrt{\alpha}}\\ &= 1{,}17 \mp \frac{0{,}0540}{\sqrt{2\%}}\\ &= \left[0{,}861,\ 1{,}497\right]\end{aligned}$$

Weitere Verteilungen

Pareto-Verteilung

Aufgabe 3.18: Verteilung von Schadenskosten

Die erheblichen Schäden durch autonomer Fahrzeuge ab $x_{\mathrm{min}} = 10.000$ Eur sei so pareto-verteilt, dass $U = 15\%$ der Schadensfälle $W = 90\%$ der Gesamtschadenskosten verursachen.

a) Welchen Formfaktor k hat die Pareto-Verteilung?

b) Ab welcher Schadenshöhe zählt ein Schadensfall zu den 15%, die die 90% Gesamtschadenskosten verursachen?

Die erheblichen Schäden durch autonomer Fahrzeuge ab $x_{\min} = 10.000$ Eur sei so pareto-verteilt, dass $U = 15\%$ der Schadensfälle $W = 90\%$ der Gesamtschadenskosten verursachen.

a) Welchen Formfaktor k hat die Pareto-Verteilung?

b) Ab welcher Schadenshöhe zählt ein Schadensfall zu den 15%, die die 90% Gesamtschadenskosten verursachen?

a) Formfaktor:Der Anteil der Ursachen U mit der größten Wirkung:

$$U = \int_{w_{\min}}^{\infty} f(x) \cdot \mathrm{d}x = \int_{u}^{\infty} \frac{k \cdot x_{\min}^{k}}{x^{k+1}} \cdot \mathrm{d}x = \left(\frac{x_{\min}}{w_{\min}}\right)^{k}$$

haben mindestens die Wirkung:

$$w_{\min} = x_{\min} \cdot U^{-\frac{1}{k}}$$

die zu erwartende Gesamtwirkung:

$$W = E\left[X \middle| X > w_{\min}\right] = \int_{w_{\min}}^{\infty} \frac{k \cdot x_{\min}^{k}}{x^{k+1}} \cdot x \cdot \mathrm{d}x$$

$$= \frac{k}{k-1} \cdot x_{\min} \cdot \left(\frac{x_{\min}}{w_{\min}}\right)^{k-1} = \mathbb{E}\left[X\right] \cdot U^{\frac{k-1}{k}}$$

Aufgabe 3.19: Verteilung der mittleren Nachweislänge

Gegeben sind die mittleren Nachweislängen für 24 Modellfehler:

```
x = [10 11 13 15 17 18 21 24 29  31 33 37 40 ...
     52 67 70 83 110 185 217 290 420 850 1730 5870];
```

Daraus sollen die Parameter k einer Parato-Verteilung

$$F_N(n) = P[N \leq n] \approx 1 - \left(\frac{10}{n}\right)^k$$

für die mittlere Nachweislänge N angeschätzt werden.

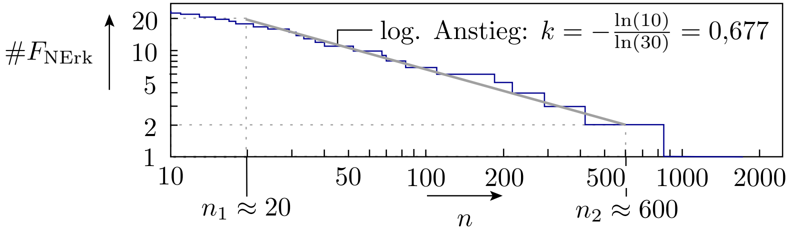
a) Stellen Sie die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler $\#F_{\mathrm{NErk}}$ als Funktion der Nachweislänge n mit doppelt logarithmischer Achsenteilung dar.

b) Legen Sie eine Ausgleichsgerade in die Graphik und bestimmen Sie aus der Geradengleichung k.

```
x = [10 11 13 15 17 18 21 24 29  31 33 37 40 ...
    52 67 70 83 110 185 217 290 420 850 1730 5870];
```

a) Stellen Sie die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler $\#F_{\mathrm{NErk}}$ als Funktion der Nachweislänge n mit doppelt logarithmischer Achsenteilung dar.

b) Legen Sie eine Ausgleichsgerade in die Graphik und bestimmen Sie aus der Geradengleichung k.



Parato-Verteilung: $k = 0{,}677$