



# Test und Verlässlichkeit

## Grosse Übung zu Foliensatz 2

Prof. G. Kemnitz

Institut für Informatik, TU Clausthal (TV\_GUeF2)

29. April 2020



# Inhalt: Große Übungen zu Foliensatz 2

## Wahrscheinlichkeit

- 1.2 Verkettete Ereignisse
- 1.3 Bedingte Wahrscheinl.
- 1.4 Fehlerbaumanalyse
- 1.5 Markov-Ketten

## Fehlernachweisw.

- 2.1 Ohne Gedächtnis
- 2.2 Mit Gedächtnis

## Fehlerbeseitigungsw.

- 3.3 Ersatziteration
- 3.4 Reparaturiteration



# Wahrscheinlichkeit



# Verkettete Ereignisse



## Aufgabe 2.1: Würfelexperiment

$X$  und  $Y$  seien die zufälligen Augenzahlen bei der Durchführung des Versuchs »würfeln mit zwei Würfeln«:

- a)  $X + Y > 8$
- b)  $X > Y$
- c)  $(X = 5) \wedge (Y < 5)$
- d)  $X \cdot Y$  ist durch drei teilbar

Bestimmen Sie jeweils

- die möglichen Ergebnisse und deren Anzahl,
- die günstigen Ergebnisse und deren Anzahl,
- die Wahrscheinlichkeit bei gleicher Auftrittshäufigkeit aller möglichen Ergebnisse.



$X$  und  $Y$  seien die zufälligen Augenzahlen bei der Durchführung des Versuchs »würfeln mit zwei Würfeln«:

a)  $X + Y > 8$

- Anzahl der Möglichkeiten:
- günstig:
- Anzahl günstig:
- Wahrscheinlichkeit:

b)  $X > Y$

- Anzahl der Möglichkeiten:
- günstig:
- Anzahl günstig:
- Wahrscheinlichkeit:



$X$  und  $Y$  seien die zufälligen Augenzahlen bei der Durchführung des Versuchs »würfeln mit zwei Würfeln«:

a)  $X + Y > 8$

- Anzahl der Möglichkeiten: 36
- günstig: 3+6, 4+5, 4+6, 5+4, bis 5+6, 6+3 bis 6+6
- Anzahl günstig:  $1+2+3+4=10$
- Wahrscheinlichkeit:  $10/36$

b)  $X > Y$

- Anzahl der Möglichkeiten: 36
- günstig:  $2>1$ ,  $3>1$ ,  $3>2$ ,  $4>1$  bis  $4>3$ ,  $5>1$  bis  $5>4$ ,  $6>1$  bis  $6>5$
- Anzahl günstig:  $1+2+3+4+5=15$
- Wahrscheinlichkeit:  $15/36$



$X$  und  $Y$  seien die zufälligen Augenzahlen bei der Durchführung des Versuchs »würfeln mit zwei Würfeln«:

c)  $(X = 5) \wedge (Y < 5)$

- Anzahl der Möglichkeiten:
- günstig:
- Anzahl günstig:
- Wahrscheinlichkeit:

d)  $X \cdot Y$  ist durch drei teilbar

- Anzahl der Möglichkeiten:
- günstig:
- Anzahl günstig:
- Wahrscheinlichkeit:



$X$  und  $Y$  seien die zufälligen Augenzahlen bei der Durchführung des Versuchs »würfeln mit zwei Würfeln«:

c)  $(X = 5) \wedge (Y < 5)$

- Anzahl der Möglichkeiten: 36
- günstig: (5,1) bis (5,4)
- Anzahl günstig: 4
- Wahrscheinlichkeit: 4/36

d)  $X \cdot Y$  ist durch drei teilbar

- Anzahl der Möglichkeiten: 36
- günstig: (3,1) bis (3,6), (1,3), (2,3), (4,3), (5,3), (6,1) bis (6,6), (1,6), (2,6), (4,6), (5,6)
- Anzahl günstig: 20
- Wahrscheinlichkeit: 20/36



## Aufgabe 2.2: Verkettete Würfelereignisse

- a) Welche möglichen Ergebnisse hat das Zufallsexperiment »auswürfeln einer Zahl, bei einer Sechs darf ein zweites Mal gewürfelt werden«?
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt jedes der möglichen Ergebnisse ein?



- a) Welche möglichen Ergebnisse hat das Zufallsexperiment »auswürfeln einer Zahl, bei einer Sechs darf ein zweites Mal gewürfelt werden«?
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt jedes der möglichen Ergebnisse ein?

mögliche Ergebnisse	Wahrscheinlichkeit
1 bis 5,	$6^{-1}$
6+1 bis 6+5	$6^{-2}$
6+6+1 bis 6+6+5	$6^{-3}$
...	...

Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Möglichkeiten:

$$\frac{5}{6} + \frac{5}{6^2} + \frac{5}{6^3} + \dots = 5 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} 6^{-i} = 5 \cdot \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = 1 \checkmark$$



## Aufgabe 2.3: Fehlfunktionen durch Fehler

Ein System habe vier Fehler, die unabhängig von einander mit den Wahrscheinlichkeiten  $p_1 = 10\%$ ,  $p_2 = 20\%$ ,  $p_3 = 5\%$  und  $p_4 = 1\%$  eine Fehlfunktion je Service-Leistung verursachen.

- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit  $p_{\text{FFF}}$  einer durch Fehler verursachten Fehlfunktion je SL?
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass zehn Service-Leistungen korrekt ausgeführt werden?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für jeden der vier Fehler, dass er bei mindestens einer der zehn SL eine FF verursacht?



Ein System habe vier Fehler, die unabhängig von einander mit den Wahrscheinlichkeiten  $p_1 = 10\%$ ,  $p_2 = 20\%$ ,  $p_3 = 5\%$  und  $p_4 = 1\%$  eine Fehlfunktion je Service-Leistung verursachen.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit  $p_{\text{FFF}}$  einer durch Fehler verursachten Fehlfunktion je SL?

- Basisereignisse  $A_i$ : Fehlfunktion bei einer SL verursacht durch Fehler  $i$ ,  $\mathbb{P}[A_i] = p_i$
- Ereignis  $A$  (Versagen durch einen von vier Fehlern):

$$\begin{aligned} A &= A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee A_4 \\ A &= \overline{\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3} \overline{A_4}} \end{aligned}$$

- Wahrscheinlichkeit von  $A$ :

$$\begin{aligned} p_{\text{FFF}} = \mathbb{P}(A) &= 1 - \prod_{i=1}^4 (1 - p_i) \\ &= 1 - 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,95 \cdot 0,99 = 23,3\% \end{aligned}$$



Ein System habe vier Fehler, die unabhängig von einander mit den Wahrscheinlichkeiten  $p_1 = 10\%$ ,  $p_2 = 20\%$ ,  $p_3 = 5\%$  und  $p_4 = 1\%$  eine Fehlfunktion je Service-Leistung verursachen.

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass zehn Service-Leistungen korrekt ausgeführt werden?

- Basisereignisse  $A_i$ : Versagen bei SL  $i$ ,  $\mathbb{P}[A_i] = p_{\text{FFF}}$
- Ereignis  $B$  (Kein Versagen bei SL 1 bis 10):

$$B = \bar{A}_1 \wedge \bar{A}_2 \wedge \dots \wedge \bar{A}_{10}$$

- Wahrscheinlichkeit von  $B$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \prod_{i=1}^{10} (1 - p_{\text{FFF}}) \\ &= (1 - 23,3\%)^{10} = 2\%\end{aligned}$$



Ein System habe vier Fehler, die unabhängig von einander mit den Wahrscheinlichkeiten  $p_1 = 10\%$ ,  $p_2 = 20\%$ ,  $p_3 = 5\%$  und  $p_4 = 1\%$  eine Fehlfunktion je Service-Leistung verursachen.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für jeden der vier Fehler, dass er bei mindestens einer der zehn SL eine FF verursacht?

- Basisereignisse  $A_{ij}$ : FF durch Fehler  $i$  in SL  $j$ ,  $\mathbb{P}[A_{ij}] = p_i$
- Ereignis  $C_i$  (FF durch Fehler  $i$  bei mindestens eine der 10 SL):

$$\begin{aligned} C_i &= A_{i.1} \vee A_{i.2} \vee \dots \vee A_{i.10} \\ &= \overline{A_{i.1}} \overline{A_{i.2}} \dots \overline{A_{i.10}} \\ \mathbb{P}(C_i) &= 1 - \prod_{i=1}^{10} (1 - p_i) = 1 - (1 - p_i)^{10} \end{aligned}$$

$p_i$	10%	20%	5%	1%
$\mathbb{P}(C_i)$	65,1%	89,3%	40,1%	9,6%



## Bedingte Wahrscheinl.



## Aufgabe 2.4: Gewichteter Zufallstest

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein 8-Bit-Vektor für eine Service-Anfrage an eine Schaltung mit dem Wert  $x = "11111110"$  angefordert wird, wenn

- unabhängig voneinander für jedes Bit mit einer Wahrscheinlichkeit von  $g = 50\%$  zufällig eine Eins und sonst eine Null gewählt wird?
- unabhängig voneinander für jedes Bit mit einer Wahrscheinlichkeit von  $g = 60\%$  zufällig eine Eins und sonst eine Null gewählt wird?
- Dasselbe wie in den Aufgabenteilen zuvor, nur dass für die höchstwertigen vier Bits immer derselben Zufallswert ausgewählt wird.

Die Wahrscheinlichkeit  $g$  wird auch als Wichtung der Bitstelle bezeichnet. Bitweise Wichtung wird beim Test digitaler Schaltungen eingesetzt, um die Nachweiswahrscheinlichkeiten sehr schlecht nachweisbarer Fehler zu erhöhen.



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein 8-Bit-Vektor für eine Service-Anfrage an eine Schaltung mit dem Wert  $\mathbf{x} = "11111110"$  angefordert wird, wenn

- unabhängig voneinander für jedes Bit mit einer Wahrscheinlichkeit von  $g = 50\%$  zufällig eine Eins und sonst eine Null gewählt wird?
- unabhängig voneinander für jedes Bit mit einer Wahrscheinlichkeit von  $g = 60\%$  zufällig eine Eins und sonst eine Null gewählt wird?

Definieren von Ereignissen  $G_i$ , dass für Bit  $i$  eine Eins ausgewählt wird. Für die beiden ersten Aufgabenteile gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = "11111110" &= G_7 \wedge G_6 \wedge G_5 \wedge G_4 \wedge G_3 \wedge G_2 \wedge G_1 \wedge \bar{G}_0 \\ P(\mathbf{x} = "11111110") &= g^7 \cdot (1 - g) \end{aligned}$$

$g$	50%	60%
$G_4$ bis $G_7$ unabhängig	$2^{-8} \approx 0,4\%$	$0,6^7 \cdot 0,4 = 1\%$



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein 8-Bit-Vektor für eine Service-Anfrage an eine Schaltung mit dem Wert  $\mathbf{x} = "11111110"$  angefordert wird, wenn

c) Dasselbe wie in den Aufgabenteilen zuvor, nur dass für die höchstwertigen vier Bits immer derselben Zufallswert ausgewählt wird.

Für  $G_7 = G_6 = G_5 = G_4$  gilt:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} = "11111110" &= G_4 \wedge G_3 \wedge G_2 \wedge G_1 \wedge \bar{G}_0 \\ P(\mathbf{x} = "11111110") &= g^4 \cdot (1 - g)\end{aligned}$$

$g$	50%	60%
$G_4$ bis $G_7$ unabhängig	$2^{-8} \approx 0,4\%$	$0,6^7 \cdot 0,4 = 1\%$
$G_7 = G_6 = G_5 = G_4$	$2^{-5} \approx 3\%$	$0,6^4 \cdot 0,4 = 5\%$



# Fehlerbaumanalyse



## Aufgabe 2.5: Fehlerbaumanalyse

Ereignis  $F_1$  tritt ein, wenn entweder  $B_1$  und nicht  $B_2$  oder nicht  $B_1$  und  $B_2$  eintritt. Das Ereignis  $F_2$  tritt nur ein, wenn  $F_1$  und  $B_3$  eintreten.

Wahrscheinlichkeiten der Basisereignisse  $B_1$  bis  $B_3$ :  $p_{B1} = 2\%$ ,  $p_{B2} = 10\%$  und  $p_{B3} = 5\%$ .

- Beschreibung als Fehlerbaum?
- Wahrscheinlichkeit für  $F_1$  und  $F_2$ ?

B1

$$p_{B1} = 2\%$$

B2

$$p_{B2} = 10\%$$

B3

$$p_{B3} = 5\%$$

$$p_{F1} =$$

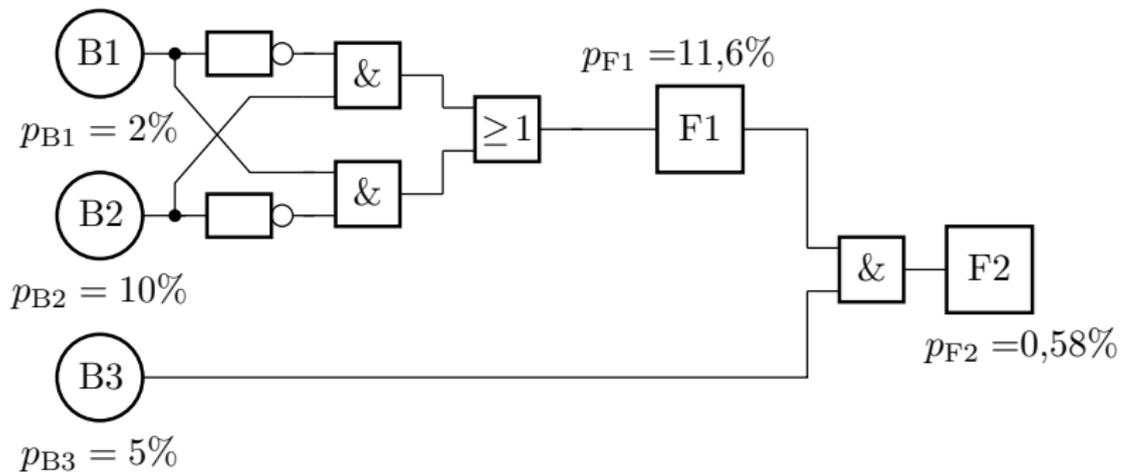
F1

F2

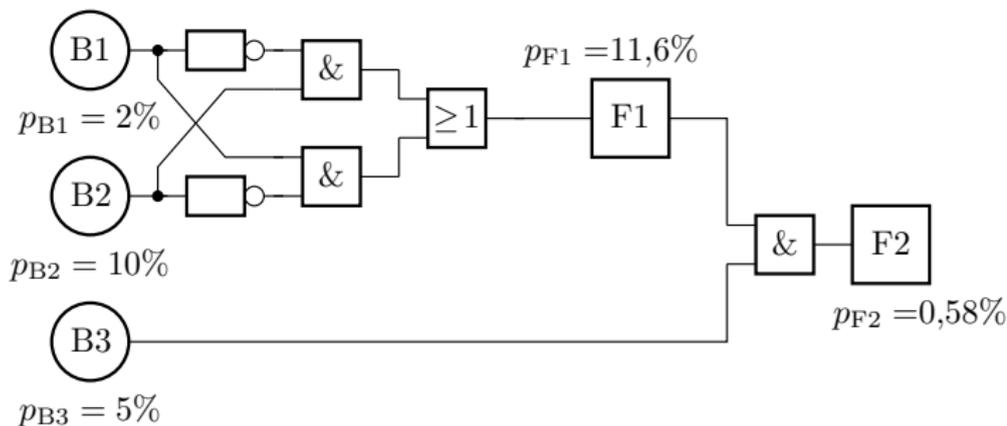
$$p_{F2} =$$

Ereignis  $F_1$  tritt ein, wenn entweder  $B_1$  und nicht  $B_2$  oder nicht  $B_1$  und  $B_2$  eintritt. Das Ereignis  $F_2$  tritt nur ein, wenn  $F_1$  und  $B_3$  eintreten.  
 Wahrscheinlichkeiten der Basisereignisse  $B_1$  bis  $B_3$ :  $p_{B_1} = 2\%$ ,  
 $p_{B_2} = 10\%$  und  $p_{B_3} = 5\%$ .

a) Beschreibung als Fehlerbaum?



## b) Wahrscheinlichkeit für $F_1$ und $F_2$ ?



$$P(B1 \wedge \overline{B2}) = p_{B1} \cdot (1 - p_{B2}) = 2\% \cdot 90\% = 1,8\%$$

$$P(B2 \wedge \overline{B1}) = p_{B2} \cdot (1 - p_{B1}) = 10\% \cdot 98\% = 9,8\%$$

$$p_{F1} = P(B1 \wedge \overline{B2}) + P(B2 \wedge \overline{B1})^* = 1,8\% + 9,8\% = 11,6\%$$

$$p_{F2} = P(F1 \wedge B3) = 11,6\% \cdot 5\% = 0,58\%$$

(\* Die Bedingungen  $B1 \wedge \overline{B2}$  und  $B2 \wedge \overline{B1}$  schließen sich gegenseitig aus.)

## Aufgabe 2.6: Auswertung Fehlerbaum

Pump-Bypass ausgefallen



Boiler-Bypass ausgefallen



Pumpenfehler



Elektronikfehler



Ventil defekt



Wahrscheinlichkeiten der  
Basisereignisse  $B_1$  bis  $B_5$   
 $p_{B.i} = 10^{-3}$  für eine FF pro Tag



Durchfluss zu gering



Regelung fehlerhaft



Boiler überhitzt

Wahrscheinlichkeiten  $p_{F_i}$  der Fehlerereignisse  $F_1$  bis  $F_3$  pro Tag?



Pump-Bypass ausgefallen



Boiler-Bypass ausgefallen



Pumpenfehler



Elektronikfehler



Ventil defekt



Wahrscheinlichkeiten der Basisereignisse  $B_1$  bis  $B_5$   
 $p_{B.i} = 10^{-3}$  für eine FF pro Tag

Wahrscheinlichkeiten  $p_{F_i}$  der Fehlerereignisse  $F_1$  bis  $F_3$  pro Tag?

$$\begin{aligned} p_{F1} &= 1 - (1 - \mathbb{P}[B_1]) \cdot (1 - \mathbb{P}[B_2]) \cdot (1 - \mathbb{P}[B_3]) \\ &\approx \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}[B_2] + \mathbb{P}[B_3] = 0,3 \frac{\%}{\text{Tag}} \end{aligned}$$



Pump-Bypass ausgefallen



Boiler-Bypass ausgefallen



Pumpenfehler



Elektronikfehler



Ventil defekt



Boiler überhitzt



Wahrscheinlichkeiten der Basisereignisse  $B_1$  bis  $B_5$   
 $p_{B.i} = 10^{-3}$  für eine FF pro Tag

Wahrscheinlichkeiten  $p_{F_i}$  der Fehlerereignisse  $F_1$  bis  $F_3$  pro Tag?

$$p_{F2} = 1 - (1 - \mathbb{P}[B_4]) \cdot (1 - \mathbb{P}[B_5]) \approx 0,2 \frac{\%}{\text{Tag}}$$

$$p_{F3} = p_{F1} \cdot p_{F2} \approx 6 \cdot 10^{-6} \text{ Tag}^{-1}$$



# Markov-Ketten



## Aufgabe 2.7: Wettervorhersage mit Markov-Kette

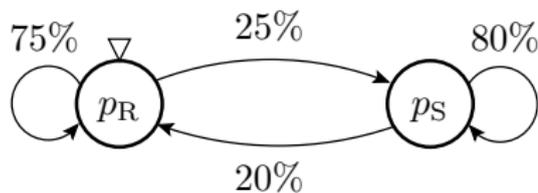
Die Wettervorhersage für die Folgetage soll durch eine Markov-Kette mit den zwei Zuständen R – »Regen« und S – »Sonnenschein« beschrieben werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen Regentag wieder ein Regentag folgt, sei 75% und die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen Sonnentag wieder ein Sonnentag folgt, sei 80%.

- Beschreibung als Markov-Kette mit Startzustand »Regentag«?
- Aufstellen der Übergangsfunktion?
- Wenn es am Tag  $i = 0$  regnet, wie groß ist für die Tage  $i = 1$  bis 4 die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonne scheint?



Die Wettervorhersage für die Folgetage soll durch eine Markov-Kette mit den zwei Zuständen R – »Regen« und S – »Sonnenschein« beschrieben werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen Regentag wieder ein Regentag folgt, sei 75% und die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen Sonnentag wieder ein Sonnentag folgt, sei 80%.

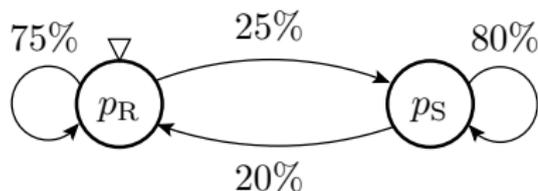
- Beschreibung als Markov-Kette mit Startzustand »Regentag«?
- Aufstellen der Übergangsfunktion?



$$\begin{pmatrix} p_R \\ p_S \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_R \\ p_S \end{pmatrix}_n$$

Die Wettervorhersage für die Folgetage soll durch eine Markov-Kette mit den zwei Zuständen R – »Regen« und S – »Sonnenschein« beschrieben werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen Regentag wieder ein Regentag folgt, sei 75% und die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen Sonnentag wieder ein Sonnentag folgt, sei 80%.

b) Aufstellen der Übergangsfunktion?



$$\begin{pmatrix} p_R \\ p_S \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,2 \\ 0,25 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_R \\ p_S \end{pmatrix}_n$$

Die Wettervorhersage für die Folgetage soll durch eine Markov-Kette mit den zwei Zuständen R – »Regen« und S – »Sonnenschein« beschrieben werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen Regentag wieder ein Regentag folgt, sei 75% und die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen Sonnentag wieder ein Sonnentag folgt, sei 80%.

c) Wenn es am Tag  $i = 0$  regnet, wie groß ist für die Tage  $i = 1$  bis 4 die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonne scheint?

$$\begin{pmatrix} p_R \\ p_S \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,2 \\ 0,25 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_R \\ p_S \end{pmatrix}_n$$

Tag	0	1	2	3	4
$p_R$	1	0,75	0,6125	0,53687	0,49528
$p_S$	0	0,25	0,3875	0,46313	0,50472



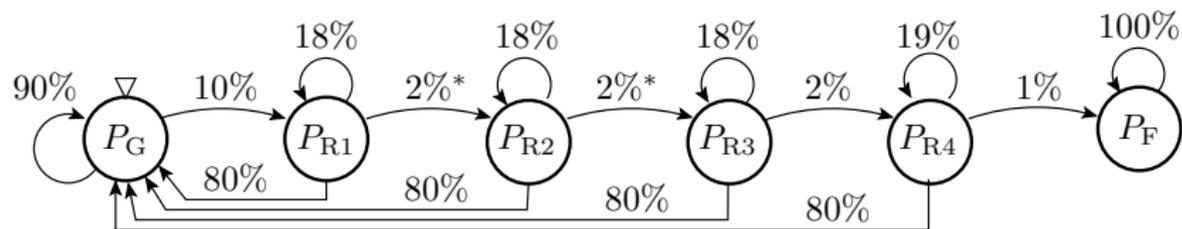
## Aufgabe 2.8: Risikoanalyse

Eine schwerwiegende Fehlfunktion bei einer Maschine kann nur auftreten, wenn sie vom Grundzustand  $G$  nacheinander in höhere Riskozustände  $R_1$  bis  $R_4$  übergeht. Das Bedienpersonal erkennt erhöhte Riskozustände mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% und initialisiert das System dann neu (Rückkehr in den Grundzustand  $G$ ). Die Wahrscheinlichkeit für den Übergang von einem in den nächsten Riskozustand betrage in jedem Zeitschritt, wenn nicht neuinitialisiert wird, 10%. In Riskozustand  $R_4$  tritt ohne rechtzeitige Neuinitialisierung mit 5% die schwerwiegende Fehlersituation  $F$  ein.

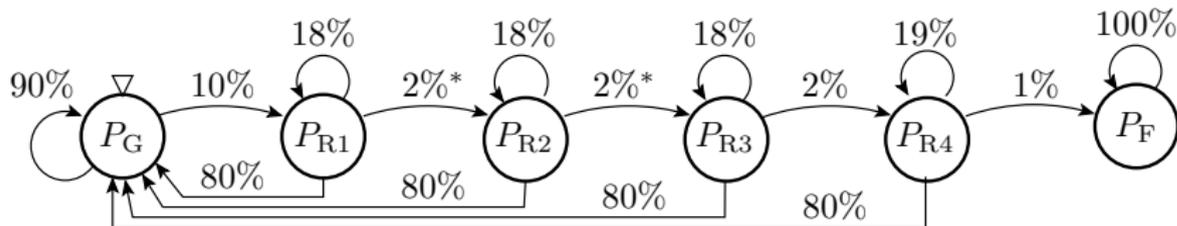
- Beschreibung als Markov-Kette?
- Programm zur Simulation der Markov-Kette?
- Wahrscheinlichkeit, dass die schwerwiegende Fehlersituation mindestens einmal eingetreten ist, für  $n = 1$  bis 7 und  $n = 10^6$ ?

Eine schwerwiegende Fehlfunktion bei einer Maschine kann nur auftreten, wenn sie vom Grundzustand  $G$  nacheinander in höhere Riskozustände  $R_1$  bis  $R_4$  übergeht. Das Bedienpersonal erkennt erhöhte Riskozustände mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% und initialisiert das System dann neu (Rückkehr in den Grundzustand  $G$ ). Die Wahrscheinlichkeit für den Übergang von einem in den nächsten Riskozustand betrage in jedem Zeitschritt, wenn nicht neuinitialisiert wird, 10%. In Riskozustand  $R_4$  tritt ohne rechtzeitige Neuinitialisierung mit 5% die schwerwiegende Fehlersituation  $F$  ein.

a) Beschreibung als Markov-Kette?



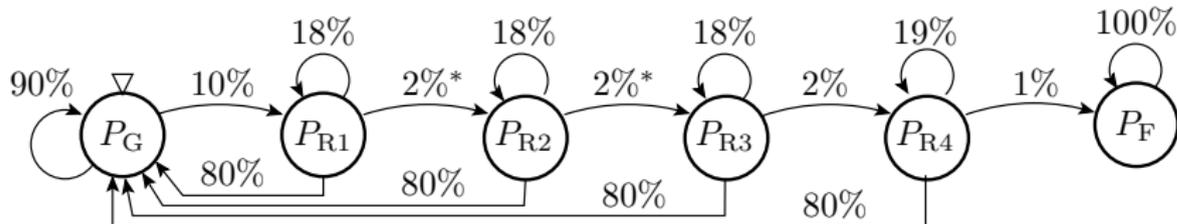
## b) Programm zur Simulation der Markov-Kette?



```

PG = 100; PR1 = 0; PR2=0; PR3=0; PR4=0; PF=0;
print(' n| P_G| PR1| PR2| PR3| PR4 | PF');
for n in range(1,8):
    PG_n = PG*0.9 + PR1*0.8 + PR2*0.8 + PR3*0.8 + PR4*0.8;
    PR1_n = PG*0.10 + PR1*0.18;
    PR2_n = PR1*0.02 + PR2*0.18;
    PR3_n = PR2*0.02 + PR3*0.18;
    PR4_n = PR3*0.02 + PR4*0.19;
    PF = PR4*0.01 + PF;
    PG=PG_n; PR1=PR1_n; PR2=PR2_n; PR3=PR3_n; PR4=PR4_n;
    print('%3i|%6.3f| %6.3f|%6.3f|%6.3f|%8.6f|%8.6f'%(n,
        PG, PR1, PR2, PR3, PR4, PF))
  
```

c) Wahrscheinlichkeit, dass die schwerwiegende Fehlersituation mindestens einmal eingetreten ist, für  $n = 1$  bis 7 und  $n = 10^6$ ?



n	P_G	PR1	PR2	PR3	PR4	PF
1	90.000	10.000	0.000	0.000	0.000000	0.000000
2	89.000	10.800	0.200	0.000	0.000000	0.000000
3	88.900	10.844	0.252	0.004	0.000000	0.000000
4	88.890	10.842	0.262	0.006	0.000080	0.000000
5	88.889	10.841	0.264	0.006	0.000130	0.000001
6	88.889	10.840	0.264	0.006	0.000150	0.000002
7	88.889	10.840	0.264	0.006	0.000157	0.000004
-----						
$10^6$	87.485	10.669	0.260	0.006	0.000157	1.579632



# Fehlernachweisw.



# Ohne Gedächtnis



### Aufgabe 2.9: Nachweiswahrscheinlichkeit

Ein System hat im Mittel bei jeder  $10^4$ -ten Service-Leistung eine Fehlfunktion. 70% der FF werden einem ersten, 20% einem zweiten und die restlichen 10% nicht lokalisierbaren Fehlern zugeordnet.

- Welche Nachweiswahrscheinlichkeiten  $p_1$  und  $p_2$  haben die beiden zugeordneten Fehler?
- Wie lang muss ein Zufallstest mindestens sein, damit der schlechter nachweisbare zugeordnete Fehler mindestens mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% nachgewiesen wird?
- Welche Zuverlässigkeit hat das System, wenn die beiden zugeordneten Fehler beseitigt sind?



Ein System hat im Mittel bei jeder  $10^4$ -ten Service-Leistung eine Fehlfunktion. 70% der FF werden einem ersten, 20% einem zweiten und die restlichen 10% nicht lokalisierbaren Fehlern zugeordnet.

- Welche Nachweiswahrscheinlichkeiten  $p_1$  und  $p_2$  haben die beiden zugeordneten Fehler?
- Wie lang muss ein Zufallstest mindestens sein, damit der schlechter nachweisbare zugeordnete Fehler mindestens mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% nachgewiesen wird?

- a) Nachweiswahrscheinlichkeiten der beiden zugeordneten Fehler:

$$p_1 = 0,7 \cdot 10^{-4}; \quad p_2 = 0,2 \cdot 10^{-4}$$

- b) Testsatzlänge für den Nachweis von Fehler 2:

$$\begin{aligned} p_2(n) &= 1 - e^{-n \cdot p_2} \geq 99\% \\ n &\geq -\frac{\ln(1 - 99\%)}{p_2} = 2,3 \cdot 10^5 \end{aligned}$$



Ein System hat im Mittel bei jeder  $10^4$ -ten Service-Leistung eine Fehlfunktion. 70% der FF werden einem ersten, 20% einem zweiten und die restlichen 10% nicht lokalisierbaren Fehlern zugeordnet.

c) Welche Zuverlässigkeit hat das System, wenn die beiden zugeordneten Fehler beseitigt sind?

Nach Beseitigung der zugeordneten Fehler ist eine Verringerung der Häufigkeit der FF auf 10% und damit eine Verzehnfachung der Zuverlässigkeit zu erwarten:

$$Z = 10^5 \frac{SL}{FF}$$



### Aufgabe 2.10: Testsatzlänge RAM-Test

Für einen Speicher mit  $2^{32}$  Speicherplätzen sei angenommen, dass kein Fehler seltener als im Mittel aller 50 Zugriffe auf einen der  $2^{32}$  Speicherplätze eine FF verursacht.

- Ab welcher Testsatzlänge  $n$  in Speicherzugriffen erkennt ein Zufallstest jeden Fehler mindestens mit 99% Wahrscheinlichkeit?
- Wie viele Stunden dauert ein Test mit der Mindesttestsatzlänge aus Aufgabenteil a) bei  $10^8$  Speicherzugriffen pro Sekunde?



Für einen Speicher mit  $2^{32}$  Speicherplätzen sei angenommen, dass kein Fehler seltener als im Mittel aller 50 Zugriffe auf einen der  $2^{32}$  Speicherplätze eine FF verursacht.

a) Ab welcher Testsatzlänge  $n$  in Speicherzugriffen erkennt ein Zufallstest jeden Fehler mindestens mit 99% Wahrscheinlichkeit?

Mindestnachweiswahrscheinlichkeit je Speicherzugriff:

$$p_{\min} = (50 \cdot 2^{32})^{-1}$$

Mindestnachweiswahrscheinlichkeit bei  $n$  Speicherzugriffen:

$$p_{\min}(n) = 1 - e^{-n \cdot p_{\min}} \geq 99\%$$

Gesuchte Testsatzlänge:

$$n \geq -\ln(1 - 99\%) \cdot \frac{1}{p_{\min}} = -\ln(1\%) \cdot 50 \cdot 2^{32} \approx 10^{12}$$



Für einen Speicher mit  $2^{32}$  Speicherplätzen sei angenommen, dass kein Fehler seltener als im Mittel aller 50 Zugriffe auf einen der  $2^{32}$  Speicherplätze eine FF verursacht.

b) Wie viele Stunden dauert ein Test mit der Mindesttestsatzlänge aus Aufgabenteil a) bei  $10^8$  Speicherzugriffen pro Sekunde?

Mindesttestdauer:

$$\begin{aligned}t &= n \cdot 10^{-8} \text{ s} \\ &= 10^{12} \cdot 10^{-8} \text{ s} = 2,75 \text{ h}\end{aligned}$$



# Mit Gedächtnis



### Aufgabe 2.11: RAM-Kopplungsfehler

Schreiben einer 1 in Zelle  $i$  verändert Zelle  $j$  von 0 nach 1, nachweisbar durch die Testfolge:

- Schreibe 0 in Zelle  $j$ , Wahrscheinlichkeit  $p_{W0} = \frac{1}{4 \cdot \#A}$
- Schreibe 1 in Zelle  $i$ , Wahrscheinlichkeit  $p_{W1} = \frac{1}{4 \cdot \#A}$
- Lese Zelle  $j$  ohne zwischenzeitlichen Schreibzugriff auf Zelle  $j$ , Wahrscheinlichkeit  $p_R = \frac{1}{2 \cdot \#A}$ .

a) Beschreibung des Fehlernachweises durch eine Markov-Kette?

b) Simulation der Markov-Kette mit  $\#A = 128$ ?

c) Darstellung der bedingten Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler in Schritt  $n$  nachgewiesen wird, wenn er in Schritt  $n - 1$  noch nicht nachgewiesen war

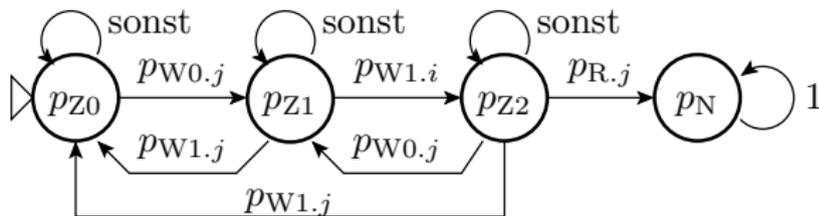
$$p_{\Delta N}(n) = \frac{p_N(n+1) - p_N(n)}{1 - p_N(n)}$$

für  $n = 1$  bis 5000?

Schreiben einer 1 in Zelle  $i$  verändert Zelle  $j$  von 0 nach 1, nachweisbar durch die Testfolge:

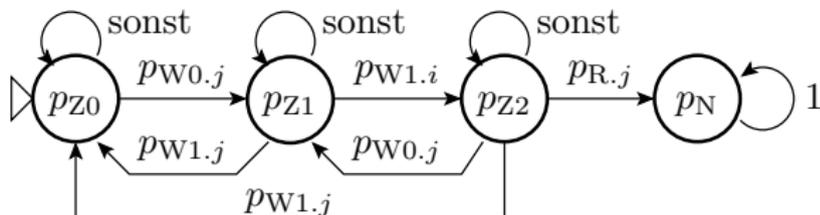
- Schreibe 0 in Zelle  $j$ , Wahrscheinlichkeit  $p_{W0} = \frac{1}{4 \cdot \#A}$
- Schreibe 1 in Zelle  $i$ , Wahrscheinlichkeit  $p_{W1} = \frac{1}{4 \cdot \#A}$
- Lese Zelle  $j$  ohne zwischenzeitlichen Schreibzugriff auf Zelle  $j$ , Wahrscheinlichkeit  $p_R = \frac{1}{2 \cdot \#A}$ .

a) Beschreibung des Fehlernachweises durch eine Markov-Kette?



Z0 – Fehleranregung nicht vorbereitet; Z1 – Fehleranregung vorbereitet; Z2 – Fehler angeregt; N – Fehler nachgewiesen.

## b) Simulation der Markov-Kette mit $\#A = 128$ ?



$pZ0=1$ ;  $pZ1=0$ ;  $pZ2=0$ ;  $pN(1)=0$ ;  $N=5000$ ;

$A=128$ ;  $pR = 1/(2*A)$ ;  $pW = 1/(4*A)$ ;

for  $n = 1:N$

$pZ0\_n = pZ0 * (1-pW) + pZ1*pW + pZ2*pW$ ;

$pZ1\_n = pZ0 * pW + pZ1*(1-pW-pR) + pZ2*pW$ ;

$pZ2\_n = pZ1 * pR + pZ2*(1-2*pW-pR)$ ;

$pN = pN(n) + pZ2 * pR$ ;

$p(n) = pZ2*pR / (pZ0+pZ1+pZ2)$ ;

$pZ0=pZ0\_n$ ;  $pZ1=pZ1\_n$ ;  $pZ2=pZ2\_n$ ;

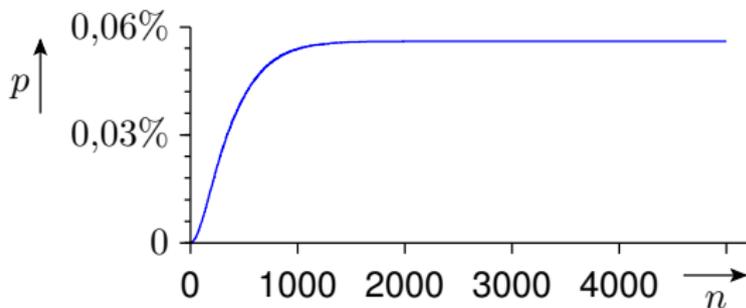
end;

plot(1:N, p);

- c) Darstellung der bedingten Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler in Schritt  $n$  nachgewiesen wird, wenn er in Schritt  $n - 1$  noch nicht nachgewiesen war

$$p_{\Delta N}(n) = \frac{p_N(n+1) - p_N(n)}{1 - p_N(n)}$$

für  $n = 1$  bis 5000?



Ab  $n \geq 2000$  bleibt der relative Wahrscheinlichkeitszuwachs konstant  $p_{\Delta N}(n) \approx 0,057\%$ . Zunahme der Nachweiswahrscheinlichkeit wie »ohne Gedächtnis«  $p(n) \approx 1 - e^{-n \cdot p_{\Delta N}}$



# Fehlerbeseitigungsw.



# Ersatziteration



#### Aufgabe 2.12: Fehleranteil nach Ersatz

Für ein gefertigtes Gerät ist die zu erwartende Ausbeute  $\mathbb{E}[Y] = 60\%$  und der Test erkennt  $FC = p_E = 90\%$  der fehlerhaften Geräte.

Erkannte fehlerhafte Geräte werden ersetzt.

- Wie groß sind die Wahrscheinlichkeit  $p_F$ , dass ein gefertigtes Gerät fehlerhaft ist und der Fehleranteil der Geräte nach der Fertigung?
- Wie hoch ist der zu erwartende Fehleranteil nach Ersatz der erkennbar defekten Geräte?



Für ein gefertigtes Gerät ist die zu erwartende Ausbeute  $\mathbb{E}[Y] = 60\%$  und der Test erkennt  $FC = p_E = 90\%$  der fehlerhaften Geräte.

Erkannte fehlerhafte Geräte werden ersetzt.

a) Wie groß sind die Wahrscheinlichkeit  $p_F$ , dass ein gefertigtes Gerät fehlerhaft ist und der Fehleranteil der Geräte nach der Fertigung?

Zu erwartende Ausbeute als Anteil der erkannten fehlerhaften Schaltkreise:

$$\mathbb{E}[Y] = 1 - p_F \cdot p_E$$

Wahrscheinlichkeit, dass ein gefertigtes Gerät fehlerhaft ist:

$$p_F = \frac{1 - \mathbb{E}[Y]}{p_E} = \frac{1 - 60\%}{90\%} = 44,4\%$$

Fehleranteil der gefertigten Geräte 0,444 dpu (dpu – Defects per Unit).



Für ein gefertigtes Gerät ist die zu erwartende Ausbeute  $\mathbb{E}[Y] = 60\%$  und der Test erkennt  $FC = p_E = 90\%$  der fehlerhaften Geräte. Erkannte fehlerhafte Geräte werden ersetzt.

b) Wie hoch ist der zu erwartende Fehleranteil nach Ersatz der erkennbar defekten Geräte?

Wahrscheinlichkeit, dass ein Gerät nach Ersatz der erkennbar defekten Geräte fehlerhaft ist:

$$p_{FT} = \frac{p_F \cdot (1 - p_E)}{1 - p_F \cdot p_E} = \frac{44,4\% \cdot (1 - 90\%)}{1 - 44,4\% \cdot 90\%} = 7,4\%$$

Zu erwartender Fehleranteil

$$DL_{Ers} = 0,074 \text{ dpu} = 74.000 \text{ dpm}$$

(dpm – Defects per Million). Etwa noch jedes 14. Gerät ist fehlerhaft.



#### Aufgabe 2.13: Fehlerüberdeckung Schaltkreistest

Die Ausbeute einer Schaltkreisfertigung sei  $Y = 80\%$  und der Fehleranteil der vom Test als gut befundenen Schaltkreise sei  $DL_T = 1000$  dpm.

- Auf welche Fehlerüberdeckung  $FC = p_E$  der Tests lässt das schließen?
- Wie wirkt sich ein Ausbeuteeinbruch auf  $Y = 30\%$  durch eine technologische Umstellung auf den Fehleranteil der gefertigten Schaltkreise aus?



Die Ausbeute einer Schaltkreisfertigung sei  $Y = 80\%$  und der Fehleranteil der vom Test als gut befundenen Schaltkreise sei  $DL_T = 1000$  dpm.

a) Auf welche Fehlerüberdeckung  $FC = p_E$  der Tests lässt das schließen?

Ausbeute als Anteil der erkannten fehlerhaften Schaltkreise:

$$Y = 1 - p_F \cdot p_E$$

Wahrscheinlichkeit, dass ein als fehlerfrei ausgewiesenes Objekt fehlerhaft ist (siehe Vorlesung):

$$\begin{aligned} \frac{DL_T}{\text{dpu}} = p_{FT} &= \frac{p_F \cdot (1 - p_E)}{1 - p_F \cdot p_E} = \frac{(1 - Y) \cdot (1 - p_E)}{Y \cdot p_E} \\ FC = p_E &= \frac{1 - Y}{1 - Y \cdot (1 - p_{FT})} = \frac{1 - 80\%}{1 - 80\% \cdot (1 - 10^{-3})} \\ &= 1 - 4 \cdot 10^{-3} = 99,6\% \end{aligned}$$

Anmerkung: Größenordnung der (Modell-) Fehlerüberdeckungen für Schaltkreise 95% bis 99%. Sind die tatsächlichen Fehlerüberdeckungen und/oder die tatsächlichen Fehleranteile viel höher?

Die Ausbeute einer Schaltkreisfertigung sei  $Y = 80\%$  und der Fehleranteil der vom Test als gut befundenen Schaltkreise sei  $DL_T = 1000$  dpm.

b) Wie wirkt sich ein Ausbeuteeinbruch auf  $Y = 30\%$  durch eine technologische Umstellung auf den Fehleranteil der gefertigten Schaltkreise aus?

$$\begin{aligned} DL_T = p_{FT} &= \frac{(1 - Y) \cdot (1 - p_E)}{Y \cdot p_E} = \frac{(1 - 30\%) \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{30\% \cdot (1 - 4 \cdot 10^{-6})} \\ &= \frac{(1 - 30\%) \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{30\% \cdot (1 - 4 \cdot 10^{-3})} = 9,3 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Ein Ausbeuteeinbruch von 80% auf 30% bewirkt, dass sich der Fehleranteil der eingesetzten Schaltkreise mehr als verdoppelt.



# Reparaturiteration

## Aufgabe 2.14: Fehlerbeseitigung durch Reparatur

Ein Programm von 1.000 NLOC habe abschätzungsweise nach dem Syntaxtest und der erfolgreichen Abarbeitung der ersten Testbeispiele noch 20 Fehler. Der nachfolgende Test habe einer Erkennungswahrscheinlichkeit von  $p_E = 60\%$ .

- Wie groß muss die Reparaturgüte  $Q_{\text{Rep}}$  mindestens sein, damit sich die Anzahl der nicht beseitigten Fehler halbiert?
- Wie groß darf die Fehlerentstehungsrate  $\eta_{\text{Rep}}$  (neu entstehende Fehlern je Reparaturversuch) maximal sein, wenn die Erfolgswahrscheinlichkeit der Reparatur  $p_R = 30\%$  beträgt?



Ein Programm von 1.000 NLOC habe abschätzungsweise nach dem Syntaxtest und der erfolgreichen Abarbeitung der ersten Testbeispiele noch 20 Fehler. Der nachfolgende Test habe einer Erkennungswahrscheinlichkeit von  $p_E = 60\%$ .

a) Wie groß muss die Reparaturgüte  $Q_{\text{Rep}}$  mindestens sein, damit sich die Anzahl der nicht beseitigten Fehler halbiert?

Anteil der nicht beseitigt Fehler:

$$\frac{\mathbb{E}[\#F_{\text{TB}}]}{\mathbb{E}[\#F]} = \left(1 + \frac{p_E}{Q_{\text{Rep}}}\right) \cdot (1 - p_E) \leq 0,5$$

aufgelöst nach der erforderlichen Reparaturgüte:

$$Q_{\text{Rep}} = \frac{p_E}{\frac{\mathbb{E}[\#F_{\text{TB}}]}{\mathbb{E}[\#F]} - 1} \geq \frac{60\%}{\frac{50\%}{1-60\%} - 1} = 2,4$$

Maßeinheit »beseitigte Fehler je neu entstandener Fehler«.



Ein Programm von 1.000 NLOC habe abschätzungsweise nach dem Syntaxtest und der erfolgreichen Abarbeitung der ersten Testbeispiele noch 20 Fehler. Der nachfolgende Test habe einer Erkennungswahrscheinlichkeit von  $p_E = 60\%$ .

b) Wie groß darf die Fehlerentstehungsrate  $\eta_{\text{Rep}}$  (neu entstehende Fehlern je Reparaturversuch) maximal sein, wenn die Erfolgswahrscheinlichkeit der Reparatur  $p_R = 30\%$  beträgt?

Mindestreparaturgüte

$$Q_{\text{Rep}} = \frac{p_R}{(1 - p_R) \cdot \eta_{\text{Rep}}} \geq 2,4$$

aufgelöst nach der maximal zulässigen Fehlerentstehungsrate je Reparaturversuch:

$$\eta_{\text{Rep}} = \frac{p_R}{(1 - p_R) \cdot Q_{\text{Rep}}} \leq \frac{30\%}{(1 - 30\%) \cdot 2,4} = 17,86\%$$

neu entstehende Fehler je Reparaturversuch.