Test und Verlässlichkeit
Grosse Übung zu Foliensatz 6

Prof. G. Kemnitz

Institut für Informatik, TU Clausthal (TV_GUeF6)

19. Juli 2018

Verteilungen

Erwartungswert und Varianz

Aufgabe 6.1: Erwartungswert und Varianz

Gegeben ist die Verteilung:

mögliche Ergebnisse x_i	0	1	2
Wahrscheinlichkeit p_i	20%	65%	15%

Berechnen Sie:

1. den Erwartungswert,
2. die Varianz ohne Nutzung des Verschiebungssatzes,
3. die Varianz unter Nutzung des Verschiebungssatzes.

Zur Kontrolle

mögliche Ergebnisse x_i	0	1	2
Wahrscheinlichkeit p_i	20%	65%	15%

1. Erwartungswert:

$$E(X) = 0 \cdot 20\% + 1 \cdot 65\% + 2 \cdot 15\% = 0{,}95$$

2. Varianz ohne Verschiebungssatz:

$$\begin{aligned} D^2(X) &= 20\% \cdot (0 - 0{,}95)^2 + 65\% \cdot (1 - 0{,}95)^2 \\ &\quad + 15\% \cdot (2 - 0{,}95)^2 \\ &= 0{,}3475 \end{aligned}$$

3. Varianz unter Nutzung des Verschiebungssatzes:

$$D^2(X) = 20\% \cdot 0^2 + 65\% \cdot 1^2 + 15\% \cdot 2^2 - 0{,}95^2 = 0{,}3475$$

Aufgabe 6.2: Varianz bei lin. Transformation

Kontrollieren Sie die Gleichungen zur linearen Transformation

1. für den Erwartungswert:

$$E\left(a\cdot X+b\right)=a\cdot E\left(X\right)+b$$

2. für die Varianz:

$$D^2\left(a\cdot X+b\right)=a^2\cdot D^2\left(X\right)$$

Zur Kontrolle

1. Erwartungswert:

$$\begin{aligned} E\left(a\cdot X+b\right) &= \sum_{i=1}^{N} p_i\cdot\left(a\cdot x_i+b\right) \\ &= a\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{N} p_i\cdot x_i}_{E(X)}+\underbrace{\sum_{i=1}^{N} p_i\cdot b}_{b}\ \surd \end{aligned}$$

2. Varianz:

$$\begin{aligned} D^2\left(a\cdot X+b\right) &= \sum_{i=1}^{N} p_i\cdot\left(a\cdot x_i+b-\left(a\cdot E\left(X\right)+b\right)\right)^2 \\ &= a^2\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{N} p_i\cdot\left(x_i-E\left(X\right)\right)^2}_{D^2(X)}\ \surd \end{aligned}$$

Aufgabe 6.3: Varianz der Summe von Zufallsgrößen

Zeigen Sie, dass die Varianz der Summe zweiter Zufallsgrößen gleich der Summe der Varianzen plus der doppelten Kovarianz ist:

$$D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y) + 2 \cdot \mathrm{Cov}(X,Y)$$

mit der Kovarianz:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= E\left((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))\right) \\ &= \\ &= \sum_{i=1}^{N_\mathrm{x}} \left(\sum_{j=1}^{N_\mathrm{y}} \left(p_i \cdot p_j \cdot (x_i - E(X)) \cdot (y_i - E(Y))\right)\right)\end{aligned}$$

Zur Kontrolle

$$D^2(X+Y) = \dots$$
$$= \sum_{i=1}^{N_\mathrm{x}} \left(\sum_{j=1}^{N_\mathrm{y}} \left(p_i \cdot p_j \cdot (x_i - E(X) + y_i - E(Y))^2 \right) \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{N_\mathrm{x}} \left(\sum_{j=1}^{N_\mathrm{y}} \left(p_i \cdot p_j \cdot \left((x_i - E(X))^2 + (y_i - E(Y))^2 + 2 \cdot (x_i - E(X)) \cdot (y_i - E(Y)) \right) \right) \right)$$
$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{N_\mathrm{x}} p_i \cdot (x_i - E(X))^2}_{D^2(X)} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{N_\mathrm{y}} p_j}_{1} + \underbrace{\sum_{j=1}^{N_\mathrm{y}} p_j \cdot (y_j - E(Y))^2}_{D^2(Y)} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{N_\mathrm{x}} p_i}_{1}$$
$$+2 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{N_\mathrm{x}} \left(\sum_{j=1}^{N_\mathrm{y}} (p_i \cdot p_j \cdot (x_i - E(X)) \cdot (y_i - E(Y))) \right)}_{E((X-E(X))\cdot(Y-E(Y)))}$$

Aufgabe 6.4: Summe von Zufallsgrößen

Drei Holzbausteine, die je eine zu erwartende Höhe von 3 cm mit einer Standardabweichung von 1 mm haben, werden zu einem Turm aufgeschichtet. Welchen Erwartungswert und welche Standardabweichung hat die Höhe des Turms? Die Höhen der Bausteine sollen nicht korrelieren (Kovarianz null).

$$E\left(h_{\text{ges}}\right) =$$

$$\sqrt{D^2\left(h_{\text{ges}}\right)} =$$

Zur Kontrolle

Summe der Erwartungswerte:

$$E\left(H_{\text{ges}}\right) = 3 \cdot 3\,\text{cm} = 9\,\text{cm}$$

Summe der Varianzen:

$$D^2\left(H_{\text{ges}}\right) = 3 \cdot (1\,\text{mm})^2$$

Standardabweichung der Summe:

$$\sqrt{D^2\left(H_{\text{ges}}\right)} = \sqrt{3}\,\text{mm}$$

Verteilung von Zählwerten

Aufgabe 6.5: Verteilung der Fehleranzahl

Die Fehler $i = 1$ bis 5 seien mit folgenden Wahrscheinlichkeiten nachweisbar:

Fehler	1	2	3	4	5
p_i	10%	20%	40%	50%	30%

Berechnen Sie die Verteilung der Anzahl der nachweisbaren Fehler durch Ausfüllen der nachfolgende Tabelle:

Fehleranzahl	0	1	2	3	4	5
Fehler 1	90%	10%				
Fehler 1 und 2			2%			
Fehler 1 bis 3				0,8%		
Fehler 1 bis 4						
Fehler 1 bis 5						

Berechnungsprogramm und Ausgaben

```
p=[0.10 0.20 0.40 0.50 0.30];
P(1,1)=1-p(1);
P(1,2)=p(1);
for i=2:5
  P(i,1)=P(i-1,1) * (1-p(i));
  P(i,i+1)=P(i-1,i)*p(i);
  for j=2:i
    P(i,j) =P(i-1,j)*(1-p(i)) + P(i-1,j-1)*p(i);
  end;
end;
```

```
P =
   0.90000   0.10000   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000
   0.72000   0.26000   0.02000   0.00000   0.00000   0.00000
   0.43200   0.44400   0.11600   0.00800   0.00000   0.00000
   0.21600   0.43800   0.28000   0.06200   0.00400   0.00000
   0.15120   0.37140   0.32740   0.12740   0.02140   0.00120
```

Zur Kontrolle

Nachweiswahrscheinlichkeiten:

Fehler	1	2	3	4	5
p_i	10%	20%	40%	50%	30%

Verteilung der Anzahl der nachweisbaren Fehler:

Fehleranzahl	0	1	2	3	4	5
Fehler 1	90%	10%				
Fehler 1 und 2	72%	26%	2%			
Fehler 1 bis 3	43,2%	44,4%	11,6%	0,8%		
Fehler 1 bis 4	21,6%	43,8	28%	6,2%	0,4%	
Fehler 1 bis 5	15,12%	37,14%	32,74%	12,74%	2,14%	0,12%

Binomialverteilung

Aufgabe 6.6: Binomialverteilung

Berechnen Sie die Binomialverteilung für die Anzahl der nachweisbaren Fehler zur Aufgabe zuvor

- mit derselben Anzahl möglicher Zählwerte,
- demselben Erwartungswert und
- als Eintrittswahrscheinlichkeit dem Mittelwert der Nachweiswahrscheinlichkeiten:

Fehler	1	2	3	4	5
p_i	10%	20%	40%	50%	30%

Mittlere Nachweiswahrscheinlichkeit: $p =$

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$(1-p)^5$	$5 \cdot p \cdot (1-p)^4$		

Zur Kontrolle

Nachweiswahrscheinlichkeiten aus der Aufgabe zuvor:

Fehler	1	2	3	4	5
p_i	10%	20%	40%	50%	30%

- Anzahl der möglichen Zählwerte: $N = 5$
- mittlere Nachweiswahrscheinlichkeit: $p = 30\%$
- Verteilung:

k	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	16,81%	36,02%	30,87%	13,23%	2,84%	0,24%

- Zählverteilung aus der Aufgabe zuvor zum Vergleich:

$P(X = k)$	15,12%	37,14%	32,74%	12,74%	2,14%	0,12%

Poissonverteilung

Aufgabe 6.7: Poissonverteilung

Die Auftrittswahrscheinlichkeit einer Fehlfunktion je Service-Leistung sei $p_{\mathrm{FF}} = 10^{-5}$. Wie wahrscheinlich ist es, dass bei 10^4 Service-Leistungen 0, 1, 2 oder mehr als zwei Fehlfunktionen auftreten?

Erwartungswert: $E(X) =$ $\frac{FF}{10000\,SL}$

keine FF: $P(k = 0) =$

eine FF: $P(k = 1) =$

zwei FF: $P(k = 2) =$

mehr als zwei FF: $P(k > 2) =$

Zur Kontrolle

- Erwartungswert: $E(X) = p_{\mathrm{FF}} \cdot 10^4 = 0{,}1\,\frac{FF}{1000\,SL}$
- keine FF: $P(k=0) = e^{-E(X)} = 90{,}48\%$
- eine FF: $P(k=1) = e^{-E(X)} \cdot E(X) = 9{,}05\%$
- zwei FF: $P(k=2) = e^{-E(X)} \cdot \frac{E(X)^2}{2} = 0{,}45\%$
- mehr als zwei FF:
  $P(k>2) = 1 - 90{,}48\% - 9{,}05\% - 0{,}45\% = 0,015\%$

Multimodale Verteilungen

Aufgabe 6.8: Verteilung der Widerstandswerte

In eine Kiste für 1kΩ-Widerstände wurde

- 500 Widerstände mit normalverteiltem Widerstandswert, Erwartungswert 1,02 kΩ und Standardabweichung 10 Ω und
- 300 Widerstände mit normalverteiltem Widerstandswert, Erwartungswert 9,99 kΩ und Standardabweichung 15 Ω

gemischt. Welche Verteilung haben die Widerstandswerte bei zufälliger Entnahme aus der Kiste?

Beschreibung mit Hilfe der standardisierten Normalverteilung $\Phi(z)$.

$$P(X \leq R) =$$

Zur Kontrolle

$$P(X \leq R) = \frac{500}{800} \cdot \Phi\left(\frac{R - 1{,}02\,\mathrm{k}\Omega}{10\,\Omega}\right) + \frac{300}{800} \cdot \Phi\left(\frac{R - 0{,}99\,\mathrm{k}\Omega}{15\,\Omega}\right)$$

Effektive Anzahl der Zählversuche

Aufgabe 6.9: Effektive Anzahl der Zählversuche

Beim mehrfachen Zählen von Schadensereignissen bei 30 Versuchen ergab sich für die Zählwerte ein Erwartungswert von 9,75 und eine Standardabweichung von 4,42. Gesucht seien:

1. Schadenseintrittswahrscheinlichkeit p ?
2. Varianzerhöhung κ?
3. Effektive Versuchsanzahl?
4. die skalierte kumulative Binomialverteilung mit demselben Erwartungswert und annähernd derselben Varianz.

Zur Kontrolle

1. Schadenseintrittswahrscheinlichkeit: $p = 32{,}5\%$
2. Varianzerhöhung:
   $\kappa \geq \frac{D_S^2(X)}{E_S(X)\cdot\left(1-\frac{E_S(X)}{N}\right)} = \frac{4{,}42^2}{9{,}75\cdot(1-32{,}5\%)} = 2{,}97 \approx 3$
3. effektive Versuchsanzahl: $N_{\text{eff}} = \frac{N}{\kappa} = \frac{30}{3} = 10.$
   Kontrolle: $E(X) = \kappa \cdot N_{\text{eff}} \cdot p = 9{,}75;$
   $D^2(X) = \kappa^2 \cdot N_{\text{eff}} \cdot p \cdot (1-p) = 19{,}7;\ \sqrt{D^2(X)} = 4{,}44$
4. Skaliert kumulative Binomialverteilung mit demselben Erwartungswert und fast derselben Varianz:

$$P(X \leq \kappa \cdot k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{10}{j} \cdot 32{,}5\%^j \cdot 67{,}5\%^{10-j}$$

$\kappa \cdot k$	0	3	6	9	12	15	18	21	≥24
$P(X \leq \kappa \cdot k)$	2,0%	11,4%	31,9%	58,2%	80,8%	93,2%	98,3%	99,7%	100%

Aufgabe 6.10: Effektive Fehleranzahl

Für eine Modellfehlermenge von 1000 Fehlern wurden für 10 verschiedene Zufallstestsätze derselben Länge die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler bestimmt:

Versuch i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ergebnis $\varphi_{\mathrm{NErk}.i}$	58	49	40	54	67	35	34	57	47	66

1. Schätzen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler.
2. Wie groß ist die effektive Modellfehleranzahl?

Versuch i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ergebnis $\varphi_{\mathrm{NErk}.i}$	58	49	40	54	67	35	34	57	47	66

- Erwartungswertder Datenstichprobe: $E_{\mathrm{S}}(X) =$
- Varianz der Datenstichprobe: $D_{\mathrm{S}}^2(X) =$
- Varianzvergrößerung: $\kappa =$
- Effektive Modellfehleranzahl: $N_{\mathrm{eff}} =$

Zur Kontrolle

Versuch i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ergebnis $\varphi_{\mathrm{NErk}.i}$	58	49	40	54	67	35	34	57	47	66

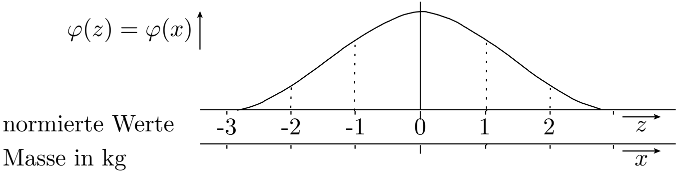
- Erwartungswert der Datenstichprobe: $E_{\mathrm{S}}(X) = 50{,}7$
- Varianz der Datenstichprobe: $D^2_{\mathrm{S}}(X) = 140{,}01$
- Varianzvergrößerung:
$$\kappa = \frac{D^2_{\mathrm{S}}(X)}{E_{\mathrm{S}}(X) \cdot \left(1 - \frac{E_{\mathrm{S}}(X)}{N}\right)} = \frac{140{,}01}{50{,}7 \cdot \left(1 - \frac{50{,}7}{1.000}\right)} = 2{,}91$$
- Effektive Modellfehleranzahl: $N_{\mathrm{eff}} = \frac{N}{\kappa} = 344$

Bereichsschätzung

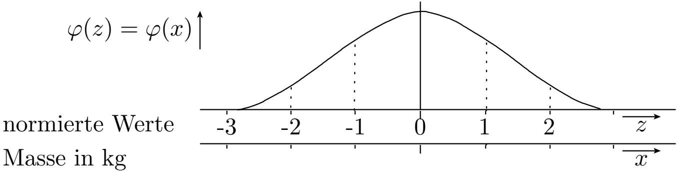
Aufgabe 6.11: Normalverteilung

Eine normalverteilte Zufallsgröße habe den Erwartungswert $E(X) = 1\,\mathrm{kg}$ und einer Standardabweichung von 10 g.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist $X > 1{,}03\,\mathrm{kg}$?

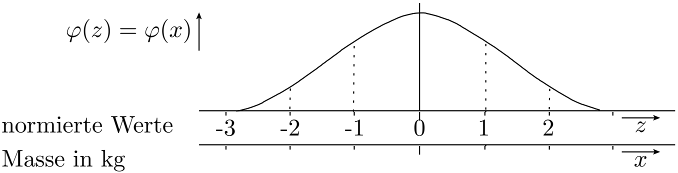


2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gilt $0{,}98\,\mathrm{kg} \le X \le 1{,}02\,\mathrm{kg}$?



Lösung Aufgabenteil 1

$E(X) = 1\,\mathrm{kg}$, Standardabweichung von 10 g. Gesucht $P(X > 1{,}03\,\mathrm{kg})$.

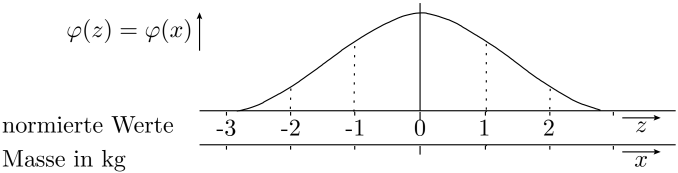


Zurückführung auf die standardisierte Normalverteilung:

- transformierte Untergrenze: $z_{\max} = \frac{x_{\max} - E(X)}{\sqrt{D^2(X)}} = \ldots$
- Gesuchte Wahrscheinlichkeit: $X > 1{,}03\,\mathrm{kg} = \ldots$

Lösung Aufgabenteil 2

$E(X) = 1\,\text{kg}$, Standardabweichung von 10 g. Gesucht $P(9{,}98\,\text{kg} \le X \le 10{,}02\,\text{kg})$.

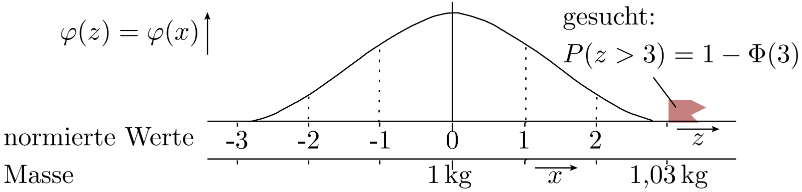


- transformierte Untergrenze: $z_{\text{min}} = \frac{x_{\text{min}} -}{\sqrt{D^2(X)}} =$
- transformierte Obergrenze: $z_{\text{max}} = \frac{x_{\text{max}} -}{\sqrt{D^2(X)}} =$
- Gesuchte Wahrscheinlichkeit: $\Phi(\qquad) - \Phi(\qquad) =$

Zur Kontrolle

... $E(X) = 1\,\mathrm{kg}$ und einer Standardabweichung von 10 g.

1 Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist $X > 1{,}03\,\mathrm{kg}$?



z	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

- Gesuchte Wahrscheinlichkeit: $1 - \Phi(3) = 0{,}13\%$

... $E(X) = 1\,\mathrm{kg}$ und einer Standardabweichung von 10 g.

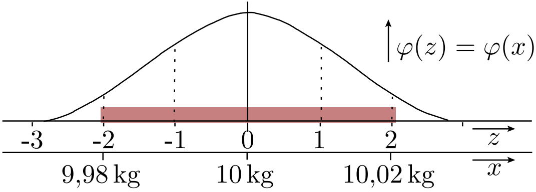
2 Mit welcher Wahrscheinlichkeit gilt $9{,}98\,\mathrm{kg} \le X \le 10{,}02\,\mathrm{kg}$?

gesucht:

$$P(-2 \le z \le 2)$$
$$= \Phi(2) - \Phi(-2)$$

normierte Werte

Masse



z	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

- Gesuchte Wahrscheinlichkeit:
  $\Phi(2) - \Phi(-2) = 2 \cdot \Phi(2) - 1 = 95{,}44\%$

Kleine Zählwerte

Aufgabe 6.12: Maskierungsanzahl

Bei der Überwachung von Service-Ergebnissen wird im Mittel eine von tausend Fehlfunktion (FF) nicht erkannt. Wie wahrscheinlich ist es, dass

1. von tausend FF keine,
2. von tausend FF mehr als eine,
3. von 5000 FF weniger als 3 und
4. von 5000 FF mehr als 8

Fehlfunktion unerkannt bleiben?

Zur Kontrolle

Bei der Überwachung von Service-Ergebnissen wird im Mittel eine von tausend Fehlfunktion nicht erkannt. Wie wahrscheinlich ist es, dass von

1. 1000 FF keine,
2. tausend FF mehr als eine,
3. 5000 FF weniger als 3 und
4. von 5000 FF mehr als 8

Berechnung	Lösung
poiscdf(1,0):	36,8%
1-poscdf(1,1):	26,4%
poiscdf(5,2):	12,5%
1−poiscdf(5,8):	6,81%

Fehlfunktion unerkannt bleiben?

Aufgabe 6.13: Schadensfälle

Die zu erwartende Anzahl der Schadensfälle pro Jahr für ein bestimmtes Risiko betrage 8,3.

1. Welche Anzahl von Schadensfällen pro Jahr wird mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha_1 = 2\%$ nicht unterschritten?
2. Welche Anzahl von Schadensfällen pro Jahr wird mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha_2 = 2\%$ nicht überschritten?

Zur Kontrolle

$E(X) = 8{,}3$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 2\%$.

1. Welche Anzahl von Schadensfällen wird mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha_1 = 2\%$ nicht unterschritten?
2. Welche Anzahl von Schadensfällen wird mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha_2 = 2\%$ nicht überschritten?

Lösung:

	Berechnung	Ergebnis
1	pois_k_min(0.02,8.3)	3
2	pois_k_max(0.02,8.3)	16

Schätzen von $E(X)$ und p

Aufgabe 6.14: Maskierungswahrscheinlichkeit

Bei einer Überwachung wurden von $N = 1000$ Fehlfunktionen $x_{\text{ist}} = 178$ nicht erkannt. In welchem Bereich liegen der Erwartungswert der Anzahl der Maskierungen und die Maskierungswahrscheinlichkeit p? Zulässige Irrtumswahrscheinlichkeit sei $\alpha = 1\%$. Keine Maskierungabhängigkeiten $(\kappa = 1)$.

α	4,54%	0,26%	0	4%	2%	1%	0,4%	0,2%
$\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

Min. und max. Erwartungswert der Anzahl der Maskierungen:

$$E(X)_{\min/\max} = \qquad\qquad \mp$$

Bereich der Maskierungswahrscheinlichkeit:

$$p_{\min/\max} =$$

Zur Kontrolle

Min. und max. Erwartungswert der Anzahl der Maskierungen:

$$E(X)_{\min\,/\,\max} = x_{\mathrm{ist}} \mp \sqrt{\kappa \cdot x_{\mathrm{ist}} \cdot \left(1 - \frac{x_{\mathrm{ist}}}{N}\right)} \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= 178 \mp \sqrt{178 \cdot \left(1 - \frac{178}{1000}\right)} \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{1\%}{2}\right)$$

α	4,54%	0,26%	0	4%	2%	1%	0,4%	0,2%
$\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

$$E(X)_{\min\,/\,\max} = [147,\ 209]$$

Bereich der Maskierungswahrscheinlichkeit:

$$p_{\min\,/\,\max} = [14{,}7\%,\ 20{,}9\%]$$

Aufgabe 6.15: Wahrscheinlichkeit einer FF

Zur Abschätzung der Wahrscheinlichkeit p für ein Service-Versagen wurden für $N = 10^6$ Service-Anforderungen $x_{\text{ist}} = 430$ FF gezählt.

1. Wie groß ist der Schätzwert p_{S} der Wahrscheinlichkeit einer FF?
2. Wie groß ist die Irrtumswahrscheinlichkeit α, dass p außerhalb eines Intervalls $p_{\text{S}} \cdot (1 \pm 10\%)$ liegt?
3. Mit wie vielen Service-Anforderungen ist die Überprüfung fortzusetzen, um die Irrtumswahrscheinlichkeit auf $\alpha \leq 1\%$ abzusenken?

Lösung Aufgabenteil 1 und 2

1. Der Schätzwert der Eintrittswahrscheinlichkeit ist

$$p_{\mathrm{S}}=\frac{x_{\mathrm{ist}}}{N}=\frac{430}{10^{6}}$$

---

2. Wie groß ist die Irrtumswahrscheinlichkeit α, dass p außerhalb eines Intervalls $p_{\mathrm{S}}\cdot(1\pm 10\%)$ liegt?

Auflösung der Gleichung

$$x_{\mathrm{ist.\,min}}=\frac{1}{\frac{1}{N}+\frac{\varepsilon_{\mathrm{rel}}^{2}}{\kappa\cdot\left(\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)^{2}}}$$

nach α:

$$\alpha=2\cdot\left(1-\Phi\left(\varepsilon_{\mathrm{rel}}\cdot\sqrt{\frac{1}{\kappa\cdot\left(\frac{1}{x_{\mathrm{ist}}}-\frac{1}{N}\right)}}\right)\right)$$

Mit $x_{\text{ist}} = 430$; $\varepsilon_{\text{rel}} = 10\%$; $\kappa = 1$ (keine Abhängigkeiten gegeben) und $N = 10^6$:

$$\alpha = 2 \cdot \left(1 - \Phi\left(0{,}1 \cdot \sqrt{\frac{1}{1 \cdot \left(\frac{1}{430} - \frac{1}{10^6}\right)}}\right)\right) = 2 \cdot (1 - \Phi(2{,}07))$$

z	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

$$\alpha = 2 \cdot (1 - \Phi(2{,}07)) = 3{,}58\%$$

---

3. Mit wie vielen Service-Anforderungen ist die Überprüfung fortzusetzen, um die Irrtumswahrscheinlichkeit auf $\alpha \leq 1\%$ abzusenken?

Mit wie vielen Service-Anforderungen ist die Überprüfung fortzusetzen, um die Irrtumswahrscheinlichkeit auf $\alpha \leq 1\%$ abzusenken?

Fortsetzung bis zum Zählwert:

$$x_{\text{ist}} = \frac{1}{\left[\frac{1}{N}+\right] \frac{\varepsilon_{\text{rel}}^2}{[\kappa\cdot]\left(\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2}} \approx \frac{\left(\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2}{\varepsilon_{\text{rel}}^2} = \frac{\left(\Phi^{-1}\left(1-\frac{1\%}{2}\right)\right)^2}{0{,}1^2}$$

α	4,54%	0,26%	0	4%	2%	1%	0,4%	0,2%
$\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

$$x_{\text{ist}} \approx \left(\frac{2{,}75}{0{,}1}\right)^2 = 756{,}25$$

Mit der Eintrittswahrscheinlichkeit aus Aufgabenteil 1: ...

$$x_{\text{ist}} \approx \left(\frac{2{,}75}{0{,}1}\right)^2 = 756{,}25$$

Mit der Eintrittswahrscheinlichkeit aus Aufgabenteil 1:

$$\begin{aligned} p_{\text{S}} &= \frac{x_{\text{ist}}}{N} = \frac{430}{10^6} \\ N &= \frac{756{,}25}{430} \cdot 10^6 = 1{,}7587 \cdot 10^6 \end{aligned}$$

Die Überprüfung ist etwa mit $N - 10^6 = 758.700$ Service-Anforderungen fortzusetzen.

Aufgabe 6.16: Vergleichsfenster

Zwei zu vergleichende voneinander unabhängige normalverteilte Zufallsgrößen X_1 und X_2 haben denselben Erwartungswert und die Standardabweichungen $\sqrt{D^2(X_1)} = 3$ und $\sqrt{D^2(X_1)} = 4$. Wie groß ist für eine Kontrolle

```
if (abs(X1-X2)>eps) {<Fehlerbehandlung>};
```

der Radius ε des Vergleichsfenster mindestens zu wählen, damit die Wahrscheinlichkeit für Vergleichs-Phantom-FF $p_{\mathrm{Phan}} \le 0{,}1\%$ ist?

$E(X_1 - X_2) =$ $\qquad$ $\varepsilon =$

$\sqrt{D^2(X_1 - X_2)} =$

z	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

Zur Kontrolle

- Der Erwartungswert der Differenz unabhängiger Zufallsgrößen ist die Differenz der Erwartungswerte:

$$E(X_1 - X_2) = 0$$

- Die Varianz der Differenzen ist die Summe der Varianzen:

$$\sqrt{D^2(X_1 - X_2)} = \sqrt{D^2(X_1) + D^2(X_2)} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

- Standadisierter Normalverteilungswert für beiderseitig $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}05\%$ ist etwa 3,3.

z	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

- Mindestintervallradius für das Vergleichsfenster:

$$\varepsilon \approx 3{,}3 \cdot 5 = 16{,}5$$

Aufgabe 6.17: Mindestmodellfehleranzahl

Wie groß muss die effektive Modellfehleranzahl mindestens sein und wie viele Fehler davon muss der Test nachweisen, um mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha \leq 2\%$ für eine zu erwartende Modellfehlerüberdeckung im Bereich von 98,6% bis 99,4% garantieren zu können?

Annahmen:

- Die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler φ_{NErk} sei normalverteilt.

Hinweis:

- »effektive Modellfehleranzahl« impliziert $\kappa = 1$ und Varianz gleich der einer Binomialverteilung mit demselben Erwartungswert.

Mindestanzahl der Modellfehler Fehler φ_{M}, um mit $\alpha \leq 2\%$ für $FC_{\mathrm{M}} = 98{,}6\% \ldots 99{,}4\%$ garantieren zu können?

Für eine symmetrische Bereichsschätzung von Zählwerten

$$x_{\min/\max} = E(X) \mp \sqrt{\kappa \cdot E(X) \cdot \left(1 - \frac{E(X)}{N}\right)} \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

sind die Zählwerte nicht erkannten Modellfehler; Minimum, Maximum und Erwartungswert proportional zur Modellfehleranzahl φ_{M}; $1 - \frac{E(X)}{N} = E(FC)$, $\kappa = 1$ und $\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = 2{,}33$:

$x_{\max} - x_{\min} =$

$\varphi_{\mathrm{M}} =$

Zur Kontrolle

$$x_{\min\,/\,\max} = E(X) \mp \sqrt{\kappa \cdot E(X) \cdot \left(1 - \frac{E(X)}{N}\right)} \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Minimum, Maximum und Erwartungswert proportional zur Modellfehleranzahl: $x_{\min} = \varphi_{\mathrm{M}} \cdot 0{,}6\%$, $x_{\max} = \varphi_{\mathrm{M}} \cdot 1{,}4\%$ und $E(X) = \varphi_{\mathrm{M}} \cdot 1\%$. $1 - \frac{E(X)}{N} = E(FC) = 99\%$. $\kappa = 1$.

α	4,54%	0,26%	0	4%	2%	1%	0,4%	0,2%
$\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

$$\begin{aligned} x_{\max} - x_{\min} &= \varphi_{\mathrm{M}} \cdot 0{,}8\% = 2 \cdot \sqrt{\varphi_{\mathrm{M}} \cdot 0{,}99\%} \cdot 2{,}33 \\ \varphi_{\mathrm{M}} &= 0{,}0099 \cdot \left(\frac{2,33}{0,004}\right)^2 = 3359 \end{aligned}$$

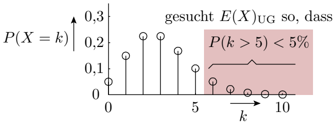
Was besagt das Ergebnis?

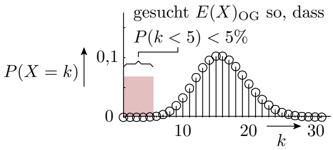
- Die Fehlersimulation muss mit mindestens 3359 unabhängig voneinander nachweisbaren Modellfehlern erfolgen.
- Eine Fehlerüberdeckung von $98{,}6\%\ldots 99{,}4\%$ mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit, verlangt eine Testsatzlänge, die 99% dieser Modellfehler, d.h. alle außer ca. 34 nachweist.
- Bei Abhängigkeiten im Fehlernachweis muss die Modelfehleranzahl κ-mal so groß sein.
- Redundate Fehler in der Fehlermenge sind problematisch, weil sie als nicht nachweisbare Fehler gezählt werden, aber eigentlich keine Fehler sind.

Aufgabe 6.18: Zuverlässigkeitsintervall

Beim Test von 10^3 Service-Leistungen eines Systems wurden 5 Fehlfunktionen beobachtet. Für welchen Bereich der Zuverlässigkeit kann nach diesem Versuchsergebnis mit den Irrtumswahrscheinlichkeiten $\alpha_1 = \alpha_2 = 5\%$ garantiert werden?

Garantierbare Unter- und Obergrenze des Erwartungswerts:





- $e^{-E(X)_{\mathrm{UG}}} \cdot \sum_{k=0}^{5} \frac{E(X)_{\mathrm{UG}}^k}{k} \geq 95\%$; Überschlag: $E(X)_{\mathrm{UG}} \approx$
- $e^{-E(X)_{\mathrm{OG}}} \cdot \sum_{k=0}^{4} \frac{E(X)_{\mathrm{OG}}^k}{k} < 5\%$; Überschlag: $E(X)_{\mathrm{OG}} \approx$

	$\alpha_1 = \alpha_2 = 5\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 10\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 20\%$	
x_{ist}	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$
4	1,970	7,754	2,432	6,680	3,089	5,515
5	2,613	9,154	3,152	7,993	3,903	6,722
6	3,285	10,513	3,894	9,275	4,733	7,906

Bereich der

- Eintrittswahrscheinlichkeit einer Fehlerlfunktion p_{FF} und
- der zu erwartenden Zuverlässigkeit $E(Z)$:

	Grenze 1	Grenze 2
Anzahl FF	$E(X)_{\text{UG}} \approx$	$E(X)_{\text{OG}} \approx$
p_{FF}		
$E(Z)$		

Zur Kontrolle

$N = 10^3$ Service-Leistungen ... 5 Fehlfunktionen.

Garantierbare Unter- und Obergrenze des Erwartungswerts:

	$\alpha_1 = \alpha_2 = 5\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 10\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 20\%$	
x_{ist}	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$
5	2,613	9,154	3,152	7,993	3,903	6,722

Eintrittswahrscheinlichkeits- und Zuverlässigkeitsbereich:

	Grenze 1	Grenze 2
Anzahl FF	$E(X)_{\text{UG}} \approx 3{,}15$	$E(X)_{\text{OG}} \approx 7{,}99$
$p_{\text{FF}} = \frac{E(X)_{\text{UG/OG}}}{1000}$	0,315%	0,799
$E(Z) = \frac{1}{p_{\text{FF}}}$	317 $\frac{\text{SL}}{\text{FF}}$	250 $\frac{\text{SL}}{\text{FF}}$

Aufgabe 6.19: Diversitätsabschätzung

Bei einer Kontrolle durch Verdopplung und Vergleich wurden von $N_{\mathrm{FF}} = 300$ Fehlfunktionen $N_{\mathrm{FF.NErk}} = 5$ nicht erkannt.

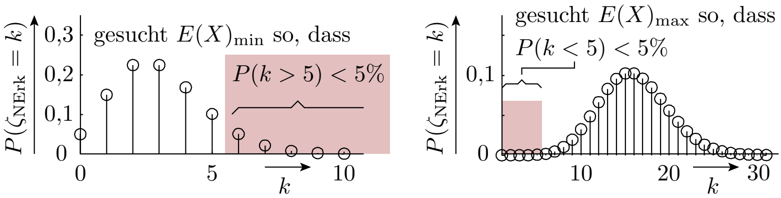
1. Auf welchen Bereich der zu erwartenden Anzahl der nicht erkannten Fehlfunktionen lässt das Experiment schließen? Zulässige Irrtumswahrscheinlichkeiten, dass im Experiment ein Werte oberhalb oder unterhalb des Bereichs hätte auftreten können, $\alpha_1 = \alpha_2 = 5\%$.
2. Auf welchen Bereich der Diversität lässt das Experiment schließen?

	$\alpha_1 = \alpha_2 = 5\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 10\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 20\%$	
x_{ist}	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$
5	2,613	9,154	3,152	7,993	3,903	6,722
6	3,285	10,513	3,894	9,275	4,733	7,906

Zur Kontrolle

Von $N_{\mathrm{FF}} = 300$ Fehlfunktionen wurden $x_{\mathrm{ist}} = N_{\mathrm{FF.NErk}} = 5$ nicht erkannt. Zulässige Irrtumswahrscheinlichkeiten: $\alpha_1 = \alpha_2 = 5\%$.

Garantierbare Unter- und Obergrenze des Erwartungswerts:



	$\alpha_1 = \alpha_2 = 5\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 10\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 20\%$	
x_{ist}	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$
5	2,613	9,154	3,152	7,993	3,903	6,722
6	3,285	10,513	3,894	9,275	4,733	7,906

	$\alpha_1 = \alpha_2 = 5\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 10\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 20\%$	
x_{ist}	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$
5	2,613	9,154	3,152	7,993	3,903	6,722
6	3,285	10,513	3,894	9,275	4,733	7,906

Bereich der Diversität mit $X = N_{\text{FF.NErk}}$:

	Grenze 1	Grenze 2
Anzahl FF	$E(X)_{\text{UG}} \approx 2{,}613$	$E(X)_{\text{OG}} \approx 9{,}154$
$E(Div) = \frac{300}{E(X)_{\dots}}$	≈114	≈33

Aufgabe 6.20: Bereichsschätzung Kapazitätswerte

Gegeben ist eine Stichprobe gemessener Kapazitätswerte in nF:

$$C: 1{,}20,\ 1{,}23,\ 1{,}18,\ 1{,}25,\ 1{,}21,\ 1{,}19,\ 1{,}23,\ 1{,}22,\ 1{,}09,\ 1{,}17$$

In welchem Bereich liegt mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 2% der Erwartungswert

1. wenn die Kapazitätswerte normalverteilt sind,
2. nach der tschebyscheffschen Ungleichung?

- geschätzter Erwartungswert: $E_{\mathrm{S}}(C) =$
- geschätzte Standardabweichung: $\sqrt{D^2_{\mathrm{S}}(C)} =$

	Intervallradius	gesuchter Bereich
normalverteilt		
tscheb. Ungl.		

Zur Kontrolle

- $E_{\mathrm{S}}(C) = \frac{1{,}20+1{,}23+1{,}18+1{,}25+1{,}21+1{,}19+1{,}23+1{,}22+1{,}09+1{,}17}{10} = 1{,}179$
- $\sqrt{D_{\mathrm{S}}^2(C)} = \sqrt{\frac{(1{,}20-1{,}179)^2+(1{,}23-1{,}179)^2+\ldots}{9}} = 0,0450$

Intervallradius:

- normalverteilt: $\varepsilon_{\mathrm{norm}} = \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sqrt{D_{\mathrm{S}}^2(C)} = 0{,}0922$

α	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
$\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

- tscheb. Ungl.: $\varepsilon_{\mathrm{tscheb}} = \sqrt{\frac{D_{\mathrm{S}}^2(C)}{\alpha}} = \frac{0{,}0540}{\sqrt{2\%}} = 0{,}3182$

Gesuchter Bereich:

- normalverteilt: $E_{\mathrm{S}}(C) \pm \varepsilon_{\mathrm{norm}} = [1{,}105,\ 1{,}289]$
- tscheb. Ungl.: $E_{\mathrm{S}}(C) \pm \varepsilon_{\mathrm{tscheb}}\ [0{,}861,\ 1{,}497]$

Um für eine Modellfehlerüberdeckung von $FC_{\mathrm{M}} = 99\%$ zu garantieren, soll das Simulationsabbruchkriterium

Zur Kontrolle

Tabelle der Unter- und Obergrenzen des Erwartungswertes:

	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}5\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 2\%$	
X_{ist}	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$
0	0,005	5,299	0,01	4,606	0,02	3,912
1	0,103	7,430	0,148	6,639	0,215	5,835
2	0,338	9,274	0,436	8,405	0,567	7,517

Erforderliche Modellfehleranzahl:

$$\varphi_{\mathrm{M}} = \frac{E\left(\varphi_{\mathrm{NErk}}\right)_{\max}}{1 - FC_{\mathrm{M}}} = 100 \cdot E\left(\varphi_{\mathrm{NErk}}\right)_{\max}$$

$\varphi_{\mathrm{NErk.ist}}$	0	1	2
φ_{M}	392	584	751

Zufallstest

Aufgabe 6.21: Verteilung der Anzahl nachw. Fehler

Der nachfolgende Matlab-Vektor enthält für 20 Modellfehler die Nachweiswahrscheinlichkeiten je Service-Anforderung :

```
p0 = [0.9 0.8 0.75 0.5 0.4 0.36 0.2 0.15
      0.08 0.072 0.04 0.03 0.016
      0.007 0.002 0.0018
      8E-4 4E-4  2E-5 6E-6]
```

Bestimmen Sie für eine Anzahl von $n = 10^4$ Service-Anforderungen

1. die Nachweiswahrscheinlichkeiten aller Fehler,
2. den Erwartungswert der Anzahl der nachweisbaren Fehler,
3. die Varianz der Anzahl der nachweisbaren Fehler und
4. die Verteilung der Anzahl der nachweisbaren Fehler

unter der Annahme, dass alle Modellfehler unabhängig voneinander nachweisbar sind.

Zur Kontrolle

1. Nachweiswahrscheinlichkeiten für $n = 1000$:

```
p0 = [0.9 0.8 0.75 0.5 0.4 0.36 0.2  ... ];
for i=1:20  p(i) = 1 - exp(-p0(i)*n); end;
```

Fehler	1 bis 13	14	15	16	17	18	19	20
$p_i(n)$	100%	99,9%	86,5%	83,5%	55,1%	33,0%	2,0%	0,6%

2. Erwartungswert: 18,6
3. Standardabweichung: 0,866
4. Verteilung:

k	0 bis 13	14	15	16	17	18	19	20
$P(X = k)$	0	0,7%	8,68%	34,7%	41,8%	13,8%	0,3%	0

Aufgabe 6.22: Simulationsabbruch bei $\varphi_{\mathrm{NErk.ist}} = 20$

Um für eine Modellfehlerüberdeckung von $FC_{\mathrm{M}} = 99\%$ zu garantieren, soll das Simulationsabbruchkriterium

$$\varphi_{\mathrm{NErk.ist}} = 20$$

sein. Wie groß muss die Anzahl der nicht redundanten Modellfehler φ_{M} bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha_1 = \alpha_2 = 2\%$ sein?

Annahmen:

- Vernachlässigbare Abhängigkeiten im Fehlernachweis ($\kappa = 1$).
- φ_{NErk} (Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler) normalverteiltverteilt.
- Varianz von φ_{NErk} ist ungefähr gleich dem Istwert.

Lösungsweg wie in der Aufgabe zuvor nur mit Normalverteilung.

Zur Kontrolle

- Bestimmung der Obergrenze des Erwartungswerts:

$$\begin{aligned} E\left(\varphi_{\mathrm{NErk}}\right)_{\max} &= \varphi_{\mathrm{NErk}} + \Phi^{-1}\left(1-\alpha_2\right) \cdot \sqrt{\varphi_{\mathrm{NErk}}} \\ &= 20 + 2{,}05 \cdot \sqrt{20} = 29{,}17 \end{aligned}$$

α	2,27%	0,13%	0	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
$\Phi^{-1}(1-\alpha)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

- Erforderliche Modellfehleranzahl:

$$\varphi_{\mathrm{M}} = \frac{E\left(\varphi_{\mathrm{NErk}}\right)_{\max}}{1 - FC_{\mathrm{M}}} = 100 \cdot E\left(\varphi_{\mathrm{NErk}}\right)_{\max} = 2917$$

- Bei Abhängigkeiten im Fehlernachweis κ-facher Wert.

Aufgabe 6.23: Anzahl der Fehler und FF

Für einen bestimmten Systemtyp gelte als Richtwert, dass die zehnfache Länge eines Zufallstests die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler auf ein Drittel verringert.

1. Auf welchen Exponenten k einer QQF-Potenzfunktion lässt das schließen?
2. Auf welchen Anteil verringert sich, wenn alle nachweisbaren Fehler beseitigt werden, die Wahrscheinlichkeit einer durch Fehler verursachten FF durch Verzehnfachung der Testsatzlänge?
3. Um welchen Faktor ist die Testsatzlänge zu erhöhen, um die Zuverlässigkeit um den Faktor 1000 zu erhöhen?

Zur Kontrolle

1. Exponent der der QQ-Potenzfunktion:

$$\frac{E(\varphi(n_0))}{E(\varphi(n))} = 3 = \left(\frac{n}{n_0}\right)^k = 10^k; \quad k = \frac{\ln(3)}{\ln(10)} = 0{,}477$$

2. Verringerung der Wahrscheinlichkeit einer durch Fehler verursachten FF bei 10-facher Testsatzlänge:

$$\frac{(p_{\mathrm{FFF}}(10\cdot n_0))}{p_{\mathrm{FFF}}(n_0)} = \left(\frac{n_0}{10\cdot n_0}\right)^{k+1} = 10^{-1{,}477} = 0{,}0333$$

3. Testsatzverlängerung für die 1000-fache Zuverlässigkeit:

$$\begin{aligned}\frac{Z_{\mathrm{F}}(n)}{Z_{\mathrm{F}}(n_0)}\frac{(p_{\mathrm{FFF}}(n_0))}{p_{\mathrm{FFF}}(n)} &= 1000 = \left(\frac{n}{n_0}\right)^{k+1}\\ \frac{n}{n_0} &= 1000^{\frac{1}{1{,}477}} = 107\end{aligned}$$

Die 1000-fache Zuverlässigkeit verlangt etwa den 100-fachen Testaufwand.