

Test und Verlässlichkeit Grosse Übung zu Foliensatz 2

Prof. G. Kemnitz

18. November 2016

Contents

1	Zufallstest	1
1.1	Nachweiswahrscheinlichkeit	1
1.2	Anzahl der Fehler und FF	2
1.3	Steuer- und Beobachtbarkeit	3
1.4	Operationsprofil und Wichtung	3
2	Verteilungen	4
2.1	Erwartungswert, Varianz	4
2.2	Lineare Transformationen,	4
2.3	Verteilung von Zählwerten	6
2.4	Binomialverteilung	7
2.5	Effektive Anzahl der Zählversuche	7
2.6	Poisson-Verteilung	8
2.7	Multimodale Verteilungen	8
2.8	Verteilung der Fehleranzahl	9
3	Kennwerte schätzen	9
3.1	FHSF-Funktion	9
3.2	Bereichsschätzung	11
3.3	Kleine Zählwerte	12
3.4	Erwartungswert und Eintrittswahrscheinlichkeit	13
3.5	Seltene Ereignisse	16
3.6	Verteilung unbekannt	16
3.7	Länge von Zufallstests	17

1 Zufallstest

1.1 Nachweiswahrscheinlichkeit

Aufgabe 2.1: Nachweiswahrscheinlichkeit

Ein System hat im Mittel bei jeder 10^4 -ten Service-Leistung eine Fehlfunktion. 70% der FF werden einem ersten, 20% einem zweiten und die restlichen 10% nicht lokalisierbaren Fehler zugeordnet.

1. Welche Nachweiswahrscheinlichkeiten p_1 und p_2 haben die beiden zugeordneten Fehler?
2. Wie lang muss ein Zufallstest mindestens sein, damit der schlechter nachweisbare zugeordnete Fehler mindestens mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% nachgewiesen wird?
3. Welche Zuverlässigkeit ist für das System zu erwarten, wenn die beiden zugeordneten Fehler beseitigt sind?

Zur Kontrolle

1. Nachweiswahrscheinlichkeiten der beiden zugeordneten Fehler:

$$p_1 = 0,7 \cdot 10^{-4}; \quad p_2 = 0,2 \cdot 10^{-4}$$

2. Testsatzlänge für den Nachweis von Fehler 2:

$$\begin{aligned} 99\% \geq p_2(n) &= 1 - e^{-n \cdot p_2} \\ n &\geq -\frac{\ln(1 - 99\%)}{p_2} = 2,3 \cdot 10^5 \end{aligned}$$

3. Nach Beseitigung der zugeordneten Fehler ist eine Verringerung der Häufigkeit der FF auf 10% und damit eine Verzehnfachung der Zuverlässigkeit zu erwarten:

$$Z = 10^5 \frac{\text{SL}}{\text{FF}}$$

Aufgabe 2.2: Fehlerbezogene Zuverlässigkeit

Ein System habe zwei Fehler mit den Nachweiswahrscheinlichkeiten $p_1 = 3 \cdot 10^{-3}$ und $p_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ je Service-Leistung.

1. Wie groß ist die fehlerbezogene Zuverlässigkeit¹?
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit weist ein Zufallstest der Länge $n = 1000$ jeden der beiden Fehler nach?
3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mit 1000 Service-Leistungen nachweisbar, dass das System fehlerhaft ist?

Zur Kontrolle

1. Fehlerbezogene Zuverlässigkeit:

- Wahrscheinlichkeit einer durch Fehler verursachte FF/SL:

$$p_{\text{FFF}} = 1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \approx p_1 + p_2 = 5 \cdot 10^{-3}$$

- Zuverlässigkeit:

$$Z = \frac{1}{p_{\text{FFF}}} = 200 \frac{\text{SL}}{\text{FF}}$$

2. Nachweiswahrscheinlichkeit mit einem Zufallstest der Länge $n = 1000$:

- Fehler 1: $p_1(1000) = 1 - e^{-1000 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 1 - e^{-3} = 95,02\%$
- Fehler 2: $p_2(1000) = 1 - e^{-1000 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 1 - e^{-2} = 86,47\%$

3. »System fehlerhaft« ist nachweisbar, wenn mindestens ein Fehler nachweisbar ist:

$$p_{1 \vee 2}(1000) = 1 - e^{-1000 \cdot (p_1 + p_2)} = 1 - e^{-5} = 99,3\%$$

1.2 Anzahl der Fehler und FF**Aufgabe 2.3: Anzahl der Fehler und FF**

Für einen bestimmten Systemtyp gelte als Richtwert, dass die zehnfache Länge eines Zufallstests die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler auf ein Drittel verringert.

1. Auf welchen Exponenten k einer FHSF-Potenzfunktion lässt das schließen?
2. Auf welchen Anteil verringert sich, wenn alle nachweisbaren Fehler beseitigt werden, die Wahrscheinlichkeit einer durch Fehler verursachten FF durch Verzehnfachung der Testsatzlänge?
3. Um welchen Faktor ist die Testsatzlänge zu erhöhen, um die Zuverlässigkeit um den Faktor 1000 zu erhöhen?

¹Mittlere Anzahl der Service-Leistungen zwischen zwei durch Fehler verursachte Fehlfunktionen.

Zur Kontrolle

1. Exponent der der FHSF-Potenzfunktion:

$$\frac{E(\varphi(n_0))}{E(\varphi(n))} = 3 = \left(\frac{n}{n_0}\right)^k = 10^k; \quad k = \frac{\ln(3)}{\ln(10)} = 0,477$$

2. Verringerung der Wahrscheinlichkeit einer durch Fehler verursachten FF bei 10-facher Testsatzlänge:

$$\frac{(p_{\text{FFF}}(10 \cdot n_0))}{p_{\text{FFF}}(n_0)} = \left(\frac{n_0}{10 \cdot n_0}\right)^{k+1} = 10^{-1,477} = 0,0333$$

3. Testsatzverlängerung für die 1000-fache Zuverlässigkeit:

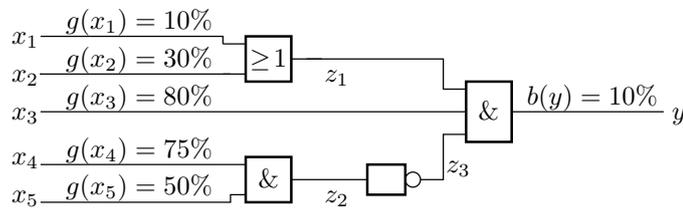
$$\frac{Z_F(n)}{Z_F(n_0)} \frac{(p_{\text{FFF}}(n_0))}{p_{\text{FFF}}(n)} = 1000 = \left(\frac{n}{n_0}\right)^{k+1}$$

$$\frac{n}{n_0} = 1000^{\frac{1}{1,477}} = 107$$

Die 1000-fache Zuverlässigkeit verlangt etwa den 100-fachen Testaufwand.

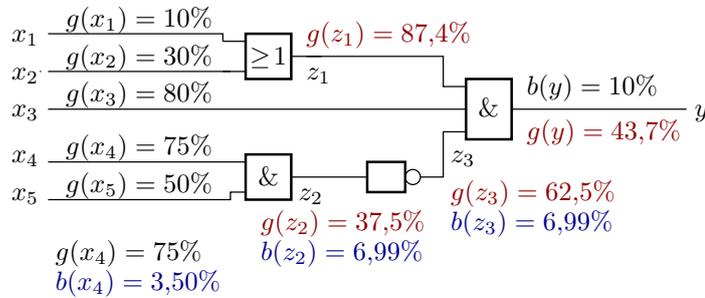
1.3 Steuer- und Beobachtbarkeit

Aufgabe 2.4: Wichtung und Beobachtbarkeit



1. Bestimmen Sie die Wichtungen der Signale z_1, z_2, z_3 und y .
2. Bestimmen Sie die Beobachtbarkeit des Eingangs x_4 .

Zur Kontrolle



1.4 Operationsprofil und Wichtung

Aufgabe 2.5: Operationsprofil

Gegeben sind eine Liste von Operationen, je Operation die Wahrscheinlichkeiten einer Fehlfunktion je Service-Leistung und zwei Operationsprofile:

i	Operation	$p_{\text{FF},i}$	Profil A	Profil B
1	editieren	$5 \cdot 10^{-3}$	35%	48%
2	löschen	$2 \cdot 10^{-4}$	12%	17%
3	browse	$4 \cdot 10^{-2}$	46%	25%
4	drucken	10^{-2}	7%	10%

Wie groß sind für jedes der beiden Operationsprofile

1. die Wahrscheinlichkeit einer Fehlfunktion je Service-Leistung,
2. die Zuverlässigkeit?

Zur Kontrolle

1. Die Wahrscheinlichkeit einer Fehlfunktion je Service-Leistung ist der gewichtete Mittelwert:

$$\begin{aligned} p_{\text{FFF.A}} &= 35\% \cdot 5 \cdot 10^{-3} + 12\% \cdot 2 \cdot 10^{-4} \\ &+ 46\% \cdot 4 \cdot 10^{-2} + 7\% \cdot 10^{-2} = 2,09\% \\ p_{\text{FFF.B}} &= 48\% \cdot 5 \cdot 10^{-3} + 17\% \cdot 2 \cdot 10^{-4} \\ &+ 25\% \cdot 4 \cdot 10^{-2} + 10\% \cdot 10^{-2} = 1,34\% \end{aligned}$$

2. Die Zuverlässigkeiten in Service-Leistungen je Fehlfunktion sind die Kehrwerte davon:

$$\begin{aligned} Z_{\text{F.A}} &= \frac{1}{p_{\text{FFFA}}} = 47,9 \\ Z_{\text{F.B}} &= \frac{1}{p_{\text{FFFB}}} = 74,4 \end{aligned}$$

2 Verteilungen**2.1 Erwartungswert, Varianz****Aufgabe 2.6: Erwartungswert und Varianz**

Gegeben ist die Verteilung:

mögliche Ergebnisse x_i	0	1	2
Wahrscheinlichkeit p_i	20%	65%	15%

Berechnen Sie:

- den Erwartungswert,
- die Varianz ohne Nutzung des Verschiebungssatzes,
- die Varianz unter Nutzung des Verschiebungssatzes.

Zur Kontrolle

mögliche Ergebnisse x_i	0	1	2
Wahrscheinlichkeit p_i	20%	65%	15%

1. Erwartungswert:

$$E(X) = 0 \cdot 20\% + 1 \cdot 65\% + 2 \cdot 15\% = 0,95$$

2. Varianz ohne Verschiebungssatz:

$$\begin{aligned} D^2(X) &= 20\% \cdot (0 - 0,95)^2 + 65\% \cdot (1 - 0,95)^2 \\ &+ 15\% \cdot (2 - 0,95)^2 \\ &= 0,3475 \end{aligned}$$

3. Varianz unter Nutzung des Verschiebungssatzes:

$$D^2(X) = 20\% \cdot 0^2 + 65\% \cdot 1^2 + 15\% \cdot 2^2 - 0,95^2 = 0,3475$$

2.2 Lineare Transformationen, ...**Aufgabe 2.7: Varianz bei lin. Transformation**

Kontrollieren Sie die Gleichungen zur linearen Transformation

1. für den Erwartungswert:

$$E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$$

2. für die Varianz:

$$D^2(a \cdot X + b) = a^2 \cdot D^2(X)$$

Zur Kontrolle

1. Erwartungswert:

$$\begin{aligned} E(a \cdot X + b) &= \sum_{i=1}^N p_i \cdot (a \cdot x_i + b) \\ &= a \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^N p_i \cdot x_i}_{E(X)} + \underbrace{\sum_{i=1}^N p_i \cdot b}_b \end{aligned}$$

2. Varianz:

$$\begin{aligned} D^2(a \cdot X + b) &= \sum_{i=1}^N p_i \cdot (a \cdot x_i + b - (a \cdot E(X) + b))^2 \\ &= a^2 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^N p_i \cdot (x_i - E(X))^2}_{D^2(X)} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.8: Varianz der Summe von Zufallsgrößen

Zeigen Sie, dass die Varianz der Summe zweier Zufallsgrößen gleich der Summe der Varianzen plus der doppelten Kovarianz ist:

$$D^2(X + Y) = D^2(X) + D^2(Y) + 2 \cdot \text{Cov}(X, Y)$$

mit der Kovarianz:

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y)))$$

Zur Kontrolle

$$\begin{aligned} D^2(X + Y) &= \sum_{i=1}^{N_x} \left(\sum_{j=1}^{N_y} (p_i \cdot p_j \cdot (x_i - E(X) + y_j - E(Y))^2) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{N_x} \left(\sum_{j=1}^{N_y} (p_i \cdot p_j \cdot ((x_i - E(X))^2 + (y_j - E(Y))^2 + 2 \cdot (x_i - E(X)) \cdot (y_j - E(Y)))) \right) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{N_x} p_i \cdot (x_i - E(X))^2}_{D^2(X)} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{N_y} p_j}_1 + \underbrace{\sum_{j=1}^{N_y} p_j \cdot (y_j - E(Y))^2}_{D^2(Y)} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{N_x} p_i}_1 + 2 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{N_x} \left(\sum_{j=1}^{N_y} (p_i \cdot p_j \cdot (x_i - E(X)) \cdot (y_j - E(Y))) \right)}_{E((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y)))} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.9: Summe von Zufallsgrößen

Drei Holzbausteine, die je eine zu erwartende Höhe von 3 cm mit einer Standardabweichung von 1 mm haben, werden zu einem Turm aufgeschichtet. Welchen Erwartungswert und welche Standardabweichung hat die Höhe des Turms? Die Höhen der Bausteine sollen nicht korrelieren (Kovarianz null).

Zur Kontrolle

Summe der Erwartungswerte:

$$E(H_{\text{ges}}) = 3 \cdot 3 \text{ cm} = 9 \text{ cm}$$

Summe der Varianzen:

$$D^2(H_{\text{ges}}) = 3 \cdot (1 \text{ mm})^2$$

Standardabweichung der Summe:

$$\sqrt{D^2(H_{\text{ges}})} = \sqrt{3} \text{ mm}$$

2.3 Verteilung von Zählwerten

Aufgabe 2.10: Verteilung der Fehleranzahl

Die Fehler $i = 1$ bis 5 seien mit folgenden Wahrscheinlichkeiten nachweisbar:

Fehler	1	2	3	4	5
p_i	10%	20%	40%	50%	30%

Berechnen Sie die Verteilung der Anzahl der nachweisbaren Fehler durch Ausfüllen der nachfolgende Tabelle:

Fehleranzahl	0	1	2	3	4	5
Fehler 1	90%	10%				
Fehler 1 und 2			2%			
Fehler 1 bis 3				0,8%		
Fehler 1 bis 4						
Fehler 1 bis 5						

Berechnungsprogramm und Ausgaben

```

p=[0.10 0.20 0.40 0.50 0.30];
P(1,1)=1-p(1);
P(1,2)=p(1);
for i=2:5
    P(i,1)=P(i-1,1) * (1-p(i));
    P(i,i+1)=P(i-1,i)*p(i);
    for j=2:i
        P(i,j) =P(i-1,j)*(1-p(i)) + P(i-1,j-1)*p(i);
    end;
end;
P =
0.90000 0.10000 0.00000 0.00000 0.00000 0.00000
0.72000 0.26000 0.02000 0.00000 0.00000 0.00000
0.43200 0.44400 0.11600 0.00800 0.00000 0.00000
0.21600 0.43800 0.28000 0.06200 0.00400 0.00000
0.15120 0.37140 0.32740 0.12740 0.02140 0.00120

```

Zur Kontrolle

Nachweiswahrscheinlichkeiten:

Fehler	1	2	3	4	5
p_i	10%	20%	40%	50%	30%

Verteilung der Anzahl der nachweisbaren Fehler:

Fehleranzahl	0	1	2	3	4	5
Fehler 1	90%	10%				
Fehler 1 und 2	72%	26%	2%			
Fehler 1 bis 3	43,2%	44,4%	11,6%	0,8%		
Fehler 1 bis 4	21,6%	43,8	28%	6,2%	0,4%	
Fehler 1 bis 5	15,12%	37,14%	32,74%	12,74%	2,14%	0,12%

2.4 Binomialverteilung

Aufgabe 2.11: Gleicher $E(X)$ wie Zählverteilung

Berechnen Sie die Binomialverteilung für die Anzahl der nachweisbaren Fehler zur Aufgabe zuvor

- mit derselben Anzahl möglicher Zählwerte,
- demselben Erwartungswert und
- als Eintrittswahrscheinlichkeit dem Mittelwert der Nachweiswahrscheinlichkeiten:

Fehler	1	2	3	4	5
p_i	10%	20%	40%	50%	30%

Zur Kontrolle

Nachweiswahrscheinlichkeiten aus der Aufgabe zuvor:

Fehler	1	2	3	4	5
p_i	10%	20%	40%	50%	30%

- Anzahl der möglichen Zählwerte: $N = 5$
- mittlere Nachweiswahrscheinlichkeit: $p = 30\%$
- Verteilung:

k	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	16,81%	36,02%	30,87%	13,23%	2,84%	0,24%

- Zählverteilung aus der Aufgabe zuvor zum Vergleich:

$P(X = k)$	15,12%	37,14%	32,74%	12,74%	2,14%	0,12%
------------	--------	--------	--------	--------	-------	-------

2.5 Effektive Anzahl der Zählversuche

Aufgabe 2.12: Effektive Anzahl der Zählversuche

Beim mehrfachen Zählen von Schadensereignissen bei 30 Versuchen ergab sich für die Zählwerte ein Erwartungswert von 9,75 und eine Standardabweichung von 4,42. Gesucht seien:

1. Schadenseintrittswahrscheinlichkeit p ?
2. Varianzerhöhung κ ?
3. Effektive Versuchsanzahl?
4. die skalierte kumulative Binomialverteilung mit demselben Erwartungswert und annähernd derselben Varianz.

Zur Kontrolle

1. Schadenseintrittswahrscheinlichkeit: $p = 32,5\%$
2. Varianzerhöhung: $\kappa \geq \frac{D_S^2(X)}{E_S(X) \cdot \left(1 - \frac{E_S(X)}{N}\right)} = \frac{4,42^2}{9,75 \cdot (1 - 32,5\%)} = 2,97 \approx 3$
3. effektive Versuchsanzahl: $N_{\text{eff}} = \frac{N}{\kappa} = \frac{30}{3} = 10$.
Kontrolle: $E(X) = \kappa \cdot N_{\text{eff}} \cdot p = 9,75$; $D^2(X) = \kappa^2 \cdot N_{\text{eff}} \cdot p \cdot (1 - p) = 19,7$; $\sqrt{D^2(X)} = 4,44$
4. Skaliert kumulative Binomialverteilung mit demselben Erwartungswert und fast derselben Varianz:

$$P(X \leq \kappa \cdot k) = \sum_{j=0}^k \binom{10}{j} \cdot 32,5\%^j \cdot 67,5\%^{10-j}$$

$\kappa \cdot k$	0	3	6	9	12	15	18	21	≥ 24
$P(X \leq \kappa \cdot k)$	2,0%	11,4%	31,9%	58,2%	80,8%	93,2%	98,3%	99,7%	100%

Aufgabe 2.13: Effektive Fehleranzahl

Für eine Modellfehlermenge von 1000 Fehlern wurden für 10 verschiedene Zufallstestsätze derselben Länge die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler bestimmt:

Versuch i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ergebnis $\varphi_{\text{NErk},i}$	58	49	40	54	67	35	34	57	47	66

- Schätzen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler.
- Wie groß ist die effektive Modellfehleranzahl?

Zur Kontrolle

- Erwartungswert der Datenstichprobe: $E_S(X) = 50,7$
- Varianz der Datenstichprobe: $D_S^2(X) = 140,01$
- Varianzvergrößerung: $\kappa = \frac{D_S^2(X)}{E_S(X) \cdot \left(1 - \frac{E_S(X)}{N}\right)} = \frac{140,01}{50,7 \cdot \left(1 - \frac{50,7}{1.000}\right)} = 2,91$
- Effektive Modellfehleranzahl: $N_{\text{eff}} = \frac{N}{\kappa} = 344$

2.6 Poisson-Verteilung**Aufgabe 2.14: Poissonverteilung**

Die Auftrittswahrscheinlichkeit einer Fehlfunktion je Service-Leistung sei $p_{\text{FF}} = 10^{-5}$. Wie wahrscheinlich ist es, dass bei 10^4 Service-Leistungen 0, 1, 2 oder mehr als zwei Fehlfunktionen auftreten?

Zur Kontrolle

- Erwartungswert: $E(X) = p_{\text{FF}} \cdot 10^4 = 0,1 \frac{\text{FF}}{1000 \text{ SL}}$
- keine FF: $P(k=0) = e^{-E(X)} = 90,48\%$
- eine FF: $P(k=1) = e^{-E(X)} \cdot E(X) = 9,05\%$
- zwei FF: $P(k=2) = e^{-E(X)} \cdot \frac{E(X)^2}{2} = 0,45\%$
- mehr als zwei FF: $P(k > 2) = 1 - 90,48\% - 9,05\% - 0,45\% = 0,015\%$

2.7 Multimodale Verteilungen**Aufgabe 2.15: Verteilung der Widerstandswerte**

In eine Kiste für $1\text{k}\Omega$ -Widerstände wurde

- 500 Widerstände mit normalverteiltem Widerstandswert, Erwartungswert $1,02\text{ k}\Omega$ und Standardabweichung $10\ \Omega$ und
- 300 Widerstände mit normalverteiltem Widerstandswert, Erwartungswert $9,99\text{ k}\Omega$ und Standardabweichung $15\ \Omega$

gemischt. Welche Verteilung haben die Widerstandswerte bei zufälliger Entnahme aus der Kiste?

Beschreibung mit Hilfe der standardisierten Normalverteilung $\Phi(z)$.

Zur Kontrolle

$$P(X \leq R) = \frac{500}{800} \cdot \Phi\left(\frac{R - 1,02 \text{ k}\Omega}{10 \Omega}\right) + \frac{300}{800} \cdot \Phi\left(\frac{R - 0,99 \text{ k}\Omega}{15 \Omega}\right)$$

2.8 Verteilung der Fehleranzahl**Aufgabe 2.16: Verteilung der Anzahl nachweisbaren Fehler**

Der nachfolgende Matlab-Vektor enthält für 20 Modellfehler die Nachweiswahrscheinlichkeiten je Service-Anforderung :

```
p0 = [0.9 0.8 0.75 0.5 0.4 0.36 0.2 0.15
      0.08 0.072 0.04 0.03 0.016
      0.007 0.002 0.0018
      8E-4 4E-4 2E-5 6E-6]
```

Bestimmen Sie für eine Anzahl von $n = 10^4$ Service-Anforderungen

1. die Nachweiswahrscheinlichkeiten aller Fehler,
2. den Erwartungswert der Anzahl der nachweisbaren Fehler,
3. die Varianz der Anzahl der nachweisbaren Fehler und
4. die Verteilung der Anzahl der nachweisbaren Fehler

unter der Annahme, dass alle Modellfehler unabhängig voneinander nachweisbar sind.

Zur Kontrolle

1. Nachweiswahrscheinlichkeiten für $n = 1000$:

```
p0 = [0.9 0.8 0.75 0.5 0.4 0.36 0.2 ... ];
for i=1:20 p(i) = 1 - exp(-p0(i)*n); end;
```

Fehler	1 bis 13	14	15	16	17	18	19	20
$p_i(n)$	100%	99,9%	86,5%	83,5%	55,1%	33,0%	2,0%	0,6%

2. Erwartungswert: 18,6
3. Standardabweichung: 0,866
4. Verteilung:

k	0 bis 13	14	15	16	17	18	19	20
$P(X = k)$	0	0,7%	8,68%	34,7%	41,8%	13,8%	0,3%	0

3 Kennwerte schätzen**3.1 FHSF-Funktion****Aufgabe 2.17: FHSF-Potenzfunktion**

Gegeben sind die mittlere Anzahl von SL je FF für 24 Modellfehler:

```
x = [10 11 13 15 17 18 21 24 29 31 33 37 40 ...
     52 67 70 83 110 185 217 290 420 850 1730 5870];
```

1. Zählen Sie für die Intervallstaffelung in der nachfolgenden Tabelle mit $x_0 = \sqrt{10}$ die Fehler je Intervall.

i	2	3	4	5	6	7
$x \in$	$[x_0^2, x_0^3)$	$[x_0^3, x_0^4)$	$[x_0^4, x_0^5)$	$[x_0^5, x_0^6)$	$[x_0^6, x_0^7)$	$[x_0^7, x_0^8)$
H_i						
k						

2. Um welchen Faktor verringert sich abschätzungsweise die Anzahl der Modellfehler je Dekade? Auf welchen Exponenten k für eine FHSF-Potenzfunktion lässt das schließen?

Zur Kontrolle

Mittlere Anzahl der SL je FF und Fehler ($x_0 = \sqrt{10}$):

```
x = [10 11 13 15 17 18 21 24 29 31 33 37 40 ...
     52 67 70 83 110 185 217 290 420 850 1730 5870];
```

i	2	3	4	5	6	7
$x \in$	$[x_0^2, x_0^3)$	$[x_0^3, x_0^4)$	$[x_0^4, x_0^5)$	$[x_0^5, x_0^6)$	$[x_0^6, x_0^7)$	$[x_0^7, x_0^8)$
H_i	10	6	4	2	1	1
H_i/H_{i+1}	1,67	1,5	1,5	2	1	
k	0,44	0,35	0,60	0,60	0	

Aus dem Histogramm lässt sich ableiten, dass das Testobjekt in grober Näherung eine FHSF-Potenzfunktion mit $k = 0,4 \dots 0,6$ hat.

Aufgabe 2.18: Fortsetzung FHSF-Potenzfunktion

1. Bestimmung Sie die zu erwartende Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler $E(\varphi_{\text{Nerk}}(n))$ für Zufallstestsätze der Länge $n \in (30, 100, 300, 1000, \dots, 10.000)$ für die Fehlermenge aus der Aufgabe zuvor mit

```
x = [10 11 13 15 17 18 21 24 29 31 33 37 40 ...
     52 67 70 83 110 185 217 290 420 850 1730 5870];
```

2. Suchen Sie für

$$E(\varphi(n)) = E(\varphi(100)) \cdot \left(\frac{100}{n}\right)^k$$

mit $E(\varphi(100))$ aus dem Aufgabenteil zuvor ein geeignetes k durch Probieren, mit dem der Verlauf aus dem Aufgabenteil zuvor gut angenähert wird.

```
x = [10 11 13 15 17 18 21 24 29 31 33 37 40 ...
     52 67 70 83 110 185 217 290 420 850 1730 5870];
n = [30 100 300 1E3 3E3 1E4]; k = 0.5;
for i=1:length(n)
    EX_p(i) = 0;
    for j=1:length(x)
        EX_p(i) = EX_p(i) + exp(-n(i)/x(j));
    end;
    EX_FHNW(i) = 7.14*(n(i)/100)^-k;
end;
printf('\nTestsatzlaenge_n: %d\n', n(i));
for i=1:length(n); printf('%7d', n(i)); end;
printf('\nE(X) aus_p_berechnet: %f\n', EX_p(i));
for i=1:length(n); printf('%5.2f', EX_p(i)); end;
printf('\nE(X) mit_k=%2.2f_berechnet: %f\n', k);
for i=1:length(n); printf('%5.2f', EX_FHNW(i)); end;
printf('\n');
```

Zur Kontrolle

	30	100	300	10^3	$3 \cdot 10^3$	10^4
$\sum_{i=1}^{N_{PF}} e^{-\frac{n}{x_i}}$	13,10	7,14	3,91	1,85	0,81	0,19
$7,14 \cdot \left(\frac{100}{n}\right)^{0,5}$	13,04	7,14	4,12	2,26	1,30	0,71
$7,14 \cdot \left(\frac{100}{n}\right)^{0,6}$	14,70	7,14	3,69	1,79	0,93	0,45
$7,14 \cdot \left(\frac{100}{n}\right)^{0,7}$	16,58	7,14	3,31	1,42	0,66	0,28

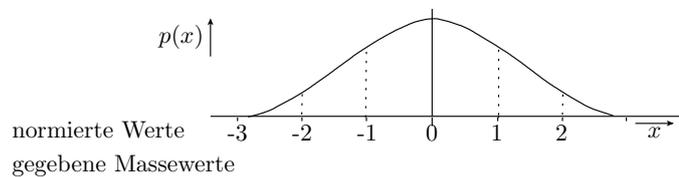
Die beste Approximation ergibt sich mit $k \approx 0,6$.

3.2 Bereichsschätzung

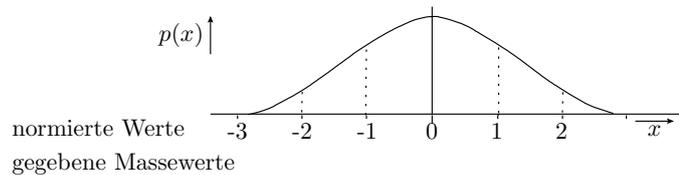
Aufgabe 2.19: Normalverteilung

Eine normalverteilte Zufallsgröße habe den Erwartungswert $E(X) = 1 \text{ kg}$ und einer Standardabweichung von 10 g.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist $X > 1,03 \text{ kg}$?



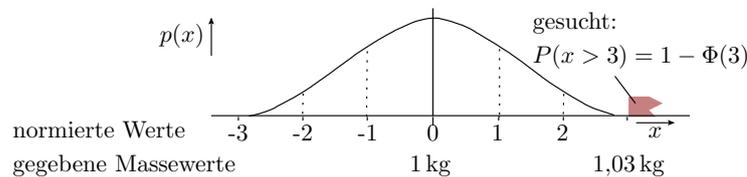
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gilt $9,98 \text{ kg} \leq X \leq 10,02 \text{ kg}$?



Zur Kontrolle

Eine normalverteilte Zufallsgröße habe den Erwartungswert $E(X) = 1 \text{ kg}$ und einer Standardabweichung von 10 g.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist $X > 1,03 \text{ kg}$?



z	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

- Gesuchte Wahrscheinlichkeit: $1 - \Phi(3) = 0,13\%$

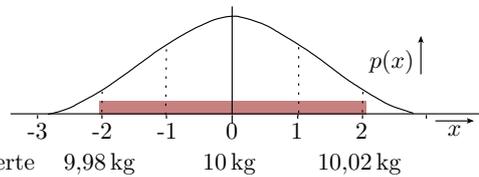
... $E(X) = 1 \text{ kg}$ und einer Standardabweichung von 10 g .

2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gilt $9,98 \text{ kg} \leq X \leq 10,02 \text{ kg}$?

gesucht:

$$P(-2 \leq x \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-2)$$

normierte Werte
gegebene Massewerte



z	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

- Gesuchte Wahrscheinlichkeit: $\Phi(2) - \Phi(-2) = 2 \cdot \Phi(2) - 1 = 95,44\%$

3.3 Kleine Zählwerte

Aufgabe 2.20: Maskierungsanzahl

Bei der Überwachung von Service-Ergebnissen wird im Mittel eine von tausend Fehlfunktion (FF) nicht erkannt. Wie wahrscheinlich ist es, dass

1. von tausend FF keine,
2. von tausend FF mehr als eine,
3. von 5000 FF weniger als 3 und
4. von 5000 FF mehr als 8

Fehlfunktion unerkannt bleiben?

Zur Kontrolle

Bei der Überwachung von Service-Ergebnissen wird im Mittel eine von tausend Fehlfunktion nicht erkannt. Wie wahrscheinlich ist es, dass von

	Berechnung	Lösung
1.	1000 FF keine, poiscdf(1,0):	36,8%
2.	tausend FF mehr als eine, 1-poscdf(1,1):	26,4%
3.	5000 FF weniger als 3 und poiscdf(5,2):	12,5%
4.	von 5000 FF mehr als 8 poiscdf(5,8):	6,81%

Fehlfunktion unerkannt bleiben?

Aufgabe 2.21: Maskierungsanzahl

Die zu erwartende Anzahl der Schadensfälle pro Jahr für ein bestimmtes Risiko betrage $8,3$.

1. Welche Anzahl von Schadensfällen pro Jahr wird mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha_1 = 2\%$ nicht unterschritten?
2. Welche Anzahl von Schadensfällen pro Jahr wird mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha_2 = 2\%$ nicht überschritten?

Zur Kontrolle

$$E(X) = 8,3, \alpha_1 = \alpha_2 = 2\%.$$

1. Welche Anzahl von Schadensfällen wird mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha_1 = 2\%$ nicht unterschritten?
2. Welche Anzahl von Schadensfällen wird mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha_2 = 2\%$ nicht überschritten?

Lösung:

	Berechnung	Ergebnis
1	pois_k_min(0.02,8.3)	3
2	pois_k_max(0.02,8.3)	16

3.4 Erwartungswert und Eintrittswahrscheinlichkeit**Aufgabe 2.22: Maskierungswahrscheinlichkeit**

Bei einer Überwachung wurden von $N = 1000$ Fehlfunktionen $x_{\text{ist}} = 178$ nicht erkannt. In welchem Bereich liegen der Erwartungswert der Anzahl der Maskierungen und die Maskierungswahrscheinlichkeit p ? Zulässige Irrtumswahrscheinlichkeit sei $\alpha = 1\%$. Keine Maskierungabhängigkeiten ($\kappa = 1$).

Zur Kontrolle

Min. und max. Erwartungswert der Anzahl der Maskierungen:

$$\begin{aligned} E(X)_{\min/\max} &= x_{\text{ist}} \mp \sqrt{\kappa \cdot x_{\text{ist}} \cdot \left(1 - \frac{x_{\text{ist}}}{N}\right)} \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 178 \mp \sqrt{178 \cdot \left(1 - \frac{178}{1000}\right)} \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{1\%}{2}\right) \end{aligned}$$

α	4,54%	0,26%	0	4%	2%	1%	0,4%	0,2%
$\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

$$E(X)_{\min/\max} = [147, 209]$$

Bereich der Maskierungswahrscheinlichkeit:

$$p_{\min/\max} = [14,7\%, 20,9\%]$$

Aufgabe 2.23: Wahrscheinlichkeit einer FF

Zur Abschätzung der Wahrscheinlichkeit p für ein Service-Versagen wurden für $N = 10^6$ Service-Anforderungen $x_{\text{ist}} = 430$ FF gezählt.

1. Wie groß ist der Schätzwert p_S der Wahrscheinlichkeit einer FF?
2. Wie groß ist die Irrtumswahrscheinlichkeit α , dass p außerhalb eines Intervalls $p_S \cdot (1 \pm 10\%)$ liegt?
3. Mit wie vielen Service-Anforderungen ist die Überprüfung fortzusetzen, um die Irrtumswahrscheinlichkeit auf $\alpha \leq 1\%$ abzusenken?

Lösung Aufgabenteil 1 und 2

1. Der Schätzwert der Eintrittswahrscheinlichkeit ist

$$p_S = \frac{x_{\text{ist}}}{N} = \frac{430}{10^6}$$

2. Wie groß ist die Irrtumswahrscheinlichkeit α , dass p außerhalb eines Intervalls $p_S \cdot (1 \pm 10\%)$ liegt?

Auflösung der Gleichung

$$x_{\text{ist}} = \frac{1}{\frac{1}{N} + \frac{\varepsilon_{\text{rel}}^2}{\kappa \cdot (\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}))^2}}$$

nach α :

$$\alpha = 2 \cdot \left(1 - \Phi \left(\varepsilon_{\text{rel}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\kappa \cdot \left(\frac{1}{x_{\text{ist}}} - \frac{1}{N} \right)}} \right) \right)$$

Mit $x_{\text{ist}} = 430$; $\varepsilon_{\text{rel}} = 10\%$; $\kappa = 1$ (keine Abhängigkeiten gegeben) und $N = 10^6$:

$$\alpha = 2 \cdot \left(1 - \Phi \left(0,1 \cdot \sqrt{\frac{1}{1 \cdot \left(\frac{1}{430} - \frac{1}{10^6} \right)}} \right) \right) = 2 \cdot (1 - \Phi(2,07))$$

z	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

$$\alpha = 2 \cdot (1 - \Phi(2,07)) = 3,58\%$$

3. Mit wie vielen Service-Anforderungen ist die Überprüfung fortzusetzen, um die Irrtumswahrscheinlichkeit auf $\alpha \leq 1\%$ abzusenken?

Fortsetzung bis zum Zählwert:

$$x_{\text{ist}} = \frac{1}{\left[\frac{1}{N} + \right] \frac{\varepsilon_{\text{rel}}^2}{[\kappa \cdot (\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}))^2]}} \approx \frac{(\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}))^2}{\varepsilon_{\text{rel}}^2} = \frac{(\Phi^{-1}(1 - \frac{1\%}{2}))^2}{0,1^2}$$

α	4,54%	0,26%	0	4%	2%	1%	0,4%	0,2%
$\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

$$x_{\text{ist}} \approx \left(\frac{2,75}{0,1} \right)^2 = 756,25$$

Mit der Eintrittswahrscheinlichkeit aus Aufgabenteil 1: ...

$$p_s = \frac{x_{\text{ist}}}{N} = \frac{430}{10^6}$$

$$N = \frac{756,25}{430} \cdot 10^6 = 1,7587 \cdot 10^6$$

Die Überprüfung ist etwa mit $N - 10^6 = 758.700$ Service-Anforderungen fortzusetzen.

Aufgabe 2.24: Mindestmodellfehleranzahl

Wie groß muss die effektive Modellfehleranzahl mindestens sein und wie viele Fehler davon muss der Test nachweisen, um mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha \leq 2\%$ für eine zu erwartende Modellfehlerüberdeckung im Bereich von 98,6% bis 99,4% garantieren zu können?

Annahmen:

- Die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler φ_{NErk} sei normalverteilt.

Hinweis:

- »effektive Modellfehleranzahl« impliziert $\kappa = 1$ und Varianz gleich der einer Binomialverteilung mit demselben Erwartungswert.

Zur Kontrolle

$$x_{\min/\max} = E(X) \mp \sqrt{\kappa \cdot E(X) \cdot \left(1 - \frac{E(X)}{N}\right)} \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Minimum, Maximum und Erwartungswert proportional zur Modellfehleranzahl: $x_{\min} = \varphi_M \cdot 0,6\%$, $x_{\max} = \varphi_M \cdot 1,4\%$ und $E(X) = \varphi_M \cdot 1\%$. $1 - \frac{E(X)}{N} = E(FC) = 99\%$. $\kappa = 1$.

α	4,54%	0,26%	0	4%	2%	1%	0,4%	0,2%
$\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

$$x_{\max} - x_{\min} = \varphi_M \cdot 0,8\% = 2 \cdot \sqrt{\varphi_M \cdot 0,99\%} \cdot 2,33$$

$$\varphi_M = 0,0099 \cdot \left(\frac{2,33}{0,004}\right)^2 = 3359$$

Was besagt das Ergebnis?

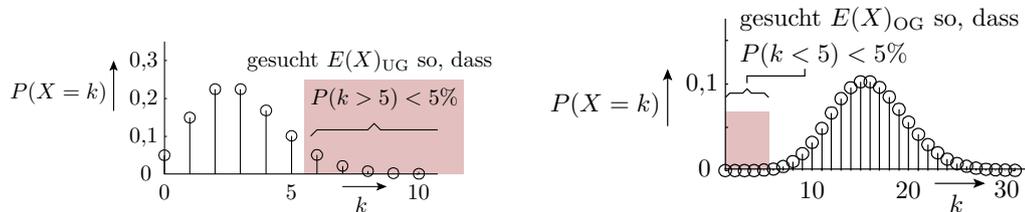
- Die Fehlersimulation muss mit mindestens 3359 unabhängig voneinander nachweisbaren Modellfehlern erfolgen.
- Eine Fehlerüberdeckung von 98,6%...99,4% mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit, verlangt eine Testsatzlänge, die 99% dieser Modellfehler, d.h. alle außer ca. 34 nachweist.
- Bei Abhängigkeiten im Fehlernachweis muss die Modellfehleranzahl κ -mal so groß sein.
- Redundante Fehler in der Fehlermenge sind problematisch, weil sie als nicht nachweisbare Fehler gezählt werden, aber eigentlich keine Fehler sind.

3.5 Seltene Ereignisse

Aufgabe 2.25: Zuverlässigkeitsintervall

Beim Test von 10^3 Service-Leistungen eines Systems wurden 5 Fehlfunktionen beobachtet. Für welchen Bereich der Zuverlässigkeit kann nach diesem Versuchsergebnis mit den Irrtumswahrscheinlichkeiten $\alpha_1 = \alpha_2 = 5\%$ garantiert werden?

Garantierbare Unter- und Obergrenze des Erwartungswerts:



- $e^{-E(X)_{UG}} \cdot \sum_{k=0}^5 \frac{E(X)_{UG}^k}{k!} \geq 95\%$; Überschlag: $E(X)_{UG} \approx$
- $e^{-E(X)_{OG}} \cdot \sum_{k=0}^4 \frac{E(X)_{OG}^k}{k!} < 5\%$; Überschlag: $E(X)_{OG} \approx$

Zur Kontrolle

Garantierbare Unter- und Obergrenze des Erwartungswerts:

	$\alpha_1 = \alpha_2 = 5\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 10\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 20\%$	
x_{ist}	$E(X)_{min}$	$E(X)_{max}$	$E(X)_{min}$	$E(X)_{max}$	$E(X)_{min}$	$E(X)_{max}$
5	2,613	9,154	3,152	7,993	3,903	6,722

Eintrittswahrscheinlichkeits- und Zuverlässigkeitsbereich:

	Grenze 1	Grenze 2
Anzahl FF	$E(X)_{UG} \approx 3,15$	$E(X)_{OG} \approx 7,99$
$p_{FF} = \frac{E(X)_{UG/OG}}{1000}$	0,315%	0,799
$E(Z) = \frac{1}{p_{FF}}$	317 $\frac{SL}{FF}$	250 $\frac{SL}{FF}$

3.6 Verteilung unbekannt

Aufgabe 2.26: Bereichsschätzung Kapazitätswerte

Gegeben ist eine Stichprobe gemessener Kapazitätswerte in nF:

$$C : 1,20, 1,23, 1,18, 1,25, 1,21, 1,19, 1,23, 1,22, 1,09, 1,17$$

In welchem Bereich liegt mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 2% der Erwartungswert

1. wenn die Kapazitätswerte normalverteilt sind,
2. nach der tschebyscheffschen Ungleichung?

Zur Kontrolle

- $E_S(C) = \frac{1,20+1,23+1,18+1,25+1,21+1,19+1,23+1,22+1,09+1,17}{10} = 1,179$
- $\sqrt{D_S^2(C)} = \sqrt{\frac{(1,20-1,179)^2+(1,23-1,179)^2+\dots}{9}} = 0,0450$

Intervallradius:

- normalverteilt: $\varepsilon_{\text{norm}} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt{D_S^2(C)} = 0,0922$

α	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
$\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

- tscheb. Ungl.: $\varepsilon_{\text{tscheb}} = \sqrt{\frac{D_S^2(C)}{\alpha}} = \frac{0,0540}{\sqrt{2\%}} = 0,3182$

Gesuchter Bereich:

- normalverteilt: $E_S(C) \pm \varepsilon_{\text{norm}} = [1,105, 1,289]$
- tscheb. Ungl.: $E_S(C) \pm \varepsilon_{\text{tscheb}} [0,861, 1,497]$

3.7 Länge von Zufallstests

Aufgabe 2.27: Erforderliche Modellfehleranzahl

Um für eine Modellfehlerüberdeckung von $FC_M = 99\%$ zu garantieren, soll das Simulationsabbruchkriterium

$$\varphi_{\text{NErk.ist}} \in \{0, 1, 2\}$$

sein. Wie groß muss die Anzahl der nicht redundanten Modellfehler φ_M bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha_1 = \alpha_2 = 2\%$ sein?

Annahmen:

- Vernachlässigbare Abhängigkeiten im Fehlernachweis ($\kappa = 1$).
- φ_{NErk} (Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler) poisson-verteilt.

Vorschlag für den Lösungsweg:

- Abschätzung der Unter- und Obergrenze des Erwartungswertes.
- Für den ungünstigsten Fall des Erwartungswertes (Ober- oder Untergrenze?) muss die Modellfehleranzahl so groß sein, dass die zu erwartende Fehlerüberdeckung 99% ist.

Zur Kontrolle

Tabelle der Unter- und Obergrenzen des Erwartungswertes:

	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 2\%$	
X_{ist}	$E(X)_{\text{min}}$	$E(X)_{\text{max}}$	$E(X)_{\text{min}}$	$E(X)_{\text{max}}$	$E(X)_{\text{min}}$	$E(X)_{\text{max}}$
0	0,005	5,299	0,01	4,606	0,02	3,912
1	0,103	7,430	0,148	6,639	0,215	5,835
2	0,338	9,274	0,436	8,405	0,567	7,517

Erforderliche Modellfehleranzahl:

$$\varphi_M = \frac{E(\varphi_{\text{NErk}})_{\text{max}}}{1 - FC_M} = 100 \cdot E(\varphi_{\text{NErk}})_{\text{max}}$$

$\varphi_{\text{NErk.ist}}$	0	1	2
φ_M	392	584	751

Aufgabe 2.28: Simulationsabbruch bei $\varphi_{\text{NErk.ist}} = 20$

Um für eine Modellfehlerüberdeckung von $FC_M = 99\%$ zu garantieren, soll das Simulationsabbruchkriterium

$$\varphi_{\text{NErk.ist}} = 20$$

sein. Wie groß muss die Anzahl der nicht redundanten Modellfehler φ_M bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha_1 = \alpha_2 = 2\%$ sein?

Annahmen:

- Vernachlässigbare Abhängigkeiten im Fehlernachweis ($\kappa = 1$).
- φ_{NErk} (Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler) normalverteiltverteilt.
- Varianz von φ_{NErk} ist ungefähr gleich dem Istwert.

Lösungsweg wie in der Aufgabe zuvor nur mit Normalverteilung.

Zur Kontrolle

- Bestimmung der Obergrenze des Erwartungswerts:

$$\begin{aligned} E(\varphi_{\text{NErk}})_{\max} &= \varphi_{\text{NErk}} + \Phi^{-1}(1 - \alpha_2) \cdot \sqrt{\varphi_{\text{NErk}}} \\ &= 20 + 2,05 \cdot \sqrt{20} = 29,17 \end{aligned}$$

α	2,27%	0,13%	0	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
$\Phi^{-1}(1 - \alpha)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

- Erforderliche Modellfehleranzahl:

$$\varphi_M = \frac{E(\varphi_{\text{NErk}})_{\max}}{1 - FC_M} = 100 \cdot E(\varphi_{\text{NErk}})_{\max} = 2917$$

- Bei Abhängigkeiten im Fehlernachweis κ -facher Wert.