



# Test und Verlässlichkeit Foliensatz 2: Zufallstest, Verteilungen, Kennwerte Schätzen

Prof. G. Kemnitz

Institut für Informatik, TU Clausthal (TV\_F2)  
23. Mai 2017



## Inhalt TV\_F2: Zufallstest, Verteilungen, Kennwerte schätzen

### Zufallstest

- 1.1 Nachweiswahrscheinlichkeit
- 1.2 Anzahl der Fehler und FF
- 1.3 Steuer- und Beobachtbarkeit
- 1.4 Operationsprofil und

### Wichtung

### Verteilungen

- 2.1 Erwartungswert, Varianz, ...
- 2.2 Lineare Transformationen, ...
- 2.3 Verteilung von Zählwerten
- 2.4 Binomialverteilung
- 2.5 Effektive Anzahl der  
Zählversuche

### 2.6 Poisson-Verteilung

### 2.7 Normalverteilung

### 2.8 Multimodale Verteilungen

### 2.9 Verteilung der Fehleranzahl

### Kennwerte schätzen

### 3.1 FHSF-Funktion

### 3.2 Bereichsschätzung

### 3.3 Kleine Zählwerte

### 3.4 $E(X)$ und Eintrittsw.

### 3.5 Wahrsch. seltener Ereig.

### 3.6 Verteilungen unbekannt

### 3.7 Länge von Zufallstest



## Zufallstest



## Zufallstest

Für einen gewissen Anteil der entstehenden Fehler ist das Fehlverhalten so schlecht vorhersagbar, dass diese weder durch

- statische Tests (direkte Kontrollen, z.B. für Kurzschlüsse durch Widerstandsmessungen) und
  - dynamischen Tests mit modellfehlerorientierten Testbeispielen gefunden werden. Bleibt nur Zufallstest mit vielen Beispielen.
- 

Beim Zufallstest dienen Modellfehler nur zur Bewertung und Festlegung der Testsatzlänge, nicht für die Auswahl.

Modellfehlerüberdeckungen für Zufallstests sind auch dann noch aussagekräftig, wenn keine Ähnlichkeit im Nachweis, sondern nur zwischen den FHSF-Funktionen besteht.



# Nachweiswahrscheinlichkeit



## Fehlernachweiswahrscheinlichkeit

Ein Fehler wird nachgewiesen, wenn er eine FF verursacht. Die Nachweiswahrscheinlichkeit für einen Fehler  $i$  ist der Kehrwert der mittleren Anzahl von SL je FF, die der Fehler verursacht:

$$p_i = \frac{1}{x_i}$$

Die Wahrscheinlichkeit für den Nachweis mit  $n$  SL:

$$p_i(n) = 1 - (1 - p_i)^n$$

Voraussetzung: Der Fehler wird von jeder SL unabhängig von den anderen SL mit  $p_i$  nachgewiesen. Gilt genau genommen nur für Systeme ohne Gedächtnis. Denn eine Zustandskontaminierung erhöht die Wahrscheinlichkeit einer FF. Aber für sehr lange Testsätze, seltene FF, Neuinitialisierung nach erkannten FF, ... auch für Systeme mit Gedächtnis ausreichend genaue Näherung (siehe große Übung, Aufgabe »Speicherfehler«).



## Übergang zur e-Funktion

$$p_i(n) = 1 - e^{n \cdot \ln(1-p_i)}$$

mit der Taylor-Reihe

$$\ln(1-p_i) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_i^k}{k} = - \left( p_i + \frac{p_i^2}{2} + \dots \right)$$

Für den für die Testauswahl interessierender Bereich<sup>1</sup>  $p_i < 0,1$ :

$$\boxed{p_i(n) = 1 - e^{-n \cdot p_i}} \quad (1)$$

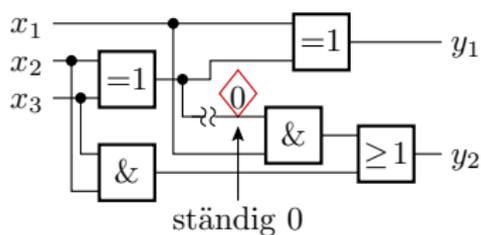
---

<sup>1</sup>Gut nachweisbare Fehler mit  $p_i \gg \frac{1}{n}$  werden sicher erkannt.



## Nachweiswahrscheinlichkeit eines Haftfehlers

Die Beispielschaltung enthält einen sa0-Fehler (Gattereingang ständig 0). Nachweis mit zwei der acht Eingabemöglichkeiten. Nachweiswahrscheinlichkeit gleich Summe der Auftrittshäufigkeiten beider Eingaben:



■ Eingaben die den Fehler nachweisen

Eingabe			Ausgabe		Auftrittshäufigkeit		
$x_3$	$x_2$	$x_1$	$y_2$	$y_1$			
0	0	0	0	0	0,125	0,1	0,1
0	0	1	0	1	0,125	0,05	0,1
0	1	0	0	1	0,125	0,15	0,2
0	1	1	1	0	0,125	0,2	0,05
1	0	0	0	1	0,125	0,05	0,2
1	0	1	1	0	0,125	0,2	0,05
1	1	0	1	0	0,125	0,05	0,2
1	1	1	1	1	0,125	0,2	0,1

Nachweiswahrscheinlichkeit: 0,25 0,4 0,1

Nachweiswahrscheinlichkeiten hängen offenbar nicht nur vom Fehler, sondern auch von den Auftrittshäufigkeiten der Eingaben ab.

## Beispielaufgabe



Für einen Speicher mit  $2^{32}$  Speicherplätzen sei angenommen, dass kein Fehler seltener als im Mittel aller 50 Zugriffe auf einen der  $2^{32}$  Speicherplätze eine FF verursacht.

- 1 Gilt dann das Pareto-Prinzip rekursiv?
- 2 Ab welcher Testsatzlänge  $n$  in Speicherzugriffen erkennt ein Zufallstest jeden Fehler mindestens mit einer Wahrscheinlichkeit von 99%?
- 3 Wie viele Stunden dauert der Test mindestens bei  $10^8$  Speicherzugriffen pro Sekunde?



## Lösung

- 1 Das Pareto-Prinzip rekursiv, dass nach Beseitigung der wenigen Fehler, die die Mehrheit der FF verursachen immer wieder ein kleiner Teil der Fehler die Mehrheit der FF verursachen, gilt bei einer Mindestnachweiswahrscheinlichkeit nicht.
- 2 Mindestnachweiswahrscheinlichkeit je Speicherzugriff:

$$p_{\min} = (50 \cdot 2^{32})^{-1}$$

Mindestnachweiswahrscheinlichkeit bei  $n$  Speicherzugriffen:

$$p_{\min}(n) = 1 - e^{-n \cdot p_{\min}} = 99\%$$

Gesuchte Testsatzlänge:

$$n = -\frac{1}{p_{\min}} \cdot \ln(1 - p_{\min}(n)) = -50 \cdot 2^{32} \cdot \ln(1\%) \approx 10^{12}$$

- 3 Mindesttestdauer:  $t = n \cdot 10^{-8} \text{ s} = 2,75 \text{ h}$



## Anzahl der Fehler und FF



## FHSF-Funktion nach einem Zufallstest

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zufallstest von  $n$  SL einen Fehler, der im Mittel aller  $x$  SL eine FF verursacht, nicht erkennt, beträgt:

$$p_{\text{NErk}} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^n \quad \text{für } x \gg 10 \quad p_{\text{NErk}} = e^{-\frac{n}{x}}$$

Unter der Annahme, dass erkannte Fehler beseitigt werden, reduziert sich die Auftrittshäufigkeit von Fehlern, die im Mittel aller  $x$  SL eine FF verursachen, auf:

$$H(x, n) = H(x) \cdot e^{-\frac{n}{x}}$$

Für die aus dem Pareto-Prinzip abgeleitete FHSF-Funktion:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < x_0 \\ c \cdot x^{-(k+1)} & \text{für } x \geq x_0 \end{cases} \quad \text{mit } k > 0$$

und Testlängen  $n \gg x_0$  ergibt sich:

$$H(x, n) = c \cdot x^{-(k+1)} \cdot e^{-\frac{n}{x}}$$



## Fehleranzahl nach Beseitigung der erkannten Fehler

Die zu erwartende Fehleranzahl<sup>2</sup> ist das Integral über die FHSF-Funktion:

$$E(\varphi(n)) = \int_0^{\infty} H(x) \cdot dx$$

Für eine Potenz-FHSF-Funktion beträgt sie:

$$E(\varphi(n)) = \int_0^{\infty} c \cdot x^{-(k+1)} \cdot e^{-\frac{n}{x}} \cdot dx$$

Mit der Substitution  $z = \frac{n}{x}$ ;  $dx = -\frac{n}{z^2} \cdot dz$

$$\begin{aligned} E(\varphi(n)) &= \int_{\infty}^0 c \cdot \frac{n^{-(k+1)}}{z^{-(k+1)}} \cdot x^{-(k+1)} \cdot e^{-z} \cdot \left(-\frac{n}{z^2} \cdot dz\right) \\ &= \frac{c}{n^k} \cdot \int_0^{\infty} z^{k-1} \cdot e^{-z} \cdot dz \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Der Erwartungswert ist der Mittelwert, wenn das Experiment »Zufallstest + Beseitigung erkannter Fehler« mit vielen verschiedenen Zufallstests derselben Länge wiederholt wird.



Das bestimmte Integral

$$\int_0^{\infty} z^{k-1} \cdot e^{-z} \cdot dz = \Gamma(k)$$

ist die Gamma-Funktion, eine Erweiterung der Fakultät auf reelle Zahlen. Für den Exponenten  $0 < k \leq 1$  beträgt sie überschlagsweise  $1/k$  und für  $k > 1$  gilt  $\Gamma(k+1) = k \cdot \Gamma(k)$ .

$k$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\Gamma(k)$	9,51	4,59	2,99	2,22	1,77	1,49	1,30	1,16	1,07

Insgesamt ergibt sich:

$$E(\varphi(n)) = \frac{c \cdot \Gamma(k)}{n^k} \quad (2)$$

Der Exponent  $k$ , mit dem die zu erwartende Fehleranzahl mit der Testsatzlänge  $n$  abnimmt, ist in der Regel deutlich kleiner eins. Bei  $k = 0,5$  verlangt einer Halbierung der Fehleranzahl einer Vervierfachung der Testsatzlänge.



## Wahrscheinlichkeit für durch Fehler verursachte FF

$$p_{\text{FFF}}(n) = \int_0^{\infty} \frac{H(x)}{x} \cdot dx$$

Für eine Potenz-FHSF-Funktion beträgt sie:

$$p_{\text{FFF}}(n) = \int_0^{\infty} \frac{c \cdot x^{-(k+1)}}{x} \cdot e^{-\frac{n}{x}} \cdot dx$$

Mit der Substitution  $z = \frac{n}{x}$ ;  $dx = -\frac{n}{z^2} \cdot dz$ :

$$\begin{aligned} p_{\text{FFF}}(n) &= \int_{\infty}^0 c \cdot \frac{n^{-(k+2)}}{z^{-(k+2)}} \cdot e^{-z} \cdot \left(-\frac{n}{z^2} \cdot dz\right) \\ &= \frac{c}{n^{k+1}} \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} z^k \cdot e^{-z} \cdot dz}_{\Gamma(k+1) = k \cdot \Gamma(k)} \\ &= \frac{c \cdot \Gamma(k+1)}{n^{k+1}} = \frac{k \cdot E(\varphi(n))}{n} \end{aligned} \quad (3)$$

( $\Gamma(\dots)$  – Gamma-Funktion, für die u.a. gilt  $\Gamma(k+1) = k \cdot \Gamma(k)$ ).



Wenn bei einem Zufallstest der Länge  $n$  die erkannten Fehler beseitigt werden, gilt tendenziell<sup>3</sup>

- Abnahme der zu erwartenden Fehleranzahl weniger als proportional mit der Testsatzlänge  $n$ :

$$E(\varphi(n)) = E(\varphi(n_0)) \cdot \left(\frac{n_0}{n}\right)^k \quad (4)$$

( $0 < k < 1$  – Abnahmeexponent der Fehleranzahl;  $n_0$  – Bezugstestsatzlänge).

- Abnahme der Wahrscheinlichkeit einer durch Fehler verursachten FF mindestens proportional mit der Testsatzlänge  $n$ :

$$p_{\text{FFF}}(n) = p_{\text{FFF}}(n_0) \cdot \left(\frac{n_0}{n}\right)^{k+1} \quad (5)$$

---

Bei  $k = 0,5$  halbiert eine Erhöhung der Testdauer auf  $n = 4 \cdot n_0$  die zu erwartende Fehleranzahl und verringert die Wahrscheinlichkeit einer durch Fehler verursachten FF auf ein Achtel.

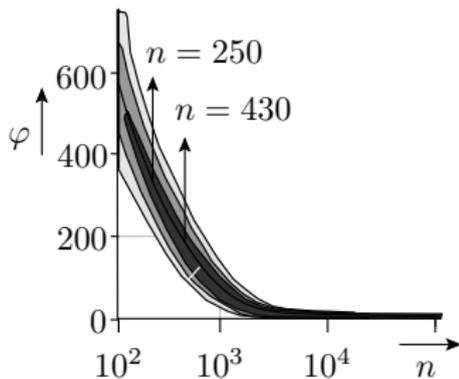
---

<sup>3</sup>Unterstellt ist das Pareto-Prinzip rekursiv, d.h. dass es für jedes praktikable  $n$  Fehler gibt, für die die mittlere Anzahl von SL je FF  $x \gg n$ .

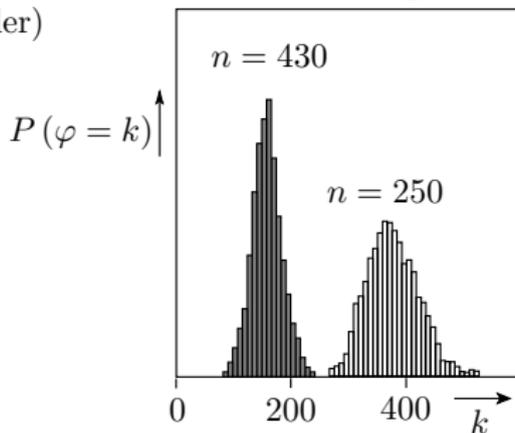
## Experiment zur Haftfehlerüberdeckung

Kombinatorische Beispielschaltung (Benchmark c3540). 3606 simulierte, unterschiedlich nachweisbare Haftfehler. Bestimmung der Verteilung mit 1000 verschiedenen Zufallstestsätzen.

Verteilung der Anzahl der nicht erkannten Modellfehler als Funktion von  $n$  (Benchmark c3540, 3606 Haftfehler)



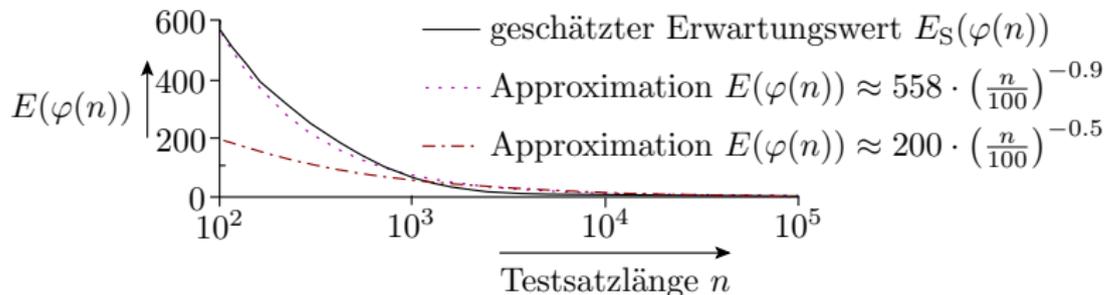
Verteilung für zwei Testsatzlängen



## Annäherung von $E(\varphi(n))$ durch eine Potenzfunktion

Annäherung der zu erwartenden Anzahl der nachweisbaren Fehler durch eine Potenzfunktion nach Gl. 4:

$$E(\varphi(n)) = E(\varphi(n_0)) \cdot \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-k}$$



Die Approximation mit  $k = 0,9$  nähert den Bereich  $n < 1000$  und die mit  $k = 0,5$  den Bereich  $n > 1000$  Testschritte besser an.



## Beispielaufgabe



Nach einem Zufallstest mit  $n_0 = 10^5$  Testbeispielen und Beseitigung aller erkannten Fehler betrug die Wahrscheinl. einer FF durch Fehler:

$$p_{\text{FFF}}(n_0) \approx 10^{-4}$$

Als FHSF-Funktion sei eine Potenzfunktion mit einem Exponenten  $k$  zwischen 0,3 und 0,7 angenommen.

- 1 Auf welche Anzahl nicht beseitigter Fehler lässt das schließen?
- 2 Auf welchen Wert verringert sich die zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler bei der 10-fachen Testsatzlänge und Beseitigung aller erkennbaren Fehler?
- 3 Auf welchen Wert verringert sich die zu erwartende Anzahl der FFs durch Fehler bei 10-facher Testsatzlänge?



## Lösung Aufgabenteil 1 und 2

Zufallstest Länge  $n_0 = 10^5$ . Beseitigung aller erkannten Fehler.  
Wahrscheinl. FF durch Fehler  $p_{\text{FFF}}(n_0) \approx 10^{-4}$ .  $k \in (0,3, 0,5)$ .

- 1** Umstellung von Gl.3 nach der Anzahl der nicht beseitigten Fehler:

$$p_{\text{FFF}}(n_0) = \frac{k \cdot E(\varphi(n_0))}{n_0}$$

$$E(\varphi(n_0)) = \frac{n_0 \cdot p_{\text{FFF}}(n_0)}{k} = \frac{10}{k}$$

$k$	$E(\varphi(10^5))$
0,3	33,3
0,4	25
0,5	20
0,6	16,7
0,7	14,3

- 2** Nicht beseitigter Fehler mit der 10-fachen Testsatzlänge:

$$E(\varphi(n)) = E(\varphi(n_0)) \cdot \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-k}$$

$$= \frac{10}{k} \cdot 10^{-k}$$

$k$	$E(\varphi(10^6))$
0,3	16,7
0,4	9,95
0,5	6,32
0,6	4,19
0,7	2,85



## Lösung Aufgabenteil 3

- 3 Häufigkeit der Fehlfunktionen mit der 10-fachen Testsatzlänge:

$$p_{\text{FFF}} = \frac{k \cdot E(\varphi(n))}{n} = \frac{k \cdot \left(\frac{10}{k} \cdot 10^{-k}\right)}{10^6}$$

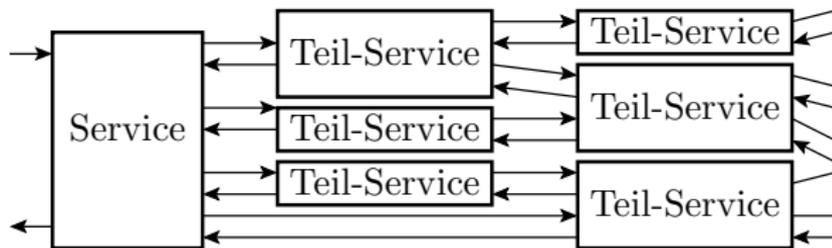
	$k=0,3$	$k=0,4$	$k=0,5$	$k=0,6$	$k=0,7$
$p_{\text{FFF}}(10^5)$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$
$E(\varphi(10^5))$	33,3	25	20	16,7	14,3
$p_{\text{FFF}}(10^6)$	$5,01 \cdot 10^{-6}$	$3,98 \cdot 10^{-6}$	$3,16 \cdot 10^{-6}$	$2,51 \cdot 10^{-6}$	$2,00 \cdot 10^{-6}$
$E(\varphi(10^6))$	16,7	9,95	6,32	4,19	2,85

Die Häufigkeit der Fehlfunktionen verringert sich im Gegensatz zur Anzahl der nicht erkannten und beseitigten Fehler um mehr als Faktor 10 und hängt deutlich weniger von  $k$  ab.



## Steuer- und Beobachtbarkeit

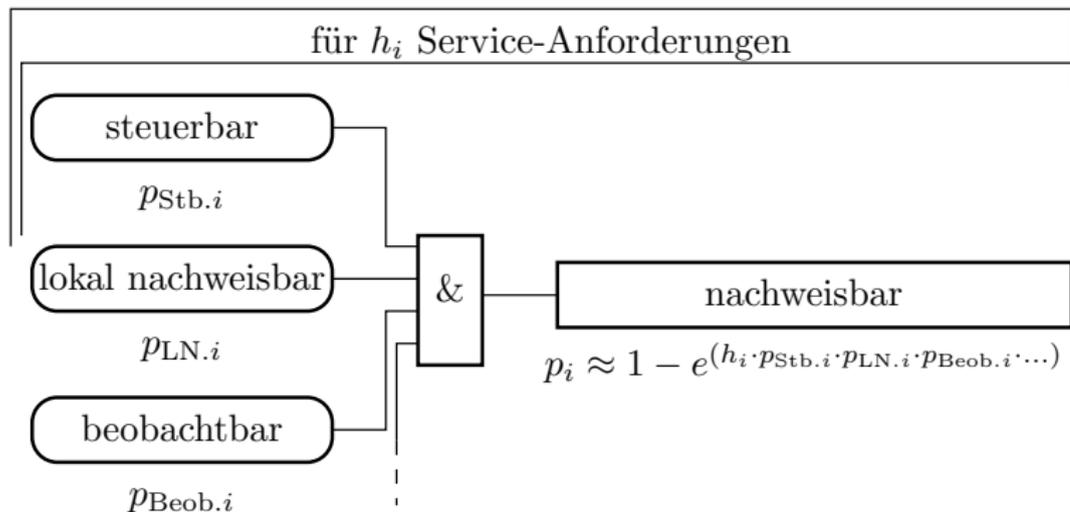
## Steuer- und Beobachtbarkeit



In einem hierarchischen System verursacht ein Fehler in einem Teil-Service nur dann ein Versagen der übergeordneten Service-Leistung, wenn

- die übergeordnete Service-Leistung den Teil-Service nutzt,
- der Fehler dabei angeregt wird / steuerbar ist,
- lokal nachweisbar ist und
- die lokale Verfälschung am Gesamtergebnis beobachtbar ist.

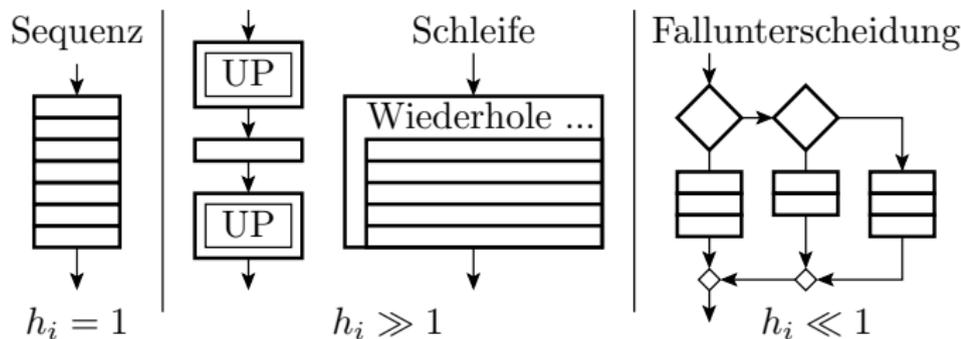
Die Nachweiswahrscheinlichkeit je SL lässt sich als Fehlerbaum beschreiben.



- Die  $h_i$ -fache Mehrfachnutzung in komplexen Service-Leistungen entspricht  $h_i$  Einzeltests des Teilsystems.
- Die Nachweiswahrscheinlichkeit je Test des Gesamtsystems ist das Produkt von  $h_i$  und aller  $p_{...i}$ 's ).

Im Weiteren wird aus Struktursicht gezeigt, dass die  $h_i$ 's und  $p_i$ 's in einem weiten Bereich streuen.

## Verarbeitungsfluss und Nutzungshäufigkeit



- Einfachnutzung ( $h_i = 1$ ): Sequenz, Nebenläufigkeit, ...
- Mehrfachnutzung ( $h_i \gg 1$ ): Schleifenkörper, Bibliotheksfunktionen, ...
- seltene Nutzung ( $h_i \ll 1$ ): Auswahl, Ausnahmen, Fehlerbehandlung, ...

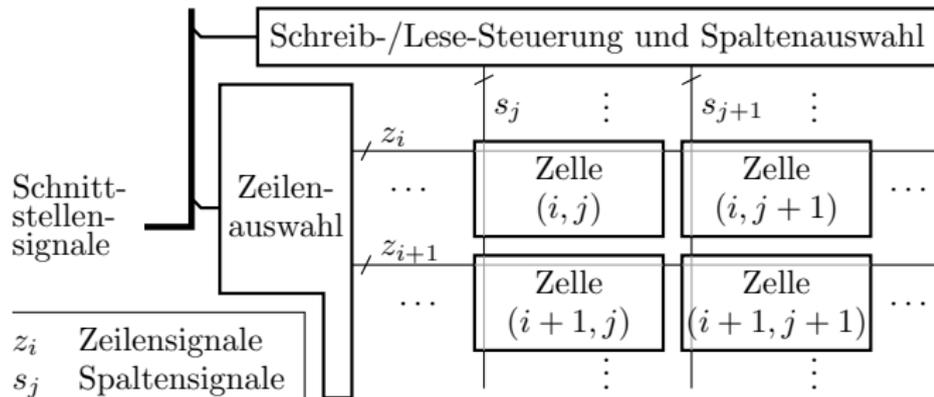
Ursache der sehr unterschiedlichen Nutzungshäufigkeiten  $h_i$  sind die normalen Ablaufkonstrukte einer Programmiersprache.



## Signalfluss und Nutzungshäufigkeit

Auch in digitalen Schaltungen werden Teil-Service-Leistungen unterschiedlich oft von übergeordneten Service-Leistungen genutzt:

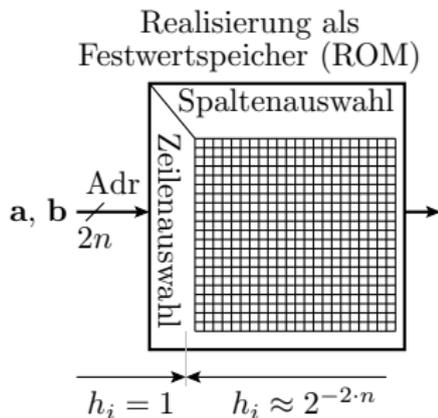
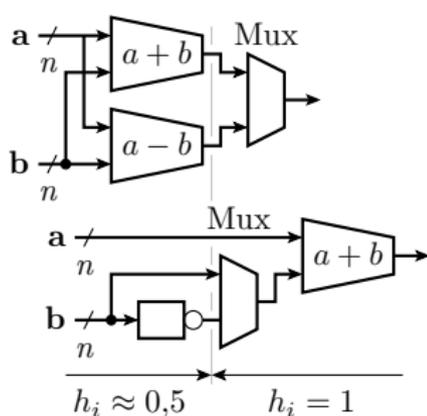
- $h_i = 1$ : Prozessor bei Abarbeitung eines Maschinenbefehls,
- $h_i \gg 1$ : Prozessor bei Abarbeitung eines Programms,
- $h_i \ll 1$ : Speicherzelle je Speicherzugriff, ...



Schlecht nachweisbar sind die Fehler in den selten genutzten Systembestandteilen:

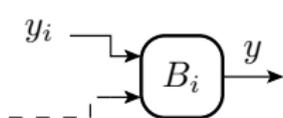
- in Auswahl- und Ausnahmefällen,
- in Zellen großer Blockspeicher, ...

Wie schlecht potentielle Fehler nachweisbar sind, hängt nicht nur von der Zielfunktion, sondern auch erheblich von der Struktur der Realisierung ab:



## Beobachtbarkeit

Die Ergebnisse einer genutzten Teil-Service-Leistung  $y_i$  werden über eine Funktion  $B_i$  auf die Ergebnisse  $y$  der Gesamt-Service-Leistung abgebildet. Die Beobachtbarkeit  $p_{\text{Beob.}i} = b_i$ , dass Verfälschungen von  $y_i$  das Gesamtergebnis  $y$  verfälschen, hängt von der Verfälschung und der Funktion  $B_i$  ab.



$y_i$  Ergebnisse von Teil-Service  $i$   
 $y$  Ergebnis des Gesamtsystems  
 $B_i$  Beobachterfunktion für  $y_i$

Fehlerhafte Ergebnisse einer Teil-Service-Leistung  $i$  sind immer beobachtbar ( $b_i = 1$ ), wenn sie

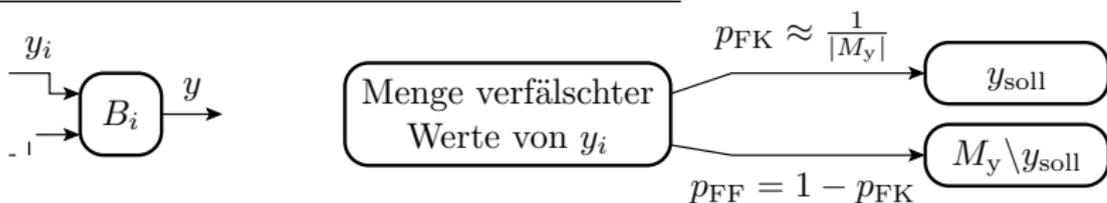
- gleichzeitig Ergebnisse der Gesamt-Service-Leistung sind,
- linear oder
- mit einer umkehrbaren Funktion auf das Gesamtergebnis abgebildet werden.



Bei nicht umkehrbaren Beobachterfunktionen liefert eine Mengenbetrachtung einen ersten Richtwert für die Beobachtbarkeit. Angenommen, der richtige Wert von  $y_i$  und alle Verfälschungen werden gleichwahrscheinlich auf Werte von  $y$  abgebildet. Dann ist die Beobachtbarkeit die Wahrscheinlichkeit, dass ein verfälschtes  $y_i$  auf ein falsches  $y$  abgebildet wird:

$$b_i \approx p_{\text{FK}} \approx 1 - \frac{1}{|M_y|}$$

( $|M_y|$  – Anzahl der unterschiedlichen mit  $y$  darstellbaren Werte).



- $p_{\text{FK}}$  Wahrscheinlichkeit der Abbildung fehlerhafter Werte auf korrekte
- $p_{\text{FF}}$  Wahrscheinlichkeit der Abbildung fehlerhafter Werte auf fehlerhafte
- $M_y$  Menge der mit  $y$  darstellbaren Ergebnisse
- $y_{\text{soll}}$  richtiges Ergebnis für  $y$



Für den Zufallstest interessieren die schwer zu beobachtenden Fehler. Tendenziell am schlechtesten beobachtbar sind nach der Mengenbetrachtung Verfälschungen, die von der Beobachterfunktion  $B_i$  auf ein binäres Ergebnis  $|M_y| = 2$  abgebildet werden (Beobachtbarkeit  $b_i \approx 0,5$ ):

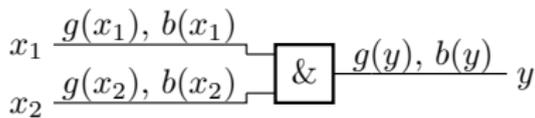
- Berechnung von Verzweigungsbedingungen,
- Digitalisierung,
- ...

Eine logische Weiterverarbeitung kann die Beobachtbarkeit noch erheblich mindern.

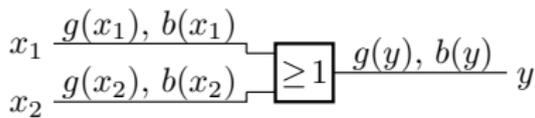


## Beobachtbarkeit bei logischer Weiterverarbeitung

Die Eingabe einer UND-Operation ist beobachtbar, wenn die andere Eingabe eins, bei einer ODER-Operation, wenn die andere Eingabe null ist. Die Auftrittshäufigkeit einer Eins ist die Wichtung  $g$  und einer Null die Gegenwahrscheinlichkeit  $1 - g$ .



$$\begin{aligned} b(x_2) &= b(y) \cdot g(x_1) \\ b(x_1) &= b(y) \cdot g(x_2) \\ g(y) &= g(x_1) \cdot g(x_2) \end{aligned}$$



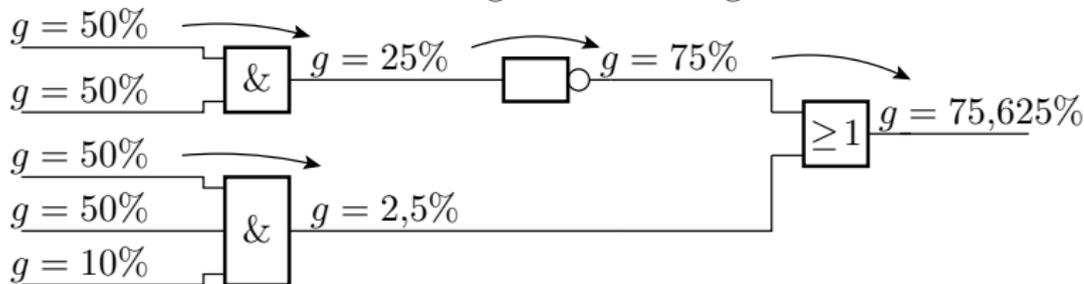
$$\begin{aligned} b(x_1) &= b(y) \cdot (1 - g(x_2)) \\ b(x_2) &= b(y) \cdot (1 - g(x_1)) \\ g(y) &= 1 - (1 - g(x_1)) \cdot (1 - g(x_2)) \end{aligned}$$



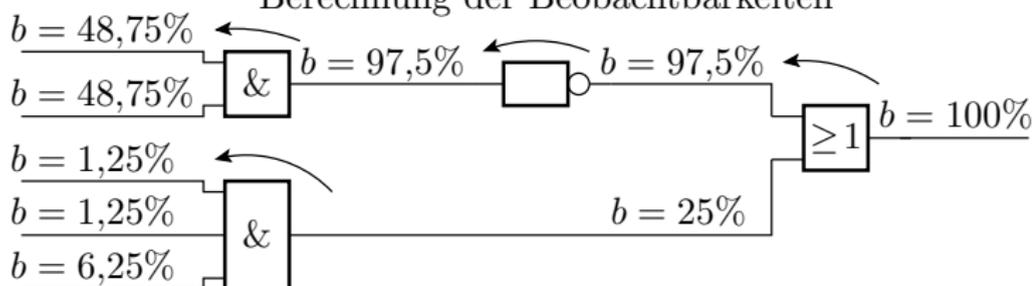
$$\begin{aligned} b(x) &= b(y) \\ g(y) &= (1 - g(x)) \end{aligned}$$

Die Wichtungen werden in Richtung und die Beobachtbarkeiten entgegen der Richtung des Berechnungsflusses bestimmt.

## Berechnung der Wichtungen



## Berechnung der Beobachtbarkeiten



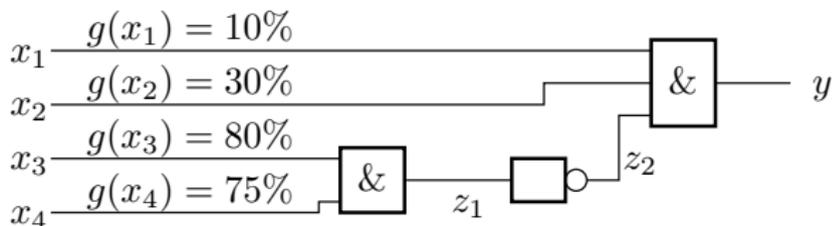
Die Beobachtbarkeit kann sehr kleine Werte annehmen. Wie bei Fehlerbäumen sind rekongergente Auffächerungen problematisch für ihre Berechnung (vergl. TV-F1, Abschn. Fehlerbaumanalyse).



## Beispielaufgabe

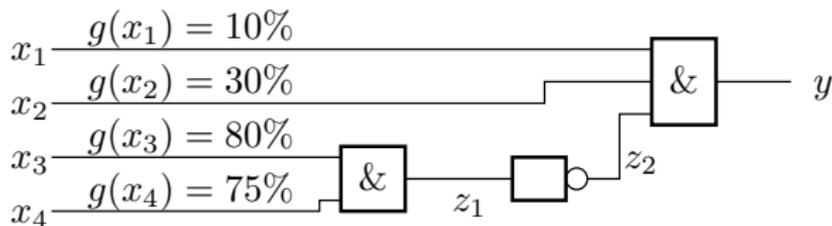


Welche Beobachtbarkeit hat Eingang  $x_1$  mit den vorgegebenen Wichtungen der Bitsignale an den Eingängen?





## Lösung



- $x_1$  ist beobachtbar, wenn  $x_2 = 1$  und  $z_2 = 1$ :

$$b(x_1) = g(x_2) \cdot g(z_2)$$

- $z_2$  ist eins, wenn  $z_1 = 0$ :

$$g(z_2) = 1 - g(z_1)$$

- $z_1$  ist eins, wenn  $x_3 = 1$  und  $x_4 = 1$ :

$$g(z_1) = g(x_3) \cdot g(x_4)$$

$$b(x_1) = g(x_2) \cdot (1 - g(x_3) \cdot g(x_4))$$

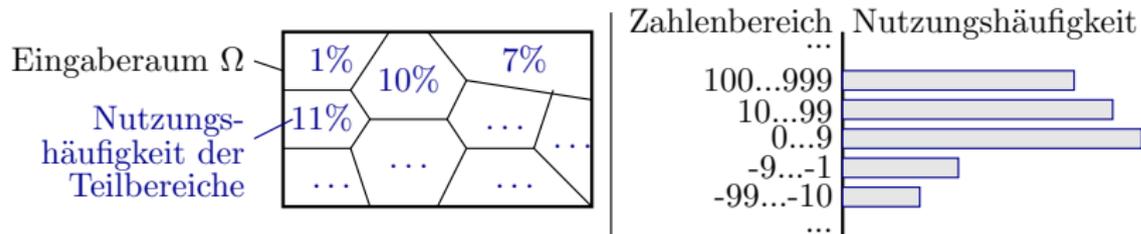
$$= 30\% \cdot (1 - 80\% \cdot 75\%) = 12\%$$



## Operationsprofil und Wichtung

## Operationsprofil

Der Eingaberaum für einen Service ist in der Regel in Teilbereiche unterteilt, die unterschiedlich häufig genutzt werden. Beispielsweise werden kleine Zahlenwerte häufiger als große und positive häufiger als negative genutzt.

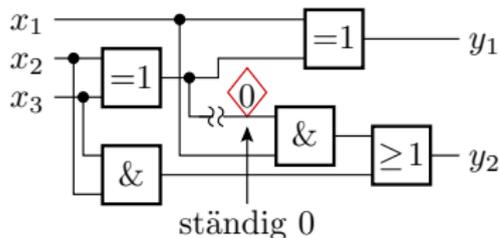


Bei einem menügesteuerten Programm werden die einzelnen Menüeinträge unterschiedlich oft ausgewählt.

Operation	editieren	löschen	browse	drucken
Nutzungshäufigkeit	35%	12%	46%	7%

## Operationsprofil und Fehlernachweis

In der Beispielschaltung ist die Verbindung zu einem Gattereingang unterbrochen, der dadurch ständig null führt. Nachweis mit zwei der acht möglichen Eingaben. Nachweiswahrscheinlichkeit gleich Summe der Auftrittshäufigkeiten dieser beiden Eingaben:



Eingabe			Ausgabe		Auftrittshäufigkeit		
$x_3$	$x_2$	$x_1$	$y_2$	$y_1$			
0	0	0	0	0	0,125	0,1	0,1
0	0	1	0	1	0,125	0,05	0,1
0	1	0	0	1	0,125	0,15	0,2
0	1	1	1	0	0,125	0,2	0,05
1	0	0	0	1	0,125	0,05	0,2
1	0	1	1	0	0,125	0,2	0,05
1	1	0	1	0	0,125	0,05	0,2
1	1	1	1	1	0,125	0,2	0,1

Eingaben die den Fehler nachweisen

Nachweiswahrscheinlichkeit: 0,25 0,4 0,1

Erheblicher Einfluss auf die Fehlernachweiswahrscheinlichkeiten.



## Gewichteter Zufallstest

Ein einfach zu beschreibendes/erzeugendes Operationsprofil für digitale Schaltungen ist die bitweise Wichtung:

- Auftrittswahrscheinlichkeit für Bitwert »1«

$$P(x_i = 1) = g(x_i)$$

- Auftrittswahrscheinlichkeit für Bitwert »0«

$$P(x_i = 0) = 1 - g(x_i)$$

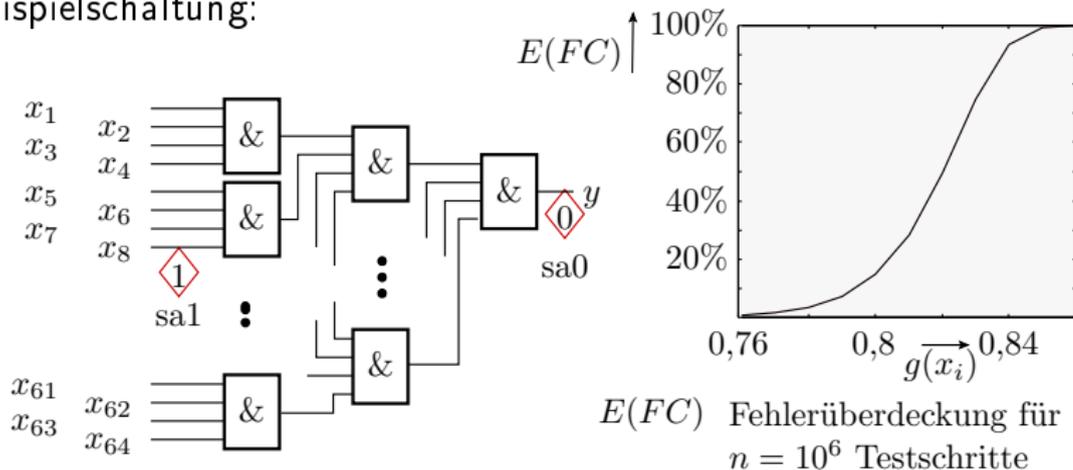
( $g_i$  – Wichtung).

- Auftrittswahrscheinlichkeit eines  $m$ -Bit-Vektors  $\mathbf{x}$

$$P(\mathbf{x}) = \prod_{i=0}^{m-1} \begin{cases} g(x_i) & \text{wenn } x_i = 1 \\ 1 - g(x_i) & \text{wenn } x_i = 0 \end{cases}$$

( $m$  – Bitanzahl).

Beispielschaltung:



Angenommene Fehler: Für je einen der 64 Eingänge ständig 1:

$$p_{sa1} = g^{63} \cdot (1 - g)$$

 Für den Ausgang ständig 0:  $p_{sa0} = g^{64}$ 

Eine Wichtung von  $g = 86\%$  verringert die erforderliche Testsatzlänge für  $p_i(n) \gg 99\%$  von  $n \gg 2^{64}$  auf  $n \approx 10^6$ .



## Operationsprofil, Wichtung, ...

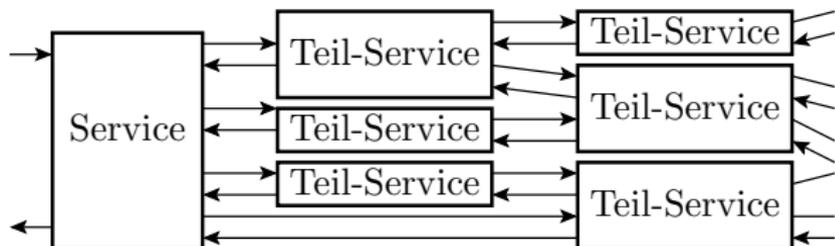
Bei gleichem Operationsprofil für Test und Anwendung lässt sich aus dem Testaufwand auf die Zuverlässigkeit im späteren Einsatz schließen.

Schlecht nachweisbare Fehler lassen sich außer durch gezielt berechnete Tests auch abdecken durch:

- Verbesserung der Steuer- und Beobachtbarkeit (z.B. durch Veränderung und Beobachtung von Variablen mit dem Debugger),
- den isolierten Test ansonsten schlecht testbarer Teilsysteme,
- Test mit unterschiedlichen Operationsprofilen / Eingabewichtungen, ...



## FHSF-Funkt., isolierter Test, Eingabewichtung, ...



Für jeden schlecht testbaren Teil-Service Erhöhung

- der Nutzungshäufigkeit von  $h_i \ll 1$  auf 1 und
- der Beobachtbarkeit von  $b_i \ll 1$  auf 1.
- Verringerung der mittleren Anzahl von SL je FF um  $h_i \cdot b_i$ :

$$H(x) \rightarrow H(h_i \cdot b_i \cdot x)$$

Ein isolierter Zufallstest der Länge  $n$  erkennt etwa dieselben Fehler wie ein Zufallstest der Länge  $\frac{n}{h_i \cdot b_i}$  im Verbund. Eine vergleichbare Wirkung hat eine günstige Eingabewichtung.



## Zufallstest mit Umschaltung der Wichtung

Ein pragmatischer Ansatz aus<sup>4</sup>:

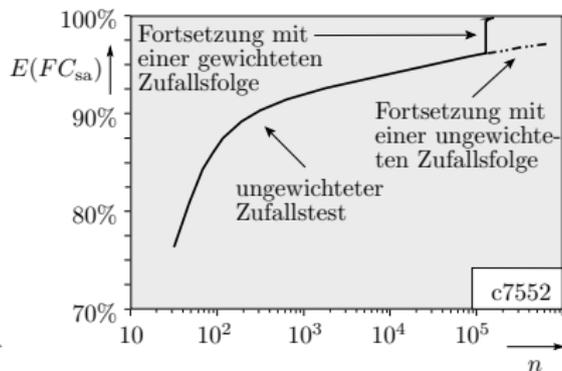
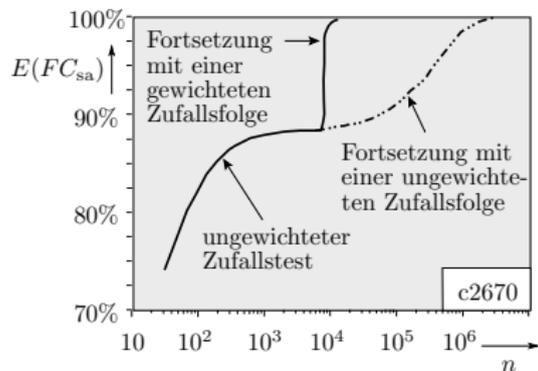
- 1 Festlegung einer größeren Menge von Modellfehlern.
- 2 Längerer Test mit ungewichteten Zufallswerten und Abhaken aller damit nachweisbaren Modellfehler.
- 3 Suche für die restlichen Modellfehler eine Eingabewichtung, die deren Nachweiswahrscheinlichkeiten erheblich erhöht.
- 4 Längerer Test mit den so gewichteten Zufallswerten und Abhaken aller damit nachweisbaren Modellfehler.
- 5 Wenn erforderlich, Wiederholung von Schritt 3 und 4.

---

<sup>4</sup>J. Hartmann, G. Kemnitz: How to do weighted random testing for BIST?. ICCAD 1993.

## Experiment mit den Schaltungen c2670 und c7552<sup>5</sup>

- Test mit  $10^4$  bzw.  $10^5$  ungewichteten Zufallsmustern, die 90% bzw. 95% der Haftfehler nachweisen.
- Gezielte Testberechnung für die restlichen Haftfehler.
- Individuelle Wichtung aller Eingabebits zur Maximierung der mittleren Auftrittshäufigkeit der berechneten Testeingaben.



<sup>5</sup>Kombinatorische Benchmarkschaltungen zum Vergleich von Testlösungen. Die Zahl hinter dem »c« ist die Anzahl der Signalleitungen.





## Operationsprofil und Testfälle

### Testfall

Ein Testfall beschreibt einen elementaren, funktionalen Softwaretest, der der Überprüfung einer in einer Spezifikation zugesicherten Eigenschaft eines Testobjektes dient.

Die selektive Überprüfung von Funktionen entspricht in der Regel einem kurzen Zufallstest (im Extremfall mit nur einem Testbeispiel) für ein bestimmtes Operationsprofil.

Gedankliche Weiterentwicklung: Beschreibung von Testfällen durch Operationsprofile / Eingabewichtungen + Länge des Zufallstests.

Typische Operationsprofile für den SW-Test:

- typische Funktionen, Grenzwerte,
- sicherheitskritische Funktionen, ..., »inkompetenter Nutzer«



# Verteilungen



### Kennwerte schätzen

Zur Bewertung der Verlässlichkeit und der Maßnahmen zu ihrer Sicherung sind

- zu erwartende Bereiche für Zählwerte (Fehler, FF, ...),
- Wahrscheinlichkeiten (Fehlerauftrittswahrscheinlichkeiten, Fehlernachweiswahrscheinlichkeiten, ...) und
- Verteilungen, insbesondere FHSF-Funktionen

zu schätzen. Grundlage dafür sind Zufallsexperimente, Zufallsgrößen, deren **Verteilungen**, Erwartungswerte, ...



### Verteilung

Eine Verteilung weist möglichen Werten einer Zufallsvariablen Werte zu:

- Häufigkeitsverteilung: Zählwerte, Umfragewerte, ...
- Wahrscheinlichkeitsverteilung: Wahrscheinlichkeiten.

Häufigkeitsverteilungen werden empirisch erfasst. Mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen lassen sich Häufigkeitsverteilungen annähern, vorhersagen, auf ähnliche Sachverhalte übertragen. Wichtige Kenngrößen von Verteilungen sind **Erwartungswert**, **Varianz** und **Standardabweichung**.



# Erwartungswert, Varianz, ...



## Erwartungswert

Bei einer Wahrscheinlichkeitsverteilung sind die möglichen Ergebnisse<sup>6</sup> ein Zahlenbereich (abzählbar oder stetig). Jedem Wert dieses Bereiches ist eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet.

mögliche Ergebnisse $x_i$	2	3	4	5	6	Summe
Wahrscheinlichkeit $p_i$	4%	12%	29%	37%	18%	100%

Der **Erwartungswert**  $E(X)$  ( $X$  – Zufallsgröße) ist der mit ihren Auftrittswahrscheinlichkeiten gewichtete Mittelwert:

$$E(X) = \sum_{i=1}^N p_i \cdot x_i \quad (6)$$

( $N$  – Anzahl der möglichen Ergebnisse). Für das Beispiel:

$$2 \cdot 4\% + 3 \cdot 12\% + 4 \cdot 29\% + 5 \cdot 37\% + 6 \cdot 18\% = 4,53$$

---

<sup>6</sup>Die möglichen Ergebnisse werden als Realisierungen bezeichnet.



## Varianz und Standardabweichung

Die **Varianz**  $D^2(X)$  ist die mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert:

$$D^2(X) = \sum_{i=1}^N p_i \cdot (x_i - E(X))^2 \quad (7)$$

Die **Standardabweichung**  $\sqrt{D^2(X)}$  ist die Wurzel aus der Varianz und ein Maß dafür, wie stark die Ergebnisse eines Zufallsexperiments um ihren Erwartungswert streuen.

mögliche Ergebnisse $x_i$	2	3	4	5	6	Summe
Wahrscheinlichkeit $p_i$	4%	12%	29%	37%	18%	100%

$$\begin{aligned} D^2(X) &= 4\% \cdot (2 - 4,53)^2 + 12\% \cdot (3 - 4,53)^2 + 29\% \cdot (4 - 4,53)^2 \\ &+ 37\% \cdot (5 - 4,53)^2 + 18\% \cdot (6 - 4,53)^2 = 1,09 \end{aligned}$$

$$\sqrt{D^2(X)} = 1,04$$

## Verschiebungssatz

Die Varianz ist gleichfalls die Differenz aus dem Erwartungswert der Quadrate und dem Quadrat des Erwartungswertes<sup>7</sup>:

$$D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \quad (8)$$

Herleitung:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N p_i \cdot (x_i - E(X))^2 &= \sum_{i=1}^N p_i \cdot (x_i^2 - 2 \cdot x_i \cdot E(X) + E(X)^2) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^N p_i \cdot x_i^2}_{E(X^2)} + E(X) \cdot \left( E(X) \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^N p_i}_1 - 2 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^N p_i \cdot x_i}_{E(X)} \right) \end{aligned}$$

Für das Beispiel zuvor:

$$D^2(X) = 4\% \cdot 2^2 + 12\% \cdot 3^2 + 29\% \cdot 4^2 + 37\% \cdot 5^2 + 18\% \cdot 6^2 - 4,53^2 = 1,09$$

<sup>7</sup>Bei begrenzter Rechengenauigkeit u.U. numerisch problematisch.



## Ein weiteres Beispiel



Gegeben ist die Verteilung in der nachfolgenden Tabelle:

Wert	5	6	8	11	22
Wahrscheinlichkeit	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Wie groß sind

- 1 der Erwartungswert,
- 2 die Varianz und
- 3 die Standardabweichung?



## Lösung

Wert	5	6	8	11	22
Wahrscheinlichkeit	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

1 Erwartungswert:

$$E(X) = 0,1 \cdot 5 + 0,2 \cdot 6 + 0,4 \cdot 8 + 0,2 \cdot 11 + 0,1 \cdot 22 = 9,3$$

2 Varianz nach Gl. 7:

$$\begin{aligned} D^2(X) &= 0,1 \cdot (5 - 9,3)^2 + 0,2 \cdot (6 - 9,3)^2 + 0,4 \cdot (8 - 9,3)^2 \\ &+ 0,2 \cdot (11 - 9,3)^2 + 0,1 \cdot (22 - 9,3)^2 = 21,4 \end{aligned}$$

Varianz nach Verschiebungssatz:

$$\begin{aligned} D^2(X) &= 0,1 \cdot 5^2 + 0,2 \cdot 6^2 + 0,4 \cdot 8^2 + 0,2 \cdot 11^2 \\ &+ 0,1 \cdot 22^2 - 9,3^2 = 21,4 \end{aligned}$$

3 Standardabweichung:  $\sqrt{D^2(X)} = \sqrt{21,4} = 4,63$



## Erwartungswert und Varianz einer Datenstichprobe

Für eine Datenstichprobe einer Zufallsgröße  $X$

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_{N_S})$$

ist der Schätzer für den Erwartungswert der Mittelwert:

$$E_S(X) = \frac{1}{N_S} \cdot \sum_{i=1}^{N_S} w_i \quad (9)$$

---

Der Schätzer für die Varianz ist die mittlere quadratische Abweichung vom geschätzten Mittelwert:

$$D_S^2(X) = \frac{1}{N_S - 1} \cdot \sum_{i=1}^{N_S} (w_i - E(X))^2 \quad (10)$$

Der Quotient ist um eins kleiner als die Stichprobengröße  $N_S$ , d.h die Abschätzung der Varianz erfordert mindestens Stichprobengröße  $N_S = 2$ .



# Lineare Transformationen, ...



## Lineare Transformation

Lineare Transformationen sind die Multiplikation und Addition einer Zufallsgröße mit reellen Zahlen. Der Erwartungswert vergrößert und verschiebt sich um dieselben Werte:

$$E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$$

Bei der Varianz entfällt die Verschiebung und der Skalierungsfaktor geht im Quadrat ein<sup>8</sup>:

$$D^2(a \cdot X + b) = a^2 \cdot D^2(X) \quad (11)$$

Die Varianz ist insbesondere verschiebungsinvariant und bleibt bei einer Spiegelung der Verteilung gleich:

$$D^2(-X) = (-1)^2 \cdot D^2(X) = D^2(X)$$

---

<sup>8</sup>Die Kontrolle der Gleichung ist eine Übungsaufgabe.



## Kontrolle am Beispiel



Realisierungen $x$ von $X$	1	2	3
Realisierungen $y$ von $Y = 5 - 2X$	3	1	-1
$P(Y = y) = P(X = x)$	0,3	0,5	0,2

$$E(X) = 0,3 + 1 + 0,6 = 1,9$$

$$D^2(X) = 0,3 + 2 + 1,8 - 1,9^2 = 0,49$$

$$E(Y) = 0,9 + 0,5 - 0,2 = 1,2$$

$$D^2(Y) = 2,7 + 0,5 + 0,2 - 1,2^2 = 1,96$$

$$E(Y) = 5 - 2 \cdot E(X)$$

$$D^2(Y) = (-2)^2 \cdot D^2(X)$$



## Summe von Zufallsgrößen

Die Verteilung der Summe von Zufallsgrößen ordnet jedem der möglichen Werte der Summe die Wahrscheinlichkeit zu, dass die Summe diesen Wert hat:

$x$	1	3	4	$y$	2	3	4
$P(X = x)$	0,1	0,4	0,5	$P(Y = y)$	0,3	0,6	0,1

$$P(X + Y = 3) = P(X = 1) \cdot P(Y = 2)$$

$$P(X + Y = 4) = P(X = 1) \cdot P(Y = 3)$$

$$P(X + Y = 5) = P(X = 1) \cdot P(Y = 4) + P(X = 3) \cdot P(Y = 2)$$

$$P(X + Y = 6) = P(X = 3) \cdot P(Y = 3) + P(X = 4) \cdot P(Y = 2)$$

$$P(X + Y = 7) = P(X = 3) \cdot P(Y = 4) + P(X = 4) \cdot P(Y = 3)$$

$$P(X + Y = 8) = P(X = 4) \cdot P(Y = 4)$$



Für die Summe von Zufallsgrößen ist der Erwartungswert gleich der Summe der Erwartungswerte:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Die Varianz ist die Summe der Varianzen plus doppelte Kovarianz:

$$D^2(X + Y) = D^2(X) + D^2(Y) + 2 \cdot \text{Cov}(X, Y) \quad (12)$$

mit der Kovarianz<sup>9</sup>:

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))) \quad (13)$$

Für unabhängige Zufallsgrößen ist die Kovarianz null und die Varianz die Summe der Varianzen der Summanden:

$$D^2(X + Y) = D^2(X) + D^2(Y)$$

---

<sup>9</sup>Die Kontrolle der Gleichungen sind Übungsaufgaben.

## Gemessener Wert und Messfehler

In der Messtechnik gilt für jeden gemessenen Wert:

$$X_M = X + X_F$$

( $X$  – Messwert;  $X_F$  – Messfehler). Alle drei Größen haben einen Erwartungswert und eine Varianz. Mit dem Messwert und dem Messfehler als unabhängige Zufallsgrößen, gilt für diese:

$$E(X_M) = E(X_F) + E(X)$$

$$D^2(X_M) = D^2(X_F) + D^2(X)$$

- $E(X_F)$  – Maß für den systematischen Messfehler
- $\sqrt{D^2(X_F)}$  – Standardabweichung und Maß für den zufälligen Messfehler.

## Beispielaufgabe



Der gemessene Wert einer Widerstands-Charge ist im Mittel  $E(R_M) = 1010 \Omega$  und hat eine Standardabweichung von  $\sqrt{D^2(R_M)} = 11,18 \Omega$ . Die Messung habe einen systematischen Fehler von  $E(R_F) = 12 \Omega$  und eine Standardabweichung von  $\sqrt{D^2(R_F)} = 5 \Omega$ . Welchen Erwartungswert und welche Standardabweichung hat der (tatsächliche) Messwert?

---

$$E(R) = E(R_M) - E(R_F) = 1010 \Omega - 12 \Omega = 998 \Omega$$

$$D^2(R) = D^2(R_M) - D^2(R_F) = (11,18 \Omega)^2 - (5 \Omega)^2 = 100 \Omega^2$$

$$\sqrt{D^2(R)} = 10 \Omega$$

Der (tatsächliche) Messwert hat eine kleinere Standardabweichung als der gemessene Wert.



# Verteilung von Zählwerten



## Verteilung von Zählwerten

Zählwerte sind eine Summe von Einzelereignissen (z.B. Anzahl der korrekt ausgeführten oder fehlerhaft ausgeführten Service-Leistungen). Die Einzelereignisse können null oder eins sein und haben eine Bernoulli-Verteilung:

$k$	0	1
$P(X_i = k)$	$1 - p_i$	$p_i$

( $X_i$  – Zufallsgröße Einzelereignis  $i$ ;  $p_i$  – Eintrittswahrscheinlichkeit  $X_i = 1$ ). Für  $N$  zu zählende Versuchsergebnisse ist die Anzahl der eingetretenen Ereignisse die Summe der Zufallsgrößen  $X_i$ :

$$X = \sum_{i=1}^N X_i$$



Der Erwartungswert der Einzelereignisse ist

$k$	0	1
$P(X_i = k)$	$1 - p_i$	$p_i$

$$E(X_i) = (1 - p_i) \cdot 0 + p_i \cdot 1 = p_i$$

Varianz nach Verschiebungssatz:

$$D^2(X_i) = (1 - p_i) \cdot 0^2 + p_i \cdot 1^2 - p_i^2 = p_i \cdot (1 - p_i)$$

Der Erwartungswert der Summe ist die Summe der Erwartungswerte:

$$E(X) = \sum_{i=1}^N p_i \quad (14)$$

Für die Varianz wird oft unterstellt, dass die zu zählenden Ereignisse, wie das Auftreten unterschiedlicher Fehlfunktion, nicht voneinander abhängen (Varianz der Summe gleich der Summe der Varianzen der Summanden, Kovarianz null):

$$D^2(X) = \sum_{i=1}^N p_i \cdot (1 - p_i) \quad (15)$$



Für die Verteilung gilt, dass bei Hinzunahme eines weiteren Experiments  $i$  sich mit Wahrscheinlichkeit  $p_i$  der Zählwert um eins erhöht und mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - p_i$  gleich bleibt:

$$P_i(X = k) = p_i \cdot P_{i-1}(X = k - 1) + (1 - p_i) \cdot P_{i-1}(X = k)$$

Berechnung der Verteilung:

$$P_1(X = 0) = 1 - p_1$$

$$P_1(X = 1) = p_1$$

$i$	$p_i$	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$
1	30%	70%	30%			
2	50%	35%	50%	15%		
3	40%	21%	44%	29%	6%	
4	10%	18,9%	41,7%	30,5%	8,3%	0,6%

Wiederhole für  $i = 2$  bis  $N$

$$P_i(X = 0) = P_{i-1}(X = 0) \cdot (1 - p_i)$$

$$P_i(X = i) = P_{i-1}(X = i - 1) \cdot p_i$$

Wiederhole für  $k = 1$  bis  $i - 1$

$$P_i(X = k) = P_{i-1}(X = k) \cdot (1 - p_i) + P_{i-1}(X = k - 1) \cdot p_i$$

( $i$  – Anzahl der berücksichtigten Summanden;  $k$  – Zählwert).



## Erwartungswert und Varianz für das Beispiel

Nach Gl. 6 beträgt der Erwartungswert der Summe aller

$N = 4$  Summanden:

$$E(X) = 18,9\% \cdot 0 + 41,7\% \cdot 1 + 30,5\% \cdot 2 + 8,3\% \cdot 3 + 0,6\% \cdot 4 = 1,3$$

$i$	$p_i$	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$
1	30%	70%	30%			
2	50%	35%	50%	15%		
3	40%	21%	44%	29%	6%	
4	10%	18,9%	41,7%	30,5%	8,3%	0,6%

Als Summe aller  $p_i$  nach Gl. 14 ist die Berechnung kürzer:

$$E(X) = 30\% + 50\% + 40\% + 10\% = 1,3$$

Die Varianz beträgt nach dem Verschiebungssatz Gl. 8:

$$18,9\% \cdot 0^2 + 41,7\% \cdot 1^2 + 30,5\% \cdot 2^2 + 8,3\% \cdot 3^2 + 0,6\% \cdot 4^2 - 1,3^2 = 0,79$$

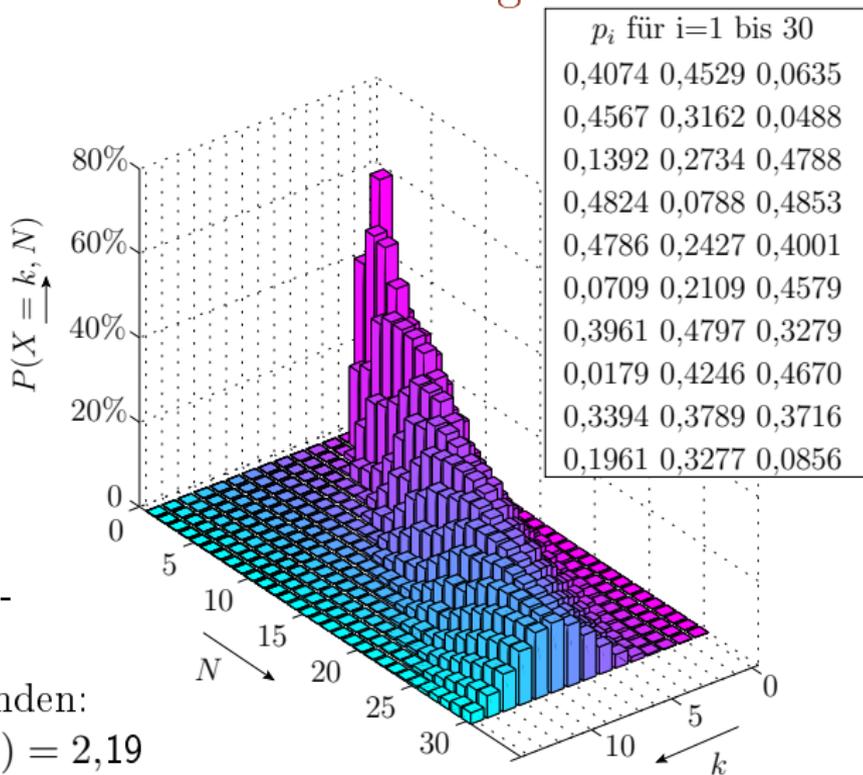
Die vereinfachte Berechnung nach Gl. 15 lautet:

$$D^2(X) = 0,3 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 0,9 = 0,79$$



## Mit Matlab berechnete Zählverteilung

Das nachfolgende Säulendiagramm zeigt eine mit Matlab schrittweise berechnete Zählverteilung. Die Eintrittswahrscheinlichkeiten der Zählereignisse siehe Kasten im Bild. Erwartungswert und Varianz für alle 30 Summanden:  
 $E(X) = 7,05$ ,  $D^2(X) = 2,19$





# Binomialverteilung



## Binomialverteilung

Für den Sonderfall, dass gleichwahrscheinliche Ereignisse gezählt werden (alle  $p_i = p$ ), ist die Summe der gezählten Ereignisse binomialverteilt

$$P(X = k) = \binom{N}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{N-k} \quad (16)$$

mit dem Erwartungswert

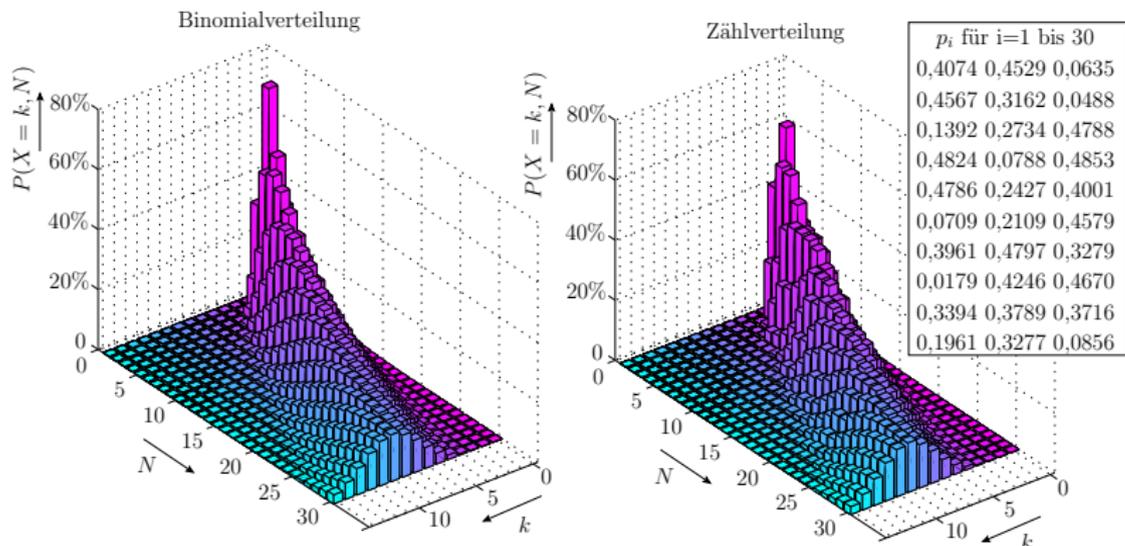
$$E(X) = N \cdot p$$

und der Varianz

$$D^2(X) = N \cdot p \cdot (1 - p) \quad (17)$$

( $N$  – Anzahl der gezählten Ereignisse, die 0 oder 1 sein können).

## Binomialverteilung vs. allgemeine Zählverteilung



Eine Binomialverteilung mit  $p = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N p_i$  und demselben  $N$  nähert eine Zählverteilung gut an, berechnet sich aus nur den zwei Parametern  $N$  und  $p$  und hat eine etwas kleinere Standardabweichung.

## Beispielaufgabe



Die mittlere Nachweiswahrscheinlichkeit von 10 Fehlern sei 30%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Fehler nachgewiesen werden?

---

Zur Kontrolle:

$$\begin{aligned}P(X \geq 2) &= 1 - \sum_{k=0}^1 \binom{10}{k} \cdot 0,3^k \cdot (1 - 0,3)^{10-k} \\ &= 1 - (0,7^{10} + 10 \cdot 0,3 \cdot 0,7^9) \\ &\approx 85\%\end{aligned}$$

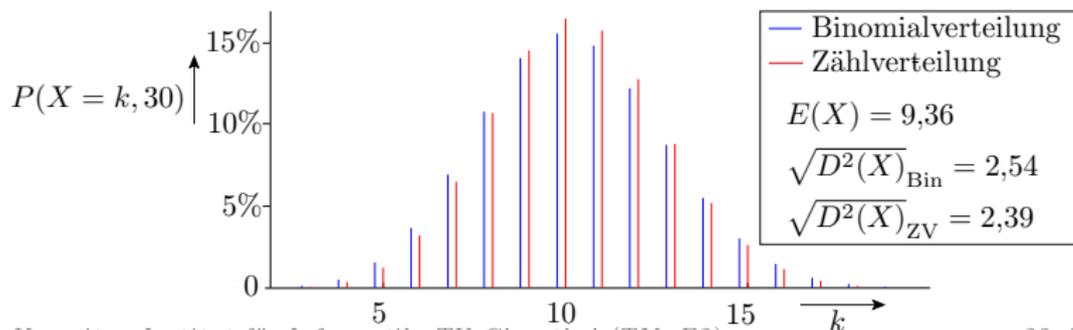
## Varianzobergrenze

### Satz

Bei gleicher Anzahl von unabhängigen Zählwerten  $N$  und  $p = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N p_i$  ist die Varianz der Binomialverteilung eine obere Schranke der Varianz einer Zählverteilung:

$$D^2(X)_{\text{Bin}} = N \cdot p \cdot (1 - p) \geq D^2(X)_{\text{ZV}} = \sum_{i=1}^N p_i \cdot (1 - p_i) \quad (18)$$

Für die beiden Verteilungen der Folie zuvor gilt für  $N = 30$ :





## Beweis

Ersatz der individuellen Auftrittswahrscheinlichkeiten der zu zählenden Ereignisse durch die mittlere Wahrscheinlichkeit und eine Differenz, die im Mittel null ist:

$$p_i = p + \delta_i \text{ mit } \sum_{i=1}^N \delta_i = 0$$

Varianz der Zählverteilung:

$$\begin{aligned} D^2(X)_{ZV} &= \sum_{i=1}^N (p + \delta_i) \cdot (1 - p - \delta_i) \\ &= \underbrace{N \cdot p \cdot (1 - p)}_{D^2(X)_{\text{Bin}}} - (1 - 2p) \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^N \delta_i}_0 - \underbrace{\sum_{i=1}^N \delta_i^2}_{\geq 0} \end{aligned}$$

$$D^2(X)_{ZV} \leq D^2(X)_{\text{Bin}} \sqrt{\quad}$$



## Effektive Anzahl der Zählversuche



## Abhängigkeiten zwischen zu zählenden Ereignissen

Die bisherigen Betrachtungen unterstellen, dass die zu zählenden Ereignisse unabhängig voneinander auftreten.

Für zu zählende Fehler und Fehlfunktionen gilt das nicht immer. Fehler im selben Teilsystem teilen sich z.B. Steuer- und Beobachtungsbedingungen. Ihr Nachweis erfordert z.T. gleiche Eingaben und Zustände.

- Wie lassen sich hierfür Verteilung und Varianz abschätzen?

---

Die empirische Lösung wird sein:

- Experimentelle Abschätzung  $E_S(X)$ ,  $D_S^2(X)$ .
- Festlegung von  $p$  und  $N_{\text{eff}}$  (mittlere Eintrittswahrscheinlichkeit und effektive Anzahl der Zählversuche) so, dass eine Binomialverteilung mit  $p$  und  $N_{\text{eff}}$  den Erwartungswert  $E_S(X)$  und die Varianz  $D_S^2(X)$  hat.



## Gedankenexperiment zur Varianzerhöhung

Angenommen, von den  $N$  zu addierenden Zufallsgrößen mit dem Wertebereich 0 und 1 haben immer  $\kappa$  denselben Wert. Dann können je  $\kappa$  Zufallsgrößen zu einer zusammengefasst werden mit der Verteilung:

$$P(X_i = 0) = 1 - p_i$$

$$P(X_i = \kappa) = p_i$$

Die Zählwerte sind dann eine Summe von  $N/\kappa$  unabhängigen Zufallsgrößen:

$$X = \sum_{i=1}^{N/\kappa} X_i$$

Der Erwartungswert der Summanden:

$$E(X_i) = 0 \cdot (1 - p_i) + \kappa \cdot p_i = \kappa \cdot p_i$$

Varianz der Summanden (nach Verschiebungssatz):

$$\begin{aligned} D^2(X_i) &= (1 - p_i) \cdot 0^2 + p_i \cdot \kappa^2 - (\kappa \cdot p_i)^2 \\ &= \kappa^2 \cdot p_i \cdot (1 - p_i) \end{aligned}$$



Erwartungswert der Summe:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N/\kappa} \kappa \cdot p_i = N \cdot p$$

Varianz der Summe:

$$D^2(X) = \sum_{i=1}^{N/\kappa} p_i \cdot \kappa^2 \cdot (1 - p_i) \leq \kappa \cdot N \cdot p \cdot (1 - p)$$

( $p$  – mittlere Eintrittswahrscheinlichkeit). Das Verhältnis aus Varianz und Erwartungswert:

$$\frac{D^2(X)}{E(X)} = \frac{\kappa \cdot N \cdot p \cdot (1 - p)}{N \cdot p} = \kappa \cdot (1 - p) \quad \text{mit } p = \frac{E(X)}{N}$$

Die Rechengröße  $\kappa$  wird im Weiteren als Varianzerhöhung bezeichnet:

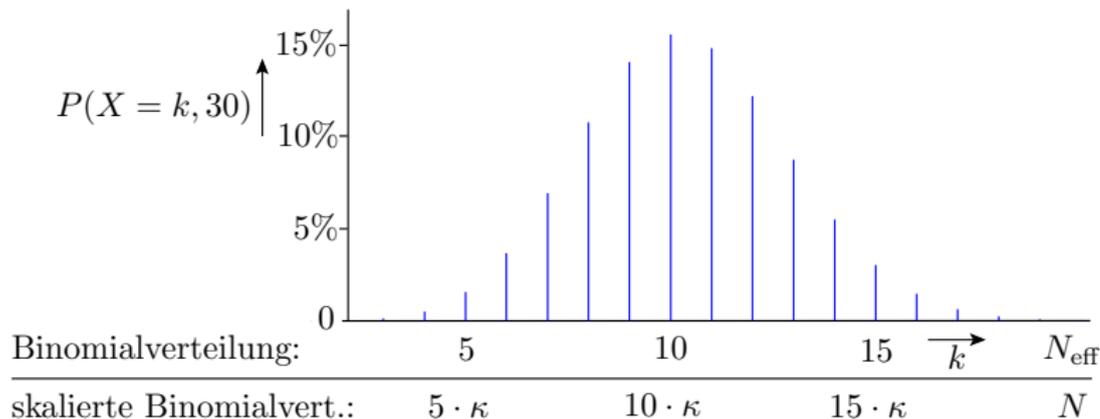
$$\kappa = \frac{D^2(X)}{E(X) \cdot \left(1 - \frac{E(X)}{N}\right)} \approx \frac{D_S^2(X)}{E_S(X) \cdot \left(1 - \frac{E_S(X)}{N}\right)} \quad (19)$$

und ist aus Erwartungswert  $E_S(X)$  und Varianz  $D_S^2(X)$  einer Datenstichprobe abschätzbar.



## Effektive Anzahl der Zählversuche

Eine Zählgröße aus  $\frac{N}{\kappa}$  Summanden mit den Werten 0 und  $\kappa$  hat dieselbe Verteilung wie eine mit genauso vielen Summanden mit den Werten 0 und 1, wenn alle Zählwerte durch  $\kappa$  geteilt werden.





## Erwartungswert und Varianz einer skalierten Binomialverteilung

Mit der Varianzerhöhung  $\kappa$  und der effektiven Fehleranzahl

$$N_{\text{eff}} = \frac{N}{\kappa} \quad (20)$$

ergibt sich für Varianz und Erwartungswert:

	Erwartungswert	Varianz
Binomialverteilung	$N_{\text{eff}} \cdot p$	$N_{\text{eff}} \cdot p \cdot (1 - p)$
skalierte Binomialv.	$\kappa \cdot N_{\text{eff}} \cdot p = N \cdot p$	$\kappa^2 \cdot N_{\text{eff}} \cdot p \cdot (1 - p)$ $= \kappa \cdot N \cdot p \cdot (1 - p)$



## Beispielabschätzung der effektiven Fehleranzahl



- $N = 2.000$  gezählte Werte.  $N_S = 10$  Wiederholungen des Zählversuchs. Ergebnisse (Zählwerte):

Versuch $i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ergebnis $w_i$	34	67	58	40	49	47	66	54	35	57

- Erwartungswert der Datenstichprobe nach Gl. 9:

$$E_S(X) = \frac{1}{N_S} \cdot \sum_{i=1}^{N_S} w_i = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} w_i = 50,7$$

- Varianz der Datenstichprobe nach Gl. 10:

$$D_S^2(X) = \frac{1}{N_S - 1} \cdot \sum_{i=1}^{N_S} (w_i - E(X))^2 = \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{10} (w_i - 50,7)^2 = 140,01$$



- Geschätzter Erwartungswert:  $E_S(X) = 50,7$
- mittlere Eintrittswahrscheinlichkeit:  $p = \frac{E_S(X)}{N} = \frac{50,7}{2000} \approx 2,5\%$
- Geschätzte Varianz:  $D_S^2(X) = 140,01$
- $\kappa$  nach Gl. 19:

$$\kappa \geq \frac{D_S^2(X)}{E_S(X) \cdot (1-p)} = \frac{140,01}{50,7 \cdot (1-2,5\%)} = 2,83$$

- Effektive Fehleranzahl:

$$N_{\text{eff}} = \frac{N}{\kappa} \approx 707$$

- Kumulative skalierte Binomialverteilung mit demselben Erwartungswert und derselben Varianz:

$$P\left(\frac{X}{\kappa} \leq k\right) = \sum_{j=0}^k \binom{N_{\text{eff}}}{j} \cdot p^j \cdot (1-p)^{N_{\text{eff}}-j}$$



# Poisson-Verteilung

## Poisson-Verteilung

Beim Zählen vieler seltener Ereignisse, z.B. der Fehlfunktionen bei Millionen von Service-Anforderungen, von denen nur wenige eintreten, streben die Eintrittswahrscheinlichkeit der Einzelereignisse und die Abweichung zwischen Erwartungswert und Varianz gegen null:

$$E(X_i) - D^2(X_i) = p_i - p_i \cdot (1 - p_i) = -p_i^2 \rightarrow 0$$

Die Varianz der zu zählenden Ereignisse und die der Summe streben gegen den Erwartungswert

$$D^2(X_i) = E(X_i)$$
$$D^2(X) = \sum_{i=1}^N D^2(X_i) = E(X) = \sum_{i=1}^N E(X_i)$$

Die Verteilung der Summe strebt gegen die Poisson-Verteilung.



Die Poisson-Verteilung ist eine einparametrische Verteilung, die sich allein aus dem Erwartungswert berechnet:

$$P(X = k) = \text{Poi}(k, E(X)) = e^{-E(X)} \cdot \frac{E(X)^k}{k!}$$

Der Erwartungswert einer Zählverteilung ist das Produkt aus der Anzahl der Zählwerte  $N$  und der mittleren Eintrittswahrscheinlichkeit  $p$ :

$$E(X) = \sum_{i=1}^N p_i = N \cdot p \quad \text{mit} \quad p = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N p_i$$

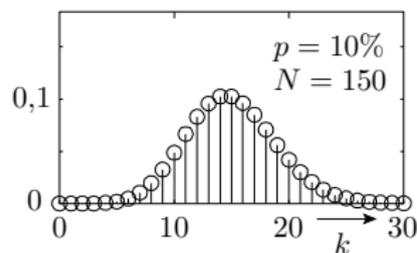
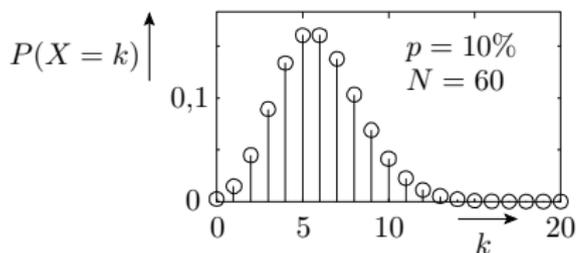
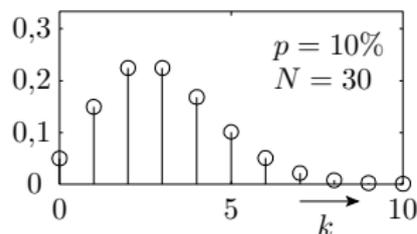
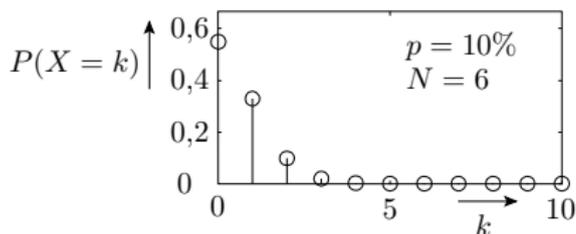
---

Für die Zählung von Ereignissen mit geringer Eintrittswahrscheinlichkeit  $p \ll 1$  lautet die Poisson-Verteilung:

$$P(X = k) = e^{-p \cdot N} \cdot \frac{(p \cdot N)^k}{k!} \quad (21)$$

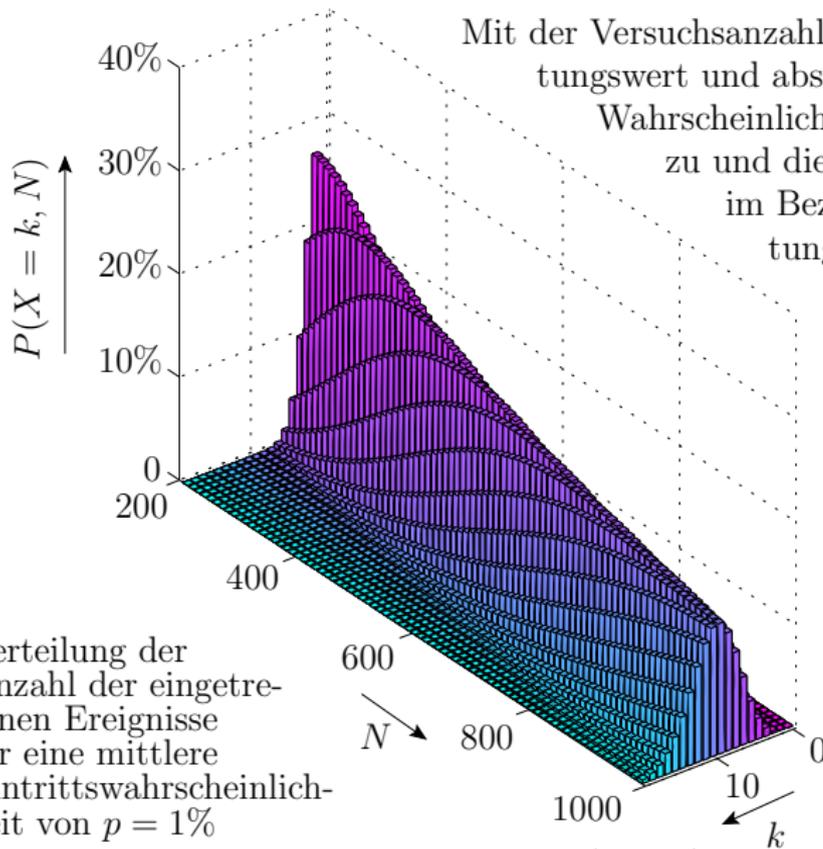
( $N$  – Anzahl der Zählversuche;  $p$  – mittlere Eintrittswahrscheinlichkeit).

$$P(X = k) = e^{-p \cdot N} \cdot \frac{(p \cdot N)^k}{k!}$$



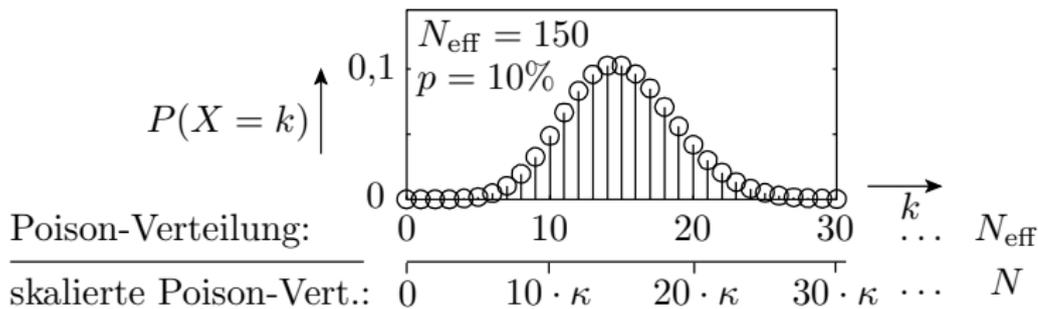
Der Erwartungswert  $E(X) = p \cdot N$  nimmt proportional mit  $N$  zu.

Die relative Breite des wahrscheinlichen Bereichs  $\frac{\sqrt{D^2(X)}}{E(X)} = \frac{1}{\sqrt{p \cdot N}}$  nimmt mit  $N$  ab. Siehe auch nächste Folie.



## Skalierte Poisson-Verteilung

Varianzerhöhungen  $\kappa = \frac{D^2(X)}{E(X)}$  durch Abhängigkeiten können wieder durch eine Streckung der Realisierungsachse berücksichtigt werden.



	Erwartungswert	Varianz
Poisson-Verteilung	$N_{\text{eff}} \cdot p$	$N_{\text{eff}} \cdot p$
skalierte Poisson-Vert.	$\kappa \cdot N_{\text{eff}} \cdot p = N \cdot p$	$\kappa^2 \cdot N_{\text{eff}} \cdot p = \kappa \cdot N \cdot p$

Für eine kleine Anzahl eintretender Ereignisse (0, 1, 2, ...) sind kaum Abhängigkeiten zu erwarten ( $\kappa = 1$ ;  $N_{\text{eff}} = N$ ).



# Normalverteilung

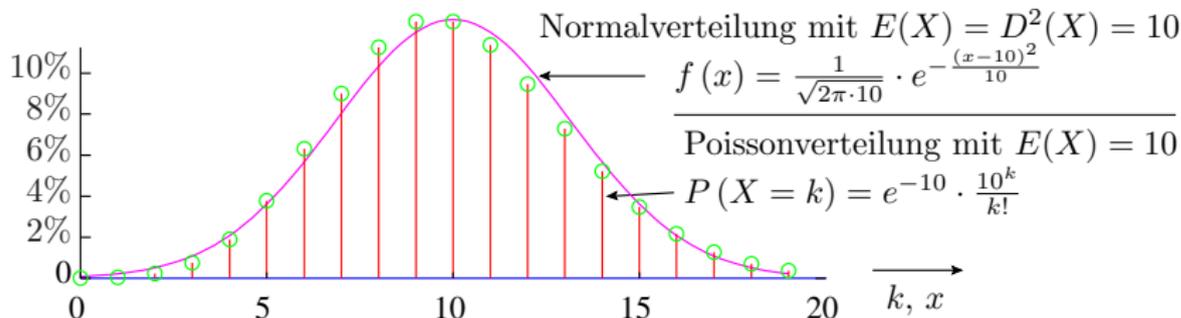
## Normalverteilung

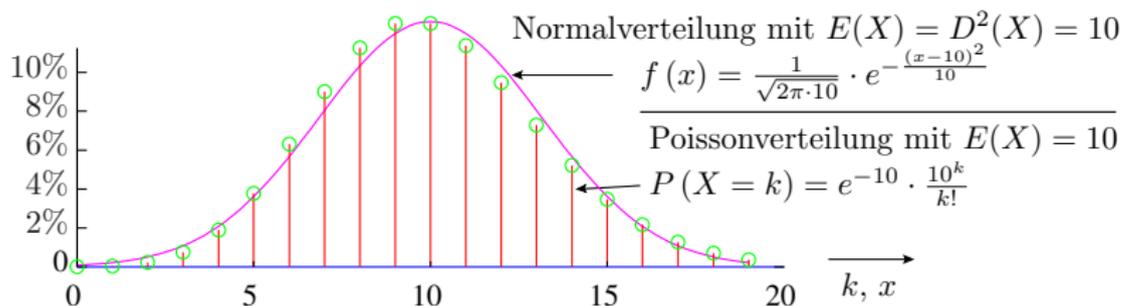
Die Summe sehr vieler unabhängiger Zufallsgrößen strebt unter sehr allgemeinen Bedingungen gegen eine Normalverteilung:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot D^2(X)}} \cdot e^{-\frac{(x-E(X))^2}{D^2(X)}}$$

- kein Summand hat dominanten Einfluss und
- Erwartungswert deutlich größer als Standardabweichung.

Schließt die behandelte Zählverteilung, Binomialverteilung und Poisson-Verteilung ein.





In der Praxis gilt die Annäherung einer Zähl- durch eine Normalverteilung in der Regel bereits unter der Bedingung

$$10 \cdot \kappa \leq E(X) \leq N - 10 \cdot \kappa$$

als ausreichend genau ( $\kappa$  – Varianzerhöhung;  $E(X) = N \cdot p$  – Erwartungswert der Zählwerte;  $N$  – Anzahl der Zählversuche;  $p$  – mittlere Eintrittswahrscheinlichkeit).

Die Annäherung einer Zählverteilung durch eine Normalverteilung eignet sich gut für Bereichsschätzungen.



## Standardisierte Normalverteilung

Die standardisierte Normalverteilung hat den Erwartungswert  $E(X) = 0$  und die Varianz  $D^2(X) = 1$ . Kumulative Verteilungsfunktion:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-z^2} \cdot dz$$

Tabelliert für  $z = 0$  bis 3,9 in Schritten von 0,1:

$z$	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

Wegen der Symmetrie gilt für  $z < 0$ :

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$



## Skalierung

Normalverteilte Zufallsgrößen mit abweichendem Erwartungswert und/oder abweichender Standardabweichung werden in Zufallsgrößen mit Erwartungswert null und Standardabweichung eins transformiert:

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D^2(X)}}$$

Dasselbe erfolgt für alle Werte  $x$  (inkl. Unter- und Obergrenzen):

$$z = \frac{x - E(X)}{\sqrt{D^2(X)}}$$

Umrechnung zwischen Eintrittswahrscheinlichkeiten und Wertebereichen mit der Tabelle der standardisierten Normalverteilung:

$z$	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000



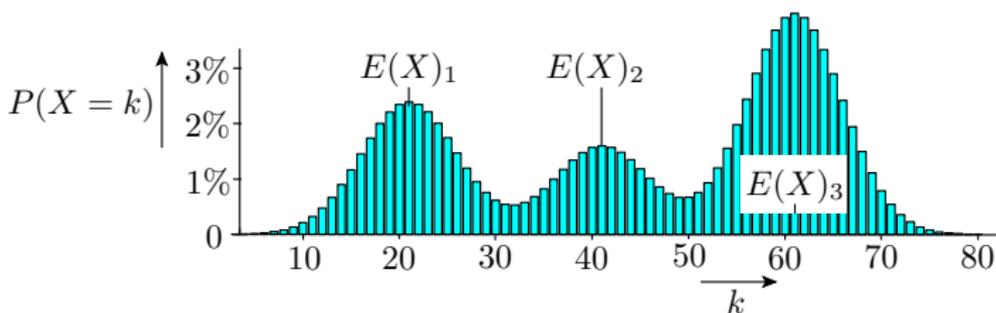
## Multimodale Verteilungen

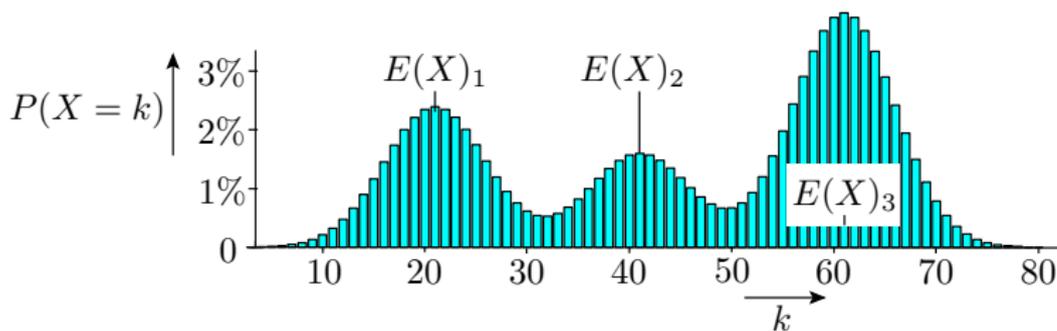
## Multimodale (mehrgipflige) Verteilung

Eine multimodale Verteilung ist eine Häufigkeitsverteilung mit mehreren Gipfeln. Sie entsteht z.B. durch Mischung unterschiedlich verteilter Grundgesamtheiten. Mischung von drei Normalverteilungen mit unterschiedlichem Erwartungswert

$$P(X = k) = f(k) = 0,3 \cdot f_1(k) + 0,2 \cdot f_2(k) + 0,5 \cdot f_3(k)$$

$f_i(k)$  – Normalverteilungen mit Erwartungswerten  $E(X)_i$  und Standardabweichung  $\sqrt{D^2(X)} = 5$ :





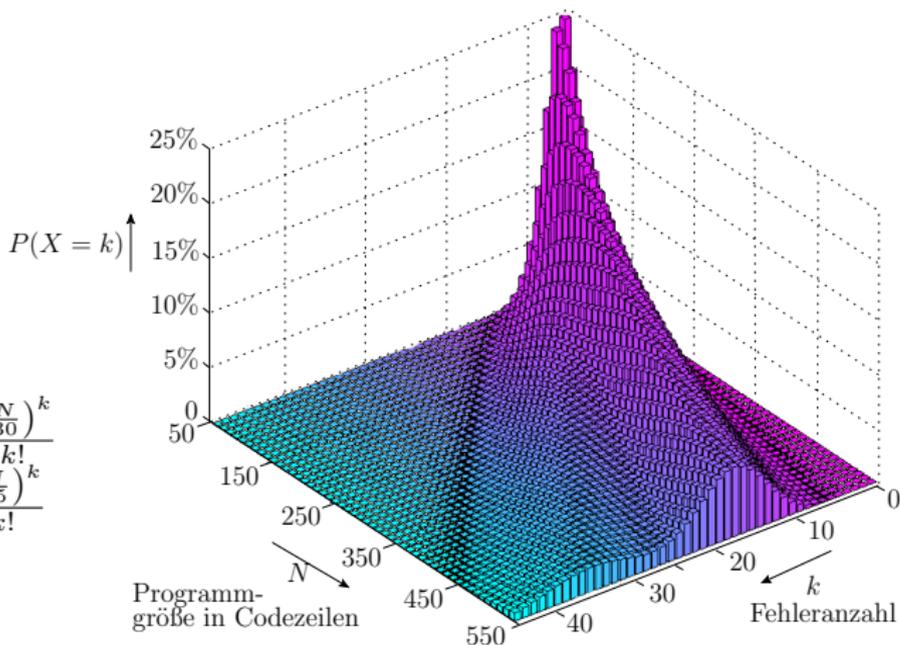
Die Multimodalität deutet auf Polarisierungen der Beobachtungswerte (Zugehörigkeit zu unterschiedlichen Verteilungen).

Polarisierungen können wichtige Informationen über die Natur der untersuchten Variablen liefern:

- Abhängigkeiten bei der Fehlerentstehung, bei Ausfällen beim Fehlernachweis und beim Versagen von Service-Leistungen,
- Vorliebe oder Neigung befragter Experten, z.B. bei der Einschätzung von Gefährdungen und Risiken und
- Probleme des Messverfahrens.

Beispiel sei ein Software-Team, in dem ein Anfänger und ein Profi gemeinsam Software-Bausteine aus  $N$  Code-Zeilen entwickeln, der Profi 66% der Bausteine mit ca. einem Fehler je 30 Codezeilen und der Anfänger 33% der Bausteine mit einem Fehler je 15 Codezeilen.

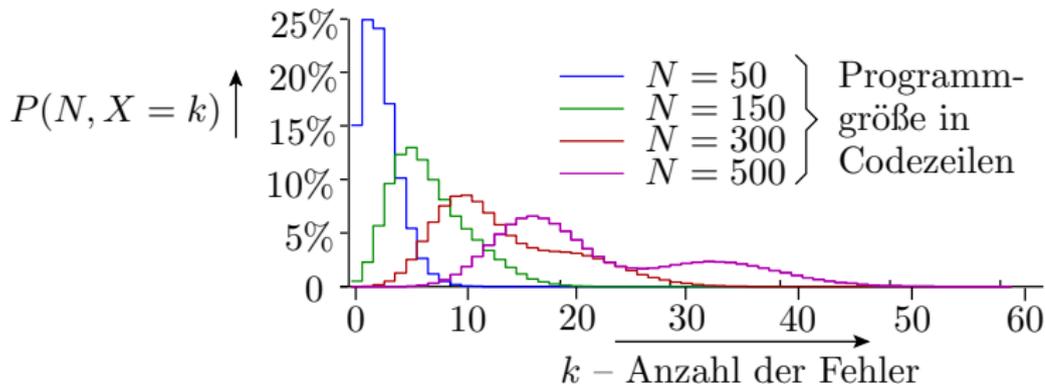
$$\begin{aligned}
 P(N, X = k) &= \frac{2}{3} \cdot e^{-\frac{N}{30}} \cdot \frac{\left(\frac{N}{30}\right)^k}{k!} \\
 &+ \frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{N}{15}} \cdot \frac{\left(\frac{N}{15}\right)^k}{k!}
 \end{aligned}$$





Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Modul genau  $k$  Fehler enthält, ist  $2/3$  mal der Wahrscheinlichkeit, dass es  $k$  Fehler enthält und vom Profi stammt plus  $1/3$  mal der Wahrscheinlichkeit, dass es vom Anfänger stammt:

$$P(N, X = k) = \frac{2}{3} \cdot e^{-\frac{N}{30}} \cdot \frac{\left(\frac{N}{30}\right)^k}{k!} + \frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{N}{15}} \cdot \frac{\left(\frac{N}{15}\right)^k}{k!} \quad (22)$$



Die Polarisierung nimmt mit der Größe der Software-Bausteine, die vom Profi und vom Anfänger getrennt entwickelt werden, zu.

## Beispielaufgabe



In einer Modellfehlermenge aus  $N = 25$  Fehlern mit einer Nachweiswahrscheinlichkeit  $p = 40\%$  seien zehn Fehler identisch und die übrigen Fehler unabhängig voneinander nachweisbar. Bestimmen Sie

- 1 den Erwartungswert und
- 2 die Varianz der Anzahl der nachweisbaren Fehler.
- 3 Die Varianzerhöhung  $\kappa$  gegenüber  $N = 25$  unabhängig voneinander nachweisbaren Modellfehlern ( $p = 40\%$  für alle Modellfehler ).
- 4 Eine Approximation der Verteilung als Mischverteilung aus zwei Binomialverteilungen.
- 5 Berechnung und Darstellung der Verteilung.



## Lösung Aufgabenteil 1

Die Anzahl der nachweisbaren Fehler ist modellierbar als Summe von

- $i = 1$  bis 15 unabhängigen Zufallsgrößen mit der Verteilung

$k$	0	1	$E(X)_i$	$D^2(X)_i$
$P(X_i = k)$	$1 - p$	$p$	$p$	$p \cdot (1 - p)$

- und einer dazu unabhängigen Zufallsgröße  $X_{16}$  mit der Verteilung (Varianz siehe Folie 77):

$k$	0	10	$E(X)_{16}$	$D^2(X)_{16}$
$P(X_{16} = k)$	$1 - p$	$p$	$10 \cdot p$	$10^2 \cdot p \cdot (1 - p)$

- 1 Erwartungswert als Summe der Erwartungswerte der Summanden:

$$E(X) = 15 \cdot p + 10 \cdot p = 25 \cdot 40\% = 10$$



## Lösung Aufgabenteil 2 und 3

$k$	0	1	$E(X)_i$	$D^2(X)_i$
$P(X_i = k)$	$1 - p$	$p$	$p$	$p \cdot (1 - p)$
$k$	0	5	$E(X)_{16}$	$D^2(X)_{16}$
$P(X_{16} = k)$	$1 - p$	$p$	$10 \cdot p$	$10^2 \cdot p \cdot (1 - p)$

- 2 Varianz als Summe der Varianzen der Summanden:

$$D^2(X) = 15 \cdot p \cdot (1 - p) + 100 \cdot p \cdot (1 - p) = 115$$

- 3 Gegenüber der Varianz der Summe von 25 unabhängigen Ereignissen mit Eintrittswahrscheinlichkeit  $p$

$$D^2(X)_{\text{unabh}} = 25 \cdot p \cdot (1 - p)$$

Varianzerhöhung:  $\kappa = 115/25 = 4,6$

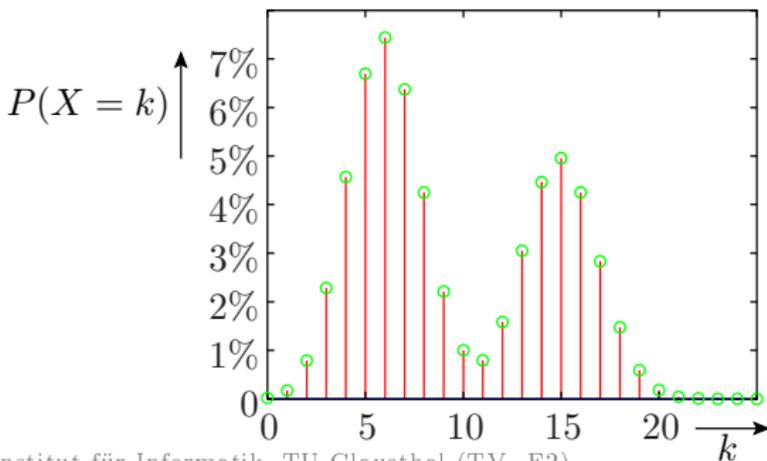
## Lösung Aufgabenteil 4

- 2 Die Gesamtverteilung lässt sich als Mischverteilung zweier binomialverteilter Grundgesamtheiten beschreiben:

$$P(X = k) = (1 - p) \cdot P_{1\dots 15}(X = k) + p \cdot P_{1\dots 15}(X + 10 = k)$$

mit

$$P_{1\dots 15}(X = k) = \binom{15}{k} \cdot 0,4^k \cdot 0,6^{15-k}$$





## Programm zur Berechnung der Verteilung

```
clear ; clf ;  
N=15; p=0.4;  
n_k(1)=1;           % Berechnen von N über k  
  n_k(k+1)=n_k(k)*(N-k+1)/k;  
end  
for k=0:15  
  P(k+1) = n_k(k+1) * p^k * (1-p)^(N-k);  
end  
PP(1:16)=(1-p)*P;  
PP(17:26)=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];  
PP(10:25) =PP(10:25) + p*P;  
stem(0:25, PP, 'r');
```



## Verteilung der Fehleranzahl



## Zählverteilung der Fehleranzahl

Von  $i = 1$  bis  $N_{PF}$  ist jeder potentielle Fehler  $i$  mit einer Wahrscheinlichkeit  $p_i$  vorhanden. Beschreibung durch Bernoulli-Versuche mit den Zufallsgrößen:

$$\varphi_i = \begin{cases} 0 & \text{Fehler nicht vorhanden: } P(\varphi_i = 0) = 1 - p_i \\ 1 & \text{Fehler vorhanden: } P(\varphi_i = 1) = p_i \end{cases}$$

Anzahl der vorhandenen Fehler:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N_{PF}} \varphi_i$$

Art der Fehler	$p_i$
entstandene Fehler	$p_i = p_{\text{Ents.}i}$
beseitigte Fehler	$p_i = p_{\text{Ents.}i} \cdot p_{\text{Erk.}i} \cdot p_{\text{Bes.}i}$
vorhandene Fehler	$p_i = p_{\text{Ents.}i} \cdot (1 - p_{\text{Erk.}i} \cdot p_{\text{Bes.}i})$
...	...



## Zufälliger Fehlernachweis

Ein Zufallstest mit  $n$  Testschritten hat nach Gl. 1 die Nachweiswahrscheinlichkeit

$$p_{\text{Erk}}(n) = 1 - e^{-n \cdot p_{\text{Erk}}}$$

( $n$  – Anzahl der Tests). Die zu erwartende Anzahl der nachweisbaren Fehler ist die Summe der Produkte aus den Wahrscheinlichkeiten »Fehler vorhanden« und »Fehler nachweisbar«:

$$E(\varphi_{\text{Erk}}(n)) = \sum_{i=1}^{N_{\text{PF}}} p_{\text{Ents.}i} \cdot (1 - e^{-n \cdot p_{\text{Erk.}i}})$$

Nicht nachweisbaren Fehler:

$$E(\varphi_{\text{NErk}}(n)) = \sum_{i=1}^{N_{\text{PF}}} p_{\text{Ents.}i} \cdot e^{-n \cdot p_{\text{Erk.}i}}$$

Nicht nachweisbare Modellfehler<sup>10</sup>:

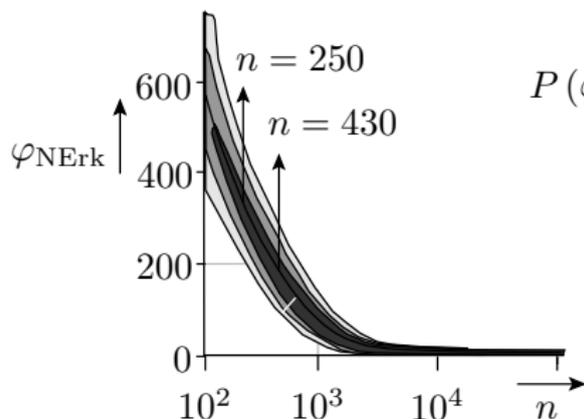
$$E(\varphi_{\text{NErk}}(n)) = \sum_{i=1}^{N_{\text{MF}}} e^{-n \cdot p_{\text{Erk.}i}} \quad (23)$$

<sup>10</sup>Modellfehler sind immer vorhanden ( $p_{\text{Ents.}i} = 1$ ).

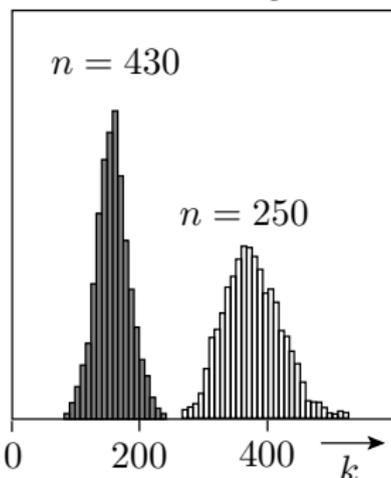
## Experiment mit Haftfehlern

Kombinatorische Beispielschaltung (Benchmark c3540). 3606 simulierte, unterschiedlich nachweisbare Haftfehler. Bestimmung der Verteilung mit 1000 verschiedenen Zufallstestsätzen.

Verteilung der Anzahl der nicht erkannten Modellfehler als Funktion von  $n$  (Benchmark c3540, 3606 Haftfehler)



Verteilung für zwei Testsatzlängen

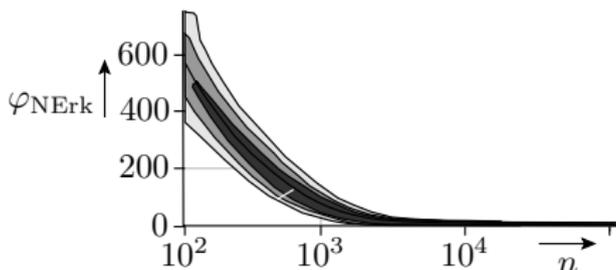


## Varianzerhöhung, effektive Modellfehleranzahl

Abhängigkeiten im Fehlernachweis führen zu einer Varianzerhöhung

$$\kappa \geq \frac{D^2(\varphi_{\text{NErk}})}{E(\varphi_{\text{NErk}}) \cdot \left(1 - \frac{E(\varphi_{\text{NErk}})}{N_{\text{PF}}}\right)}$$

Für den Versuch auf der Folie sind die Nachweisabhängigkeiten offenbar bei vielen nicht nachweisbaren Fehlern erheblich und bei wenigen nicht. (Identisch nachweisbare Fehler waren aus der Haftfehlermenge entfernt.)



$n$	$E_S(\varphi_{\text{NErk}})$	$\sqrt{D_S^2(\varphi_{\text{NErk}})}$	$D_S^2(\varphi_{\text{NErk}})$	$\kappa$	$N_{\text{PF,eff}}$
160	415	43,3	1875	5,1	706
320	234	30,7	943	4,3	837
800	90	17,3	299	3,4	1057
1600	29	7,2	52	1,8	2001
3200	11	2,9	8,4	1	3606



## Simulation mit Fehlerstichproben

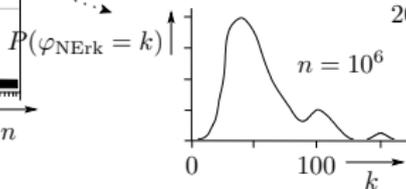
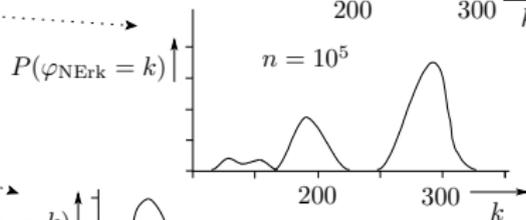
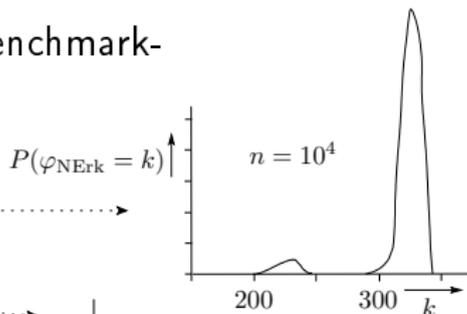
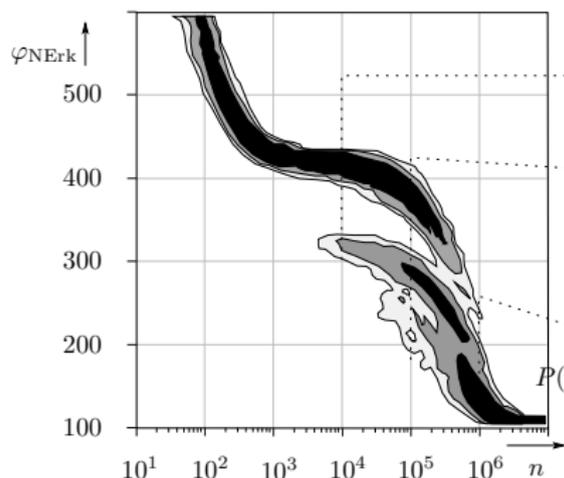
Im nachfolgenden Versuch wird eine zufällige Fehlerstichprobe von 1000 bzw. 300 der 3606 Haftfehler simuliert. Das naheliegende Ergebnis ist eine Verringerung der Abhängigkeiten im Fehlernachweis, erkennbar an einer effektiven Fehleranzahl, die näher an der tatsächlich simulierten Fehleranzahl liegt.

$n$	160	320	800	1600	3200
$N_{PF,eff}$ für $N_{PF} = 1000$	594	629	630	1000	1000
$N_{PF,eff}$ für $N_{PF} = 300$	297	268	277	231	300

Bei der Stichprobe von 1000 Fehlern ist die effektive Fehleranzahl im ungünstigste Fall fast halb so groß und bei 300 Modellfehler mindestens 77% der Anzahl der simulierten Fehler.

## Dasselbe Experiment mit einer anderen Schaltung

Dasselbe Experiment mit der kleineren Benchmark-Schaltung c2670:



Im Bereich von  $n = 10^4$  bis  $10^6$  multimodale Verteilung. Offenbar ca. 80 sehr ähnlich nachweisbare Fehler mit  $p_{\text{Erk}} \approx 10^5$ .



# Kennwerte schätzen



### Kennwerte schätzen

Zur Bewertung der Verlässlichkeit und der Maßnahmen zu ihrer Sicherung sind

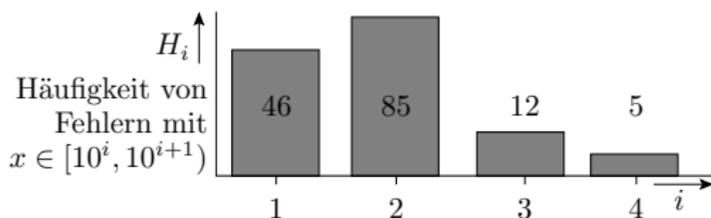
- zu erwartende Bereiche für Zählwerte (Fehler, FF, ...),
- Wahrscheinlichkeiten (Fehlerauftrittswahrscheinlichkeiten, Fehlernachweiswahrscheinlichkeiten, ...),
- Verteilungen, insbesondere FHSF-Funktionen,
- erforderliche Testsatzlängen,
- erzielbare Zuverlässigkeiten, Sicherheiten, ...

zu schätzen. Schätzergebnisse sind mit Unsicherheiten und Irrtumswahrscheinlichkeiten behaftet. Vertrauenswürdige und genaue Schätzungen verlangen eine große Anzahl von Versuchen, Zählwerten, ...

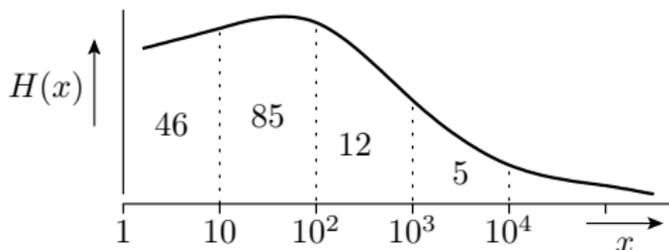


## FHSF-Funktion

## FHSF-Histogramm und FHSF-Funktion



Ein FHSF-Histogramm teilt die Anzahl  $x$  von SL je FF und Fehler in Intervalle, z.B. 1 bis 10, 10 bis 100, ... und zählt die Anzahl der Fehler je Intervall. Nutzbar zur Abschätzung von Parametern der FHSF-Funktion:





## Hypothese FHSF-Potenzfunktion

Für eine FHSF-Potenzfunktion

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < x_0 \\ c \cdot x^{-(k+1)} & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{mit } k > 0$$

und eine geometrische Reihe für die Intervallgrenzen

Intervall	1	2	...	$i$
$x \in$	$[x_0^1, x_0^2)$	$[x_0^2, x_0^3)$	...	$[x_0^i, x_0^{i+1})$

beträgt die zu erwartende Anzahl der Fehler je Intervall:

$$\begin{aligned} E(H_i) &= \int_{x_0^i}^{x_0^{i+1}} c \cdot x^{-(k+1)} \cdot dx = \frac{c}{k} \cdot \left( x_0^{-k \cdot i} - x_0^{-k \cdot (i+1)} \right) \\ &= \frac{c}{k} \cdot \left( 1 - x_0^{-k} \right) \cdot x_0^{-k \cdot i} \end{aligned}$$



Die Hypothese, dass eine FHSF-Funktion eine Potenzfunktion ist, lässt sich am Verhältnis benachbarter Histogrammwerte prüfen:

$$\frac{E(H_i)}{E(H_{i+1})} = \frac{\frac{c}{k} \cdot (1 - x_0^{-k}) \cdot x_0^{-k \cdot i}}{\frac{c}{k} \cdot (1 - x_0^{-k}) \cdot x_0^{-k \cdot (i+1)}} = x_0^k$$

Schätzwert für den Exponenten:

$$k \approx \frac{\ln\left(\frac{E(H_i)}{E(H_{i+1})}\right)}{\ln(x_0)}$$

Alternative: Berechnung der zu erwartenden Anzahl der nicht nachweisbaren Modellfehler nach Gl. 23

$$E(\varphi_{\text{NErk}}(n)) = \sum_{i=1}^{N_{\text{PF}}} e^{-n \cdot p_{\text{Erk}, i}}$$

und Suche nach geeigneten Parametern  $c$ ,  $n_0$  und  $k$  für Gl. 4:

$$E(\varphi(n)) = E(\varphi(n_0)) \cdot \left(\frac{n_0}{n}\right)^k$$

## Beispielaufgabe



- 1 Erstellen Sie ein FHSF-Histogramm mit  $x_0 = 10$  für ein Fehlermenge mit folgenden  $x_i$ :  
 $x = [1E1 \ 2E1 \ 3E1 \ 3E1 \ 5E1 \ 6E1 \ 7E1 \ 7E1 \ 9E1 \ 1E2 \ 2E2 \ \dots$   
 $\quad 3E2 \ 5E2 \ 8E2 \ 1E3 \ 4E3 \ 7E3 \ 4E4 \ 8E4 \ 3E5 \ 7E6]$ ;
- 1 Lässt sich die Fehlermenge mit einer FHSF-Potenzfunktion annähern? Wenn ja, mit welchem Exponenten  $k$ ?
- 2 Bestimmen Sie  $E(\varphi_{\text{Nerk}}(n))$  nach Gl. 23 mit  $p_i = x_i^{-1}$  und  $n \in (30, 100, 300, 1000, \dots, 300.000)$ .
- 3 Suchen Sie für Gl. 4

$$E(\varphi(n)) = E(\varphi(100)) \cdot \left(\frac{100}{n}\right)^k$$

mit  $n_0 = 100$  und  $E(\varphi(100))$  aus dem Aufgabenteil zuvor ein geeignetes  $k$  durch Probieren.



## Lösung Teil 1 und 2

Mittlere Anzahl der SL je FF und Fehler:

$x = [1E1 \ 2E1 \ 3E1 \ 3E1 \ 5E1 \ 6E1 \ 7E1 \ 7E1 \ 9E1 \ 1E2 \ 2E2 \ \dots$   
 $3E2 \ 5E2 \ 8E2 \ 1E3 \ 4E3 \ 7E3 \ 4E4 \ 8E4 \ 3E5 \ 7E6];$

$i$	1	2	3	4	5	6
$x \in$	$[10^1, 10^2)$	$[10^2, 10^3)$	$[10^3, 10^4)$	$[10^4, 10^5)$	$[10^5, 10^6)$	$[10^6, 10^7)$
$H_i$	9	5	3	2	1	1
$H_i/H_{i+1}$	1,8	1,7	1,5	2	1	
$k$	0,26	0,23	0,18	0,30	0	

Aus dem Histogramm lässt sich ableiten, dass das Testobjekt in grober Näherung eine FHSF-Potenzfunktion mit  $k = 0,2 \dots 0,3$  hat.



## Lösung Teil 3 und 4

Berechnung von  $E(\varphi_{\text{Nerk}}(n))$  mit folgenden Ausdrücken<sup>11</sup>:

A	B	C
$\sum_{i=1}^{N_{\text{PF}}} e^{-\frac{n}{x_i}}$	$11,5 \cdot \left(\frac{100}{n}\right)^{0,2}$	$11,5 \cdot \left(\frac{100}{n}\right)^{0,25}$

für  $n \in (30, 100, 300, 1000, \dots, 300.000)$ :

$n$	30	100	$3 \cdot 10^2$	$10^3$	$3 \cdot 10^3$	$10^4$	$3 \cdot 10^4$	$10^5$	$3 \cdot 10^5$
A	15,6	11,5	8,56	6,44	5,08	3,95	3,07	2,07	1,35
B	14,6	11,5	9,20	7,23	5,80	4,56	3,66	2,88	2,31
C	15,5	11,5	8,71	6,44	4,90	3,62	2,75	2,04	1,55

- Exponent  $k = 0,2$  ist zu klein
- Mit  $k = 0,25$  ergibt sich eine brauchbare Näherung.

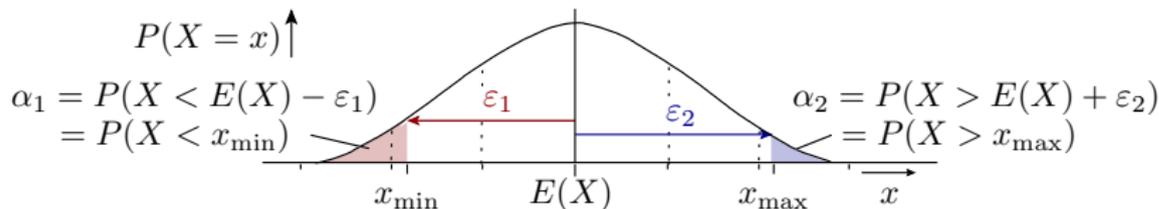
<sup>11</sup>Octave-Programm zu Berechnung siehe Web-Seite Afg\_EPhi\_FHSF.m.



## Bereichsschätzung

## Bereichsschätzung

Bestimmung wahrscheinlicher Realisierungsbereiche unter Vorgabe einer kleinen zulässigen Irrtumswahrscheinlichkeit:



$\alpha_1$  Irrtumswahrscheinlichkeit, dass Werte unterhalb des geschätzten Bereichs liegen.

$\alpha_2$  Irrtumswahrscheinlichkeit, dass Werte oberhalb des geschätzten Bereichs liegen.

$\varepsilon_{1/2}$  Intervallradius, Abstand der unteren / oberen Bereichsgrenze vom Erwartungswert.

Bei  $\alpha_1 = 0$  /  $\alpha_2 = 0$  wird nur eine Ober- / Untergrenze geschätzt.



Bei den im weiteren behandelten Abschätzungen wird in der Regel von einer Zählverteilung ausgegangen mit der Varianz

$$D^2(X) = \kappa \cdot E(X) \cdot \left(1 - \frac{E(X)}{N}\right)$$

( $\kappa$  – Abhängigkeitskoeffizient;  $N$  – Anzahl der Zählversuche) bzw. für  $E(X) \ll N$  und  $\kappa = 1$ :

$$D^2(X) = E(X) \quad E(X) \ll N; \kappa = 1$$

Annäherung der Zählverteilung für die Schätzaufgaben:

- Normalverteilung:  $10 \leq \frac{E(X)}{\kappa} \leq N - 10$
- Poissonverteilung:  $E(X) < 10 \ll N$

Bei geringer Streuung ist auch dann noch eine Bereichsschätzung möglich, wenn die Verteilung nicht bekannt, multimodal, ... ist, und zwar unter Nutzung der Tschebyscheffschen Ungleichung (siehe später).



## Bereichsschätzung für normalverteilte Zufallsgrößen

Bereichsschätzungen für normalverteilte Zufallsgrößen werden auf die für die standardisierte Normalverteilung

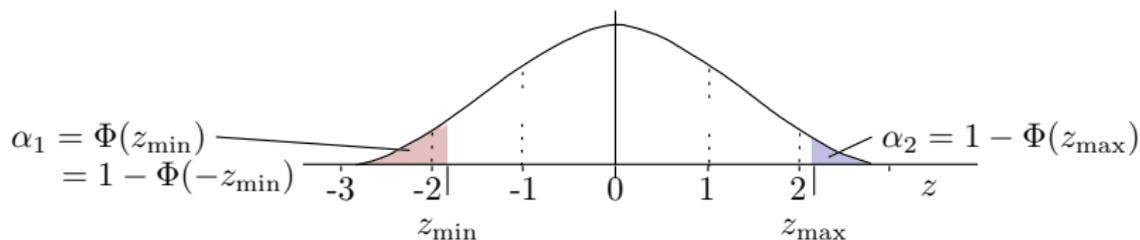
$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2} \cdot dx$$

zurückgeführt. Dazu werden die Zufallsgrößen mit abweichendem Erwartungswert und/oder abweichender Standardabweichung in eine Zufallsgröße mit Erwartungswert null und Standardabweichung eins transformiert:

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D^2(X)}}$$

Dasselbe erfolgt für alle Werte  $x$  (inkl. Unter- und Obergrenzen):

$$z = \frac{x - E(X)}{\sqrt{D^2(X)}}$$



Die nachfolgende Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitszuordnung der standardisierten Normalverteilung

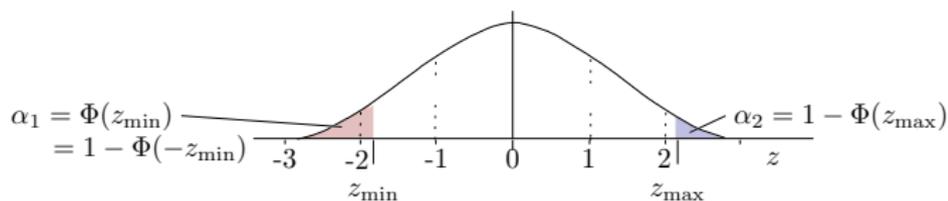
$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2} \cdot dx$$

für  $z = 0$  bis 3,9 in Schritten von 0,1:

$z$	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000



## Ablezen von Irrtums- und Bereichswahrscheinl.



- Untergrenze:  $x_{\min} = E(X) - 1,8 \cdot \sqrt{D^2(X)} \Rightarrow z_{\min} = -1,8$
- Obergrenze:  $x_{\max} = E(X) + 2,2 \cdot \sqrt{D^2(X)} \Rightarrow z_{\max} = 2,2$

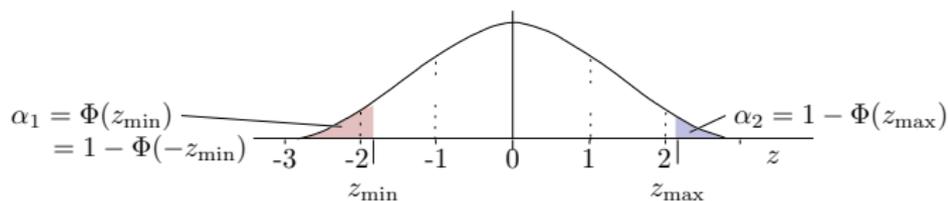
$z$	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

$$\alpha_1 = 1 - \Phi^{-1}(1,8) = 3,59\%$$

$$\alpha_2 = 1 - \Phi^{-1}(2,2) = 1,39\%$$

$$1 - \alpha_1 - \alpha_2 = 91,02\%$$

## Einseitige Bereichsschätzung



Für ein  $\alpha_1$  wird das  $z_{\min}$  oder für ein  $\alpha_2$  das  $z_{\max}$  gesucht.

$z$	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

Umstellung der tabellierten Funktion nach

$$z_{\min} = -\Phi^{-1}(1 - \alpha_1)$$

$$z_{\max} = \Phi^{-1}(1 - \alpha_2)$$



$z$	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

Umstellung nach  $\Phi^{-1}(1 - \alpha)$ :

$\alpha$	2,27%	0,13%	0	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
$\Phi^{-1}(1 - \alpha)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

Berechnung unterer und oberer Bereichsgrenzen:

$$z_{\min} = -\Phi^{-1}(1 - \alpha_1)$$

$$x_{\min} = E(X) - \sqrt{D^2(X)} \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha_1)$$

$$z_{\max} = \Phi^{-1}(1 - \alpha_2)$$

$$x_{\max} = E(X) + \sqrt{D^2(X)} \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha_2)$$

Symmetrische Bereichsschätzung ( $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$ )

$$P(-z_{\min} \leq Z \leq z_{\max}) = \Phi(z) - \Phi(-z) = 2 \cdot \Phi(z) - 1 \geq 1 - \alpha$$

$$-z_{\min} = z_{\max} = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$\alpha$	4,54%	0,26%	0	4%	2%	1%	0,4%	0,2%
$\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

Bereich für  $E(X) \neq 0$  und/oder  $D^2(X) \neq 1$ :

$$x_{\min/\max} = E(X) \mp \sqrt{D^2(X)} \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Zum Vergleich:

$\alpha$	2,27%	0,13%	0	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
$\Phi^{-1}(1 - \alpha)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

## Beispielaufgaben



Eine Zufallsgröße  $X$  hat den Erwartungswert  $E(X) = 20$  und die Standardabweichung  $\sqrt{D^2(X)} = 5$ .

- 1 Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist  $X \geq 30$ ?
- 2 Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist  $X \leq 15$ ?
- 3 Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt  $X$  im Bereich  $17,5 \pm 7,5$ ?
- 4 Welche Schranke  $x_{\max}$  überschreitet  $X$  nur mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha_2 \leq 1\%$ ?
- 5 Welche Schranke  $x_{\min}$  unterschreitet  $X$  nur mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha_1 \leq 2\%$ ?
- 6 In welchem (symmetrischen) Bereich liegt der Wert von  $x$  mit 99%-iger Sicherheit?



## Lösung Aufgabenteil 1

1 ... Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist  $X \geq 30$ ?

$z$	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

---

Gegeben:  $E(X) = 20$ ,  $\sqrt{D^2(X)} = 5$ ,  $x_{\min} = 30$ . Gesucht  $P(X \geq x_{\min})$ .

$$\begin{aligned}P(X \geq x_{\min}) &= 1 - \Phi\left(\frac{x_{\min} - E(X)}{\sqrt{D^2(X)}}\right) = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{30 - 20}{5}\right) = 1 - \Phi(2) = 0,0228\end{aligned}$$



## Lösung Aufgabenteil 2 und 3

$z$	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

- 2 Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist  $X \leq 15$ ? ( $E(X) = 20$ ,  $\sqrt{D^2(X)} = 5$ )

$$P(X < 15) = \Phi\left(\frac{15 - 20}{5}\right) = 1 - \Phi(1) = 0,1587$$

- 3 Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt  $X$  im Bereich  $17,5 \pm 7,5$ ? ( $E(X) = 20$ ,  $\sqrt{D^2(X)} = 5$ )

$$\begin{aligned} P(10 < X < 25) &= \Phi\left(\frac{25 - 20}{5}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 20}{5}\right) \\ &= \Phi(1) - (1 - \Phi(2)) = 0,8185 \end{aligned}$$



## Lösung Aufgabenteil 4 und 5

$\alpha$	2,28%	0,13%	0	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
$\Phi^{-1}(1 - \alpha)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

- 4 Obergrenze  $x_{\max}$  für Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha_2 = 1\%$ ,  
 $E(X) = 20$  und  $\sqrt{D^2(X)} = 5$ :

$$\begin{aligned}x_{\max} &= E(X) + \sqrt{D^2(X)} \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha_2) \\ &= 20 + 5 \cdot \Phi^{-1}(1 - 1\%) = 31,65\end{aligned}$$

- 
- 5 Untergrenze  $x_{\min}$  für Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha_1 = 2\%$ ,  
 $E(X) = 20$  und  $\sqrt{D^2(X)} = 5$ :

$$\begin{aligned}x_{\min} &= E(X) - \sqrt{D^2(X)} \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha_1) \\ &= 20 - 5 \cdot \Phi^{-1}(1 - 2\%) = 9,75\end{aligned}$$



## Lösung Aufgabenteil 6

4 Symmetrischer Bereich mit 99%-iger Sicherheit:

$$x_{\min}, x_{\max} = E(X) \mp \sqrt{D^2(X)} \cdot \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{1\%}{2} \right)$$

$\alpha$	4,54%	0,26%	0	4%	2%	1%	0,4%	0,2%
$\Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

$$x_{\min}, x_{\max} = 20 \mp 5 \cdot 2,57$$

$$x_{\min} = 7,15$$

$$x_{\max} = 32,85$$

## Bereichsschätzungen für Zählergebnisse

Die Varianz einer Zählverteilung ist überschlagsweise die einer Binomialverteilung mit demselben Erwartungswert erhöht um den Abhängigkeitskoeffizienten  $\kappa$ :

$$D^2(X) \approx \kappa \cdot E(X) \cdot \left(1 - \frac{E(X)}{N}\right)$$

$$x_{\min} = E(X) - \sqrt{\kappa \cdot E(X) \cdot \left(1 - \frac{E(X)}{N}\right)} \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha_1)$$

$$x_{\max} = E(X) + \sqrt{\kappa \cdot E(X) \cdot \left(1 - \frac{E(X)}{N}\right)} \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha_2)$$

Für eine symmetrische Bereichsschätzung ( $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$ ):

$$x_{\min / \max} = E(X) \mp \sqrt{\kappa \cdot E(X) \cdot \left(1 - \frac{E(X)}{N}\right)} \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

## Beispielaufgabe



Die zu erwartende Anzahl der Fehlfunktionen bei der Abarbeitung von  $N_{\text{SL}} = 20.000$  SL sei  $E(N_{\text{FF}}) = 100$  FF. In welchem symmetrischen Bereich um den Erwartungswert liegt  $N_{\text{FF}}$  mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 1\%$ , wenn die Fehlfunktionen voneinander unabhängig auftreten ( $\kappa = 1$ )?



## Lösung

$N_{SL} = 20.000 \text{ SK}$ ,  $E(N_{FF}) = 100 \text{ FF}$ , Irrtumswahrscheinlichkeit  
 $\alpha = 1\%$ ,  $\kappa = 1$ :

$\alpha$	4,54%	0,26%	0	4%	2%	1%	0,4%	0,2%
$\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

$$\begin{aligned}
 N_{FF, \min / \max} &= E(N_{FF}) \mp \sqrt{\kappa \cdot E(N_{FF}) \cdot \left(1 - \frac{E(N_{FF})}{N}\right) \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} \\
 &= 100 \mp \sqrt{1 \cdot 100 \cdot \left(1 - \frac{100}{20000}\right) \cdot 2,57} \\
 &= 100 \mp 25,6
 \end{aligned}$$



## Kleine Zählwerte



## Kleine Zählwerte

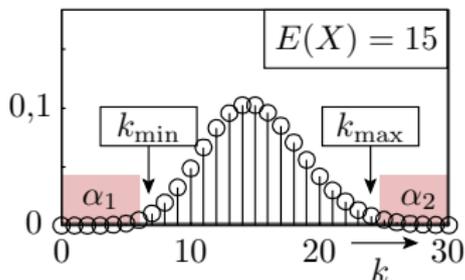
Für weniger als  $10 \ll N$  eingetretene / nicht eingetretene Zählereignisse ist deren Anzahl näherungsweise poissonverteilt. Die Abschätzung einer Unter-, einer Obergrenze oder eines Bereichs basiert auf der kumulativen Poisson-Verteilung:

$$\text{poiscdf}(E(X), k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k e^{-E(X)} \cdot \frac{E(X)^i}{i!}$$

Berechnung mit Matlab/Octave:

```
function [P] = poiscdf(E, k)
w=1; s=1;
for i=1:k
    w = w*E/i; s = s + w;
end
P =e^(-E)*s;
```

## Obere und untere Bereichsgrenze



- Untere Bereichsgrenze:

$$\text{poiscdf}(E(X), k_{\min} - 1) \leq \alpha_1$$

- Obere Bereichsgrenze:

$$1 - \text{poiscdf}(E(X), k_{\max}) < \alpha_2$$

- symmetrischer Bereich:

$$\left( \text{poiscdf}(E(X), k_{\min} - 1) \leq \frac{\alpha}{2} \right) \\ \wedge \left( 1 - \text{poiscdf}(E(X), k_{\max}) < \frac{\alpha}{2} \right)$$

Eine garantierbare Untergrenze  $k_{\min} \geq 1$  verlangt  $E(X) \geq -\ln(\alpha)$ ,  
z.B. für  $\alpha = 1\%$   $E(X) > 4,6$ .

Numerische Suche des größten  $k_{\min}$ 

$$\text{poiscdf}(E(X), k_{\min} - 1) \leq \alpha_1$$

```
function [k_min] = pois_k_min(alpha1, E)
    assert (poiscdf(E, 0) <= alpha)
    k_min = 1
    while (poiscdf(E, k_min-1) <= alpha)
        k_min = k_min + 1;
    end
    k_min = k_min - 1;
```

Suchablauf für  $\alpha_1 = 1\%$  und  $E(X) = 9$  (`pois_k_min(0.01, 9)`):

```
k_min= 0 alpha1=0.0123%
```

```
k_min= 1 alpha1=0.1234%
```

```
k_min= 2 alpha1=0.6232%
```

```
k_min= 3 alpha1=2.1226% (poiscdf(9, 2) ≤ 1%)
```

Garantierbare Untergrenze:  $k_{\min} = 3$ . Nur ein Drittel von  $E(X) = 9$ .



## Numerische Suche kleinsten $k_{\max}$

$$1 - \text{poiscdf}(E(X), k_{\max}) \leq \alpha_2$$

```
function [k_max] = pois_k_max(alpha , E)
k_max = 0;
while (poiscdf(E, k_max) <= 1-alpha)
    k_max = k_max + 1;
end
```

Suchablauf für  $\alpha_1 = 1\%$  und  $E(X) = 9$  (`pois_k_max(0.01, 9)`):

```
k_max= 0 alpha2=99.9877%
k_max= 1 alpha2=99.8766%
...
k_max=16 alpha2=1.1106%
k_max=17 alpha2=0.5320% (1 - poiscdf(9, 17) ≤ 1%)
```

Die garantierbare Obergrenze ist  $k_{\max} = 17$  und fast doppelt so groß wie der Erwartungswert  $E(X) = 9$ .

## Beispielaufgabe



- 1 Die mittlere Eintrittswahrscheinlichkeit einer Fehlfunktion sei  $p = 10^{-5}$  je Service-Anforderung. Bis zu wie vielen Service-Anforderungen  $N$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine Fehlfunktion eintritt, mindestens 99%?
- 2 Wie wahrscheinlich ist es, dass eine poisson-verteilte Zufallsgröße mit dem Erwartungswert  $E(X) = 0,6$  keinen Wert größer 3 hat?



## Lösung Aufgabenteil 1

Die mittlere Eintrittswahrscheinlichkeit einer Fehlfunktion sei  $p = 10^{-5}$  je Service-Anforderung. Bis zu wie vielen Service-Anforderungen  $N$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine Fehlfunktion eintritt, mindestens 99%?

---

Für  $p = 10^{-5}$  soll  $P(X = 0) \geq 99\%$  sein:

$$P(X = 0) = e^{-p \cdot N} \geq 99\%$$

$$N \leq \frac{1}{p} \cdot (-\ln(99\%)) \approx 10^3$$



## Lösung Aufgabenteil 2

Wie wahrscheinlich ist es, dass eine poisson-verteilte Zufallsgröße mit dem Erwartungswert  $E(\varphi) = 0,6$  keinen Wert größer 3 hat?

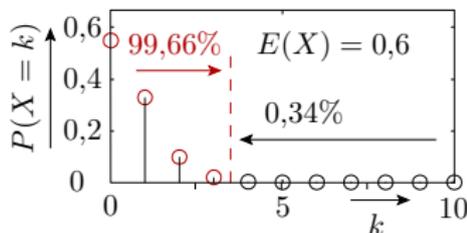
Gegeben:  $E(\varphi) = 0,6$ ,  $k_{\max} = 3$ . Gesucht:

$$P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^3 e^{-0,6} \cdot \frac{0,6^k}{k!}$$

Programmtechnische Lösung:

```
printf('P(k<=3)=%4.2f%%\n', 100*poiscdf(0.6, 3));  
>> P(k<=3)=99.66%
```

Ergebnis  
graphisch:





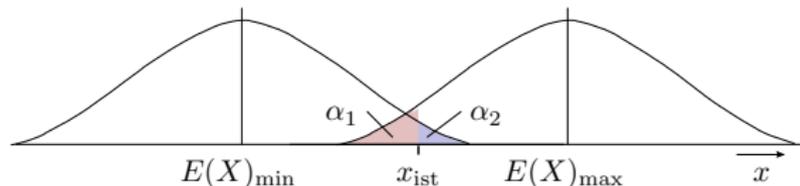
$E(X)$  und Eintrittsw.



## Bereichsschätzung für den Erwartungswert

Der Erwartungswert zu einem beobachteten Ereignis ist

- mindestens so groß, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein größeres als das beobachtete Ergebnis eintritt, kleiner  $\alpha_2$ , und
- maximal so groß, dass ein kleineres als das beobachtete Ergebnis eintritt, kleiner  $\alpha_1$ , ist.



Für normalverteilte Zufallsgrößen:

$$E(X)_{\min} = x_{\text{ist}} - \sqrt{D^2(X)} \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha_2)$$

$$E(X)_{\max} = x_{\text{ist}} + \sqrt{D^2(X)} \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha_1)$$



## Normalverteilte Zählwerte

Für Zählwerte liefert ein beobachteter Wert eine Abschätzung für die Varianz:

$$D^2(X) \approx \kappa \cdot x_{\text{ist}} \cdot \left(1 - \frac{x_{\text{ist}}}{N}\right)$$

( $N$  – Anzahl der Zählversuche;  $\kappa$  – Abhängigkeitskoeffizient).

$$E(X)_{\min} \approx x_{\text{ist}} - \sqrt{\kappa \cdot x_{\text{ist}} \cdot \left(1 - \frac{x_{\text{ist}}}{N}\right)} \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha_2)$$

$$E(X)_{\max} = x_{\text{ist}} + \sqrt{\kappa \cdot x_{\text{ist}} \cdot \left(1 - \frac{x_{\text{ist}}}{N}\right)} \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha_1)$$

Für eine symmetrische Bereichsschätzung ( $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$ ):

$$E(X)_{\min / \max} = x_{\text{ist}} \mp \sqrt{\kappa \cdot x_{\text{ist}} \cdot \left(1 - \frac{x_{\text{ist}}}{N}\right)} \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$



## Beispielaufgabe



- 1 In welchen Bereich liegt der Erwartungswert für ein Zählergebnis  $x_{\text{ist}} = 20$  bei  $N = 100$  Zählversuchen?
- 2 Bei der Abarbeitung von  $N_{\text{SL}} = 20.000$  SL wurden  $N_{\text{FF}} = 100$  FF beobachtet. In welchem symmetrischen Bereich liegt der Erwartungswert  $E(N_{\text{FF}})$  mit Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha = 1\%$ , wenn die Fehlfunktionen voneinander unabhängig auftreten ( $\kappa = 1$ )?



## Lösung Aufgabenteil 1

In welchem Bereich liegt der Erwartungswert für ein Zählergebnis  $x_{\text{ist}} = 20$  bei  $N = 100$  Zählversuchen?

$\alpha$	4,54%	0,26%	0	4%	2%	1%	0,4%	0,2%
$\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

$$\begin{aligned} E(X)_{\min / \max} &= x_{\text{ist}} \mp \sqrt{\kappa \cdot x_{\text{ist}} \cdot \left(1 - \frac{x_{\text{ist}}}{N}\right)} \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 20 \mp 2,57 \cdot \sqrt{20 \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right)} = [9,72, 30,28] \end{aligned}$$



## Lösung Aufgabenteil 2

Bei der Abarbeitung von  $N_{SL} = 20.000$  SL wurden  $N_{FF} = 100$  FF beobachtet. In welchem symmetrischen Bereich liegt der Erwartungswert  $E(N_{FF})$  mit Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha = 1\%$ , wenn die Fehlfunktionen voneinander unabhängig auftreten ( $\kappa = 1$ )?

$\alpha$	4,54%	0,26%	0	4%	2%	1%	0,4%	0,2%
$\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

Erwartungswert für  $x_{ist} = 100$  FF,  $N = 20.000$  SL,  $\alpha = 1\%$ ,  $\kappa = 1$ :

$$\begin{aligned}
 E(N_{FF})_{\min / \max} &= x_{ist} \mp \sqrt{\kappa \cdot x_{ist} \cdot \left(1 - \frac{x_{ist}}{N}\right) \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} \\
 &= 100 \mp \sqrt{1 \cdot 100 \cdot \left(1 - \frac{100}{20000}\right) \cdot 2,57} \\
 &= 100 \mp 25,6
 \end{aligned}$$



## Schätzen von Eintrittswahrscheinlichkeiten

Die Eintrittswahrscheinlichkeit eines Zählwertes ist der Quotient aus der Anzahl der Zählwerte und der Versuchsanzahl  $N$ . Für ein experimentell bestimmten Zählwert  $x_{\text{ist}}$  betragen

- der Schätzwert

$$p_S = \frac{x_{\text{ist}}}{N}$$

- die Untergrenze

$$p_{\min} = \frac{E(X)_{\min}}{N}$$

- und die Obergrenze

$$p_{\max} = \frac{E(X)_{\max}}{N}$$

Je größer die Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  und die Anzahl  $N$  der Zählversuche desto kleiner ist der angebbare Bereich  $[p_{\min}, p_{\max}]$  für die Wahrscheinlichkeit.



## Mindestwert für das Zählergebnis

Für eine normalverteilte Zählgröße gilt bei  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$ :

$$E(X)_{\min/\max} = x_{\text{ist}} \mp \sqrt{\kappa \cdot x_{\text{ist}} \cdot \left(1 - \frac{x_{\text{ist}}}{N}\right)} \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Relativer Intervallradius:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{rel}} &= \frac{E(X)_{\max} - x_{\text{ist}}}{x_{\text{ist}}} = \frac{x_{\text{ist}} - E(X)_{\min}}{x_{\text{ist}}} \\ &= \sqrt{\frac{\kappa}{x_{\text{ist}}} \cdot \left(1 - \frac{x_{\text{ist}}}{N}\right)} \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\end{aligned}$$

Das Mindestzählergebnis, damit der relative Intervallradius unter Vorgabe einer Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  nicht größer als  $\varepsilon_{\text{rel}}$  ist beträgt:

$$x_{\text{ist.min}} = \frac{1}{\frac{1}{N} + \frac{\varepsilon_{\text{rel}}^2}{\kappa \cdot (\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}))^2}}$$



Für  $N \gg x_{\text{ist}}$  vereinfacht sich die Abschätzung der Mindestanzahl der Zählversuche zu:

$$x_{\text{ist.min}} = \frac{1}{\frac{1}{N} + \frac{\varepsilon_{\text{rel}}^2}{\kappa \cdot (\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}))^2}} \approx \frac{\kappa \cdot (\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}))^2}{\varepsilon_{\text{rel}}^2} \quad (24)$$



## Mindestanzahl der Zählversuche

Zur Schätzung der Eintrittswahrscheinlichkeit  $p_S = \frac{x_{\text{ist}}}{N}$  mit einem relativen Intervallradius

$$p \in p_S \cdot (1 \mp \varepsilon_{\text{rel}})$$

und einer Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  muss die Versuchsanzahl  $N$  solange erhöht werden, bis der Zählwert

$$x_{\text{ist.min}} = \frac{1}{\frac{1}{N} + \frac{\varepsilon_{\text{rel}}^2}{\kappa \cdot (\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}))^2}} \approx \frac{\kappa \cdot (\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}))^2}{\varepsilon_{\text{rel}}^2}$$

erreicht ist.



## Beispielaufgaben



Wie groß ist die zu erwartende Anzahl  $N$  der Zählversuche, um zu zeigen, dass die Eintrittswahrscheinlichkeit  $p = 1\% \cdot (1 \mp 10\%)$  beträgt? Abhängigkeiten zwischen den Zählergebnissen seien zu vernachlässigen ( $\kappa = 1$ ). Die zulässige Irrtumswahrscheinlichkeit sei  $\alpha = 1\%$ .



$$\kappa = 1, \alpha = 1\%, p = 1\% \cdot (1 \mp 10\%)$$

---

Zu erreichendes Zählergebnis:

$$x_{\text{ist.min}} = \frac{\kappa \cdot \left( \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right)^2}{\varepsilon_{\text{rel}}^2} =$$

Dafür zu erwartende Anzahl der Zählversuche:

$$N \approx \frac{x_{\text{ist.min}}}{p} =$$



## Zur Kontrolle

$$\kappa = 1, \alpha = 1\%, p = 1\% \cdot (1 \mp 10\%)$$

---

Zu erreichendes Zählergebnis:

$$x_{\text{ist.min}} = \frac{\kappa \cdot \left(\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right)^2}{\varepsilon_{\text{rel}}^2} = 661$$

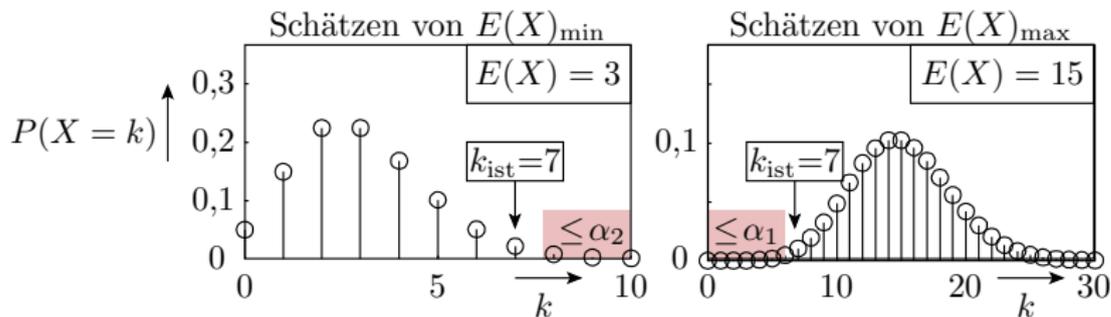
Dafür zu erwartende Anzahl der Zählversuche:

$$N \approx \frac{x_{\text{ist.min}}}{p} = 66100$$



Wahrsch. seltener Ereign.

## Bereich des Erwartungswerts für seltene Ereignisse



Untere Bereichsgrenze:

$$\text{poiscdf}(E(X)_{\min}, k_{\text{ist}}) \geq 1 - \alpha_2$$

Obere Bereichsgrenze (Voraussetzung  $k_{\text{ist}} > 0$ ):

$$\text{poiscdf}(E(X)_{\max}, k_{\text{ist}} - 1) \leq \alpha_1$$



## Numerische Berechnung der Untergrenze

```

function [E_min] = pois_EUG(alpha , k_ist)
    EE_min = k_ist+1; dE=E_min;
    while (1)
        a = 1-poiscdf(E_min, k_ist);
        if (a > alpha)           E_min = E_min - dE;
        elseif (a < 0.99* alpha) E_min = E_min + dE;
        else                     return
        end
    end

```

Für  $k_{\text{ist}} = 7$ ,  $\alpha_2 = 1\%$

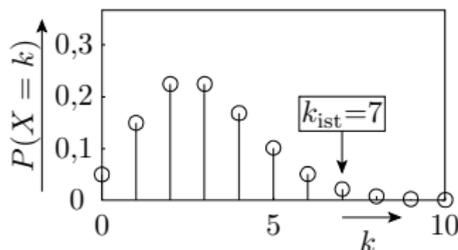
$$1-\text{poiscdf}(8.000, 7)=54.704\%,$$

$$1-\text{poiscdf}(4.000, 7)=5.113\%,$$

$$1-\text{poiscdf}(2.000, 7)=0.110\%,$$

$$1-\text{poiscdf}(3.000, 7)=1.190\%, \dots$$

$$E(X)_{\min} = 2,91$$



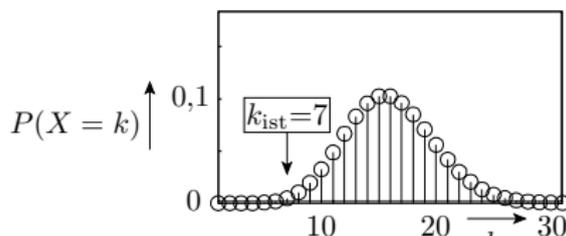


## Berechnung der Obergrenze

```

function [E_max] = pois_EOG(alpha , k_ist)
E_max = 10*k_ist+(1/alpha) ; dE=E_max;
while (1)
dE=dE/2; a = poiscdf(E_max, k_ist -1);
if (a < alpha)      E_max = E_max - dE;
else               E_max = E_max + dE;
end if
if dE<0.001 return
end % if
end % while
end % function

```



Für  $k_{\text{ist}} = 7$ ,  $\alpha_2 = 1\%$

$\text{poiscdf}(85.000, 6)=0.000\%$

$\text{poiscdf}(42.500, 6)=0.000\%$

$\text{poiscdf}(21.250, 6)=0.010\%$

$\text{poiscdf}(10.625, 6)=9.540\%$

$\text{poiscdf}(15.938, 6)=0.417\%$

...

$E(X)_{\text{max}} \approx 14,57$



## Tabellierung der Erwartungswertbereiche

	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 2\%$	
$x_{\text{ist}}$	$E(X)_{\text{min}}$	$E(X)_{\text{max}}$	$E(X)_{\text{min}}$	$E(X)_{\text{max}}$	$E(X)_{\text{min}}$	$E(X)_{\text{max}}$
0	0,005	–	0,01	–	0,02	–
1	0,103	5,298	0,148	4,606	0,215	3,912
2	0,338	7,430	0,436	6,638	0,567	5,834
3	0,672	9,273	0,823	8,406	1,016	7,516
4	1,078	10,978	1,279	10,045	1,529	9,084
5	1,537	12,593	1,785	11,605	2,089	10,580
6	2,037	14,150	2,330	13,109	2,684	12,027



	$\alpha_1 = \alpha_2 = 5\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 10\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 20\%$	
$x_{\text{ist}}$	$E(X)_{\text{min}}$	$E(X)_{\text{max}}$	$E(X)_{\text{min}}$	$E(X)_{\text{max}}$	$E(X)_{\text{min}}$	$E(X)_{\text{max}}$
0	0,051	–	0,105	–	0,223	–
1	0,355	2,997	0,532	2,303	0,824	1,609
2	0,817	4,744	1,102	3,890	1,534	2,995
3	1,366	6,297	1,744	5,323	2,296	4,279
4	1,970	7,754	2,432	6,681	3,089	5,514
5	2,613	9,153	3,152	7,993	3,903	6,721
6	3,285	10,513	3,894	9,275	4,733	7,906



## Beispielaufgabe



- 1 Mit  $N = 10^5$  Service-Anforderungen wurden drei Fehlfunktionen beobachtet. Auf welche Unter- und Obergrenze für die Wahrscheinlichkeit einer Fehlfunktion je Service-Aufruf  $p$  lässt sich mit  $\alpha = 1\%$  schließen?
- 2 Ein Kontrolle hat von 1.000 FF 4 FF nicht erkannt. In welchem Bereich liegt mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 1\%$  die Maskierungswahrscheinlichkeit?



## Lösung Aufgabenteil 1

Mit  $N = 10^5$  Service-Anforderungen wurden drei Fehlfunktionen beobachtet. Auf welche Unter- und Obergrenze für die Wahrscheinlichkeit einer Fehlfunktion je Service-Aufruf  $p$  lässt sich mit  $\alpha = 1\%$  schließen?

- $E(X)_{\min/\max}$  für  $k_{\text{ist}} = 3$  und  $\alpha = 1\%$  aus der Tabelle ablesen:

	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$		...
$X_{\text{ist}}$	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$	...
2	0,338	7,430	0,436	6,639	...
3	0,672	9,274	<b>0,823</b>	<b>8,405</b>	...

- Der gesuchte Wahrscheinlichkeitsbereich ist der Erwartungsbereich geteilt durch  $N = 10^5$  Service-Anforderungen:

$$p_{\min} = 8,23 \cdot 10^{-6}; \quad p_{\max} = 8,405 \cdot 10^{-5}$$



## Lösung Aufgabenteil 2

Ein Kontrolle hat von 1.000 FF 4 FF nicht erkannt. In welchem Bereich liegt mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 1\%$  die Maskierungswahrscheinlichkeit?

- $E(X)_{\min/\max}$  für  $k_{\text{ist}} = 4$  und  $\alpha = 1\%$  aus der Tabelle ablesen:

	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$		...
$X_{\text{ist}}$	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$	...
2	0,338	7,430	0,436	6,639	...
3	0,672	9,274	0,823	8,405	...
4	1,078	10,978	<b>1,279</b>	<b>10,045</b>	...

- Die Maskierungswahrscheinlichkeit ist die Maskierungsanzahl durch 1.000:

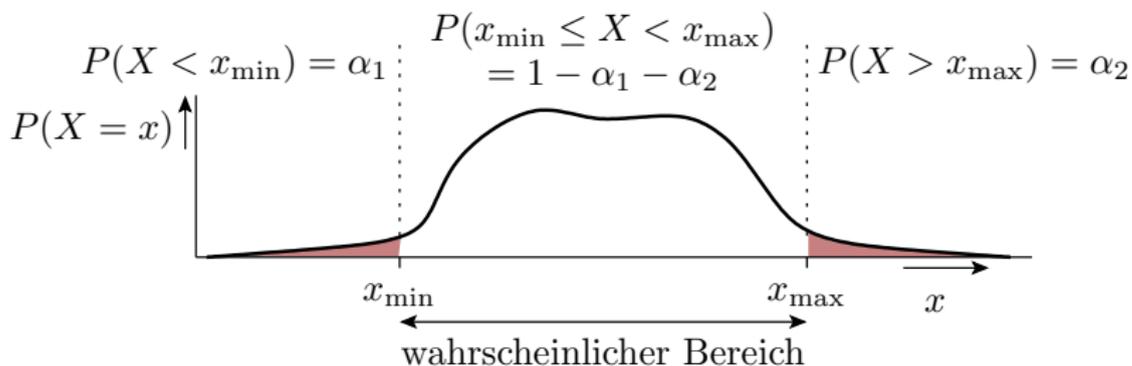
$$p_{\min} = 1,28 \cdot 10^{-3}; \quad p_{\max} = 1,00 \cdot 10^{-2}$$



## Verteilungen unbekannt



## Verteilungen unbekannt



Die Bestimmung eines wahrscheinlichen Intervalls  $[x_{\min}, x_{\max}]$ , in dem der Wert einer Zufallsgröße  $X$  mit einer Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$  liegt, ist auch möglich, wenn die Verteilung nicht bekannt, multimodal, ... (beliebig) ist. Voraussetzung ist eine hinreichend kleine Varianz im Vergleich zum Abstand zwischen dem Erwartungswert und den Wertebereichsgrenzen.



## Das schwache Gesetz der großen Zahlen

Nach der tschebyscheffschen Ungleichung:

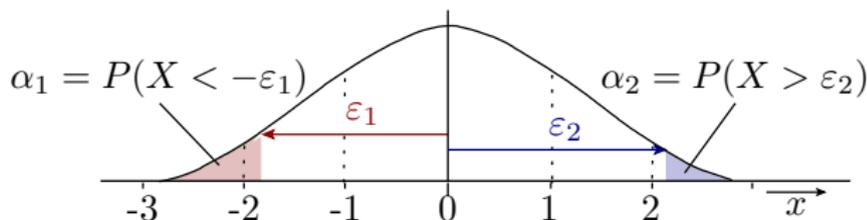
$$P(|x - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}$$

ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert einer Zufallsgröße mehr als ein Intervallradius  $\varepsilon$  von seinem Erwartungswert abweicht, nicht größer als das Verhältnis der Varianz zum Quadrat des Intervallradius  $\varepsilon$ . Bei Zulassen einer Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  beträgt der Intervallradius mindestens:

$$\varepsilon \geq \sqrt{\frac{D^2(X)}{\alpha}}$$

Ausgehend von einer bekannten Realisierung  $x_{\text{ist}}$  beschränkt das den Bereich des Erwartungswerts auf  $E(X) \in x_{\text{ist}} \pm \varepsilon$ . Bei bekanntem oder vermutetem Erwartungswert  $E(X)$  ist der wahrscheinliche Bereich, in dem  $1 - \alpha$  der experimentellen Ergebnisse liegen werden  $x_{\text{min/max}} \in E(X) \pm \varepsilon$ .

## Zum Vergleich: Intervallradius bei Normalverteilung



Bei einer standardisierten Normalverteilung beträgt der Intervallradius für  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right)$$

Für Normalverteilungen mit einer Standardabweichung  $\neq 1$  ist er um die Standardabweichung größer:

$$\varepsilon = \sqrt{D^2(X)} \cdot \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right)$$

Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha$		10%	5%	2%	1%	0,5%	0,2%
$\varepsilon_{DX1} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{D^2(X)}}$	beliebige Verteilung	3,16	4,47	7,07	10	14,1	22,4
	Normalverteilung	1,65	1,96	2,33	2,75	2,81	3,10



## Beispielaufgabe



Gegeben sei eine Stichprobe gemessener Widerstandswerte in  $k\Omega$ :

$$X : 10,3, 10,5, 9,7, 8,9, 10,1, 11,0, 10,2, 9,5$$

Aus dieser Stichprobe soll

- 1 ohne weitere Vorkenntnisse über die Verteilung und
- 2 unter der Annahme, dass die Widerstandswerte normalverteilt sind,

auf den möglichen Bereich des Erwartungswertes geschlussfolgert werden. Zugelassene Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha = 2\%$ .



## Lösung

Erwartungswert und Standardabweichung der Datenstichprobe:

$$E_S(R) = \frac{1}{8} (10,3 + \dots) \text{ k}\Omega = 10,025 \text{ k}\Omega$$

$$\sqrt{D_S^2(R)} = \sqrt{\frac{1}{7} \left( (10,3 - 10,025)^2 + \dots \right) \text{ k}\Omega^2} = 647 \Omega$$

Auf Standardabweichung 1 normierter Intervallradius:

Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha$	10%	5%	2%	1%	0,5%	0,2%	
$\epsilon_{DX1} = \frac{\epsilon}{\sqrt{D^2(X)}}$	beliebige Verteilung	3,16	4,47	7,07	10	14,1	22,4
	Normalverteilung	1,65	1,96	2,33	2,75	2,81	3,10

**1** Ohne Kenntnis der Verteilung:

$$E(R) \in 10,025 \text{ k}\Omega \pm 7,07 \cdot 647 \Omega = [5,3 \text{ k}\Omega, 14,8 \text{ k}\Omega]$$

**2** Für normalverteilte Widerstandswerte:

$$E(R) \in 10,025 \text{ k}\Omega \pm 2,33 \cdot 647 \Omega = [8,5 \text{ k}\Omega, 11,5 \text{ k}\Omega]$$



## Länge von Zufallstest

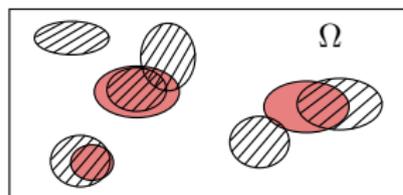


## Testsatzlänge von Zufallstests

Für Zufallstests beschränkt sich die Testauswahl auf die Festlegung der Testsatzlänge. Abschätzung der erforderlichen Testsatzlänge:

- Fehlersimulation bis zu einer hinreichenden Modellfehlerüberdeckung. Skalierung der so bestimmten Testsatzlänge.
- Schätzen der FHSF-Funktion. Berechnung der Testsatzlänge für eine geforderte Fehlerüberdeckung  $FC_{\text{soll}}$  oder eine geforderte Verbesserung der fehlerbezogenen Teilzuverlässigkeit  $\frac{Z_F(n)}{Z_F(n_0)}$ .

## Fehler- und Modellfehlerüberdeckung Zufallstest



$\Omega$  Menge der Eingabewerte / Teilfolgen die einen Fehler nachweisen können

 Nachweismenge eines Modellfehlers

 Nachweismenge eines tatsächlichen Fehlers

- Ein Fehlermodell erzeugt viele Modellfehler.
- Alle potentiellen Fehler und alle Modellfehler haben Nachweismengen, die sich mehr oder weniger überschneiden.
- Die Nachweiswahrscheinlichkeiten der Modellfehler unterscheiden sich dabei tendenziell um einen Skalierungsfaktor  $c$  von denen der richtigen Fehler:

$$H_M(x) \sim H(c \cdot x)$$

- $c < 1$ : Modellfehler schlechter nachweisbar
- $c > 1$ : Modellfehler besser nachweisbar.



## Testsatzlängenskalierung

Zu erwartende Fehlerüberdeckung:

$$E(FC(n)) \approx 1 - \frac{\int_0^\infty H(x) \cdot e^{-\frac{n}{x}} \cdot dx}{\int_0^\infty H(x) \cdot dx}$$

Zu erwartende Modellfehlerüberdeckung:

$$E(FC_M(n)) \approx 1 - \frac{\int_0^\infty H_M(x) \cdot e^{-\frac{n}{x}} \cdot dx}{\int_0^\infty H_M(x) \cdot dx} \approx 1 - \frac{\int_0^\infty H(c \cdot x) \cdot e^{-\frac{n}{x}} \cdot dx}{\int_0^\infty H(c \cdot x) \cdot dx}$$

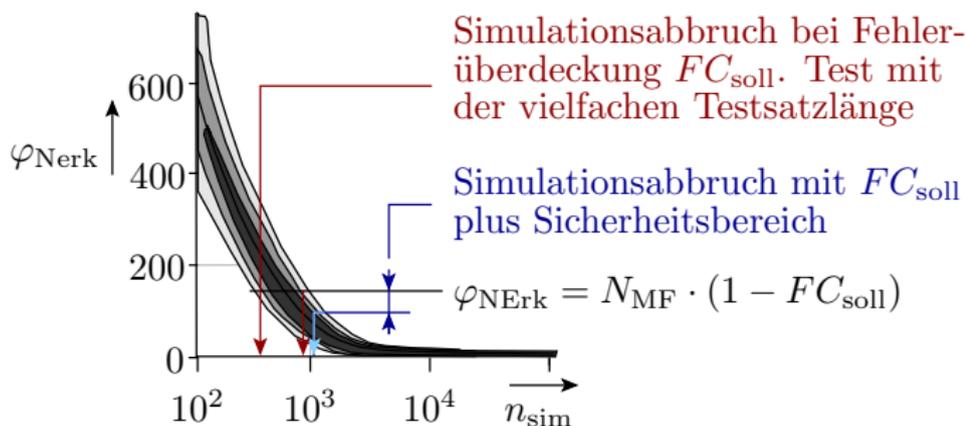
Mit der Substitution  $z = c \cdot x$

$$E(FC_M(n)) \approx 1 - \frac{\int_0^\infty H(z) \cdot e^{-\frac{n}{c \cdot z}} \cdot dz}{\int_0^\infty H(z) \cdot dz}$$

zeigt sich, dass die zu erwartende Fehlerüberdeckung etwa die zu erwartende Modellfehlerüberdeckung der  $c$ -fachen Testsatzlänge ist:

$$E(FC(n)) \approx E(FC_M(c \cdot n))$$

## Simulation, bis genügend Modellfehler erkannt sind



Simulation, bis die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler den

- 1 max. zulässigen Wert erreicht hat. Testsatzlänge:  $(4 \dots 10) \cdot c \cdot n_{\text{sim}}$ .
- 2 maximal zulässigen Wert abzüglich der mehrfachen Standardabweichung unterschreitet. Testsatzlänge:  $c \cdot n_{\text{sim}}$ .



$n = f(FC_{\text{soll}})$  für eine FHSF-Potenzfunktion

Nach Gl. 4 nimmt bei einem Zufallstest und Beseitigung aller erkannten Fehler die Fehleranzahl tendenziell mit der  $k$ -ten Potenz der Testsatzlänge ab:

$$E(\varphi(n)) = E(\varphi(n_0)) \cdot \left(\frac{n_0}{n}\right)^k$$

Die zu erwartende Fehlerüberdeckung ist eins abzüglich dem zu erwartenden Anteil der nachweisbaren Fehler und soll  $FC_{\text{soll}}$  sein:

$$FC_{\text{soll}} = 1 - \frac{E(\varphi(n))}{E(\varphi(n_0))} = 1 - \left(\frac{n_0}{n}\right)^k$$

Erforderliche Testsatzlänge:

$$n = n_0 \cdot (1 - FC_{\text{soll}})^{-\frac{1}{k}} \quad (25)$$



## Zufallstest zur Zuverlässigkeitsverbesserung

Nach Gl. 5 nimmt die Wahrscheinlichkeit einer durch Fehler verursachten FF, wenn alle erkannten Fehler beseitigt werden, mit der  $k + 1$ -ten Potenz der Testsatzlänge ab:

$$p_{\text{FFF}}(n) = p_{\text{FFF}}(n_0) \cdot \left(\frac{n_0}{n}\right)^{k+1}$$

Die fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit  $Z_{\text{F}} = \frac{1}{p_{\text{FFF}}}$  nimmt mit der  $k + 1$ -ten Potenz der Testsatzlänge zu:

$$Z_{\text{F}}(n) = Z_{\text{F}}(n_0) \cdot \left(\frac{n}{n_0}\right)^{k+1} \quad (26)$$

Erforderliche Testsatzlänge für eine Zuverlässigkeitsverbesserung  $\frac{Z_{\text{F}}(n)}{Z_{\text{F}}(n_0)}$ :

$$n = n_0 \cdot \left(\frac{Z_{\text{F}}(n)}{Z_{\text{F}}(n_0)}\right)^{\frac{1}{1+k}} \quad (27)$$

## Beispielaufgabe



Die FHSF-Funktion eines Testobjekts habe einen Exponenten im Bereich von  $k = 0,3 \dots 0,5$ .

- 1 Um welchen Faktor muss die Testsatzlänge  $n$  gegenüber  $n_0$  erhöht werden, damit 90% der noch nicht beseitigten Fehler erkannt und beseitigt werden?
- 2 Um welchen Faktor muss die Testsatzlänge  $n$  gegenüber  $n_0$  erhöht werden, um die fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit  $Z_F$  auf das zehnfache zu erhöhen?



## Lösung Aufgabenteil 1

Um welchen Faktor muss die Testsatzlänge  $n$  gegenüber  $n_0$  erhöht werden, damit 90% der noch nicht beseitigten Fehler erkannt und beseitigt werden ( $k = 0,3 \dots 0,5$ )?

---

In Gl. 27

$$n = n_0 \cdot (1 - FC_{\text{soll}})^{-\frac{1}{k}}$$

sind  $FC_{\text{soll}} = 90\%$  und  $k = 0,3 \dots 0,5$  einzusetzen:

$k$	0,3	0,4	0,5
$\frac{n}{n_0}$	2154	316	100

Die erforderliche Testsatzlänge ist sehr stark von  $k$  abhängig.



## Lösung Aufgabenteil 2

Um welchen Faktor muss die Testsatzlänge  $n$  gegenüber  $n_0$  erhöht werden, um die fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit  $Z_F$  auf das zehnfache zu erhöhen?  $k = 0,3 \dots 0,5$ .

---

In Gl. 26

$$n = n_0 \cdot \left( \frac{Z_F(n)}{Z_F(n_0)} \right)^{\frac{1}{1+k}}$$

sind  $\frac{Z_F(n)}{Z_F(n_0)} = 10$  und  $k = 0,3 \dots 0,5$  einzusetzen:

$k$	0,3	0,4	0,5
$\frac{n}{n_0}$	5,88	5,18	4,64

Erforderliche Testsatzlänge für eine Verzehnfachung der Zuverlässigkeit ist viel kleiner und viel weniger von  $k$  abhängig als für  $FC_{\text{soll}} = 90\%$ .