Test und Verlässlichkeit
Grosse Übung zu Foliensatz 3

Prof. G. Kemnitz

Institut für Informatik, TU Clausthal (TV-GUe3)

1. Juli 2016

Informationsredundanz

Fehlererkennende Codes

Aufgabe 3.1: Arithmetischer Code

1. Bilden Sie für den Bitvektor

$$110010001000011101$$

das fehlererkennende Codewort durch Multiplikation seines Wertes als vorzeichenfreie ganze Binärzahl mit der Primzahl 10313 (Bestimmung des Dezimalwerts, Multiplikation und Konvertierung des Produkts in einen Binärvektor).
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden mit dem gewählten fehlererkennenden Code Datenverfälschungen erkannt?
3. Werden mit dem gewählten Code Verfälschung erkannt, die die Bitstellen 3 und 14 invertieren?

Hinweis: Der Code ist linear, so dass alle Verfälschungen erkannt werden, deren Differenzen Vielfache des Quotienten sind.

Zur Kontrolle

1. Codewort berechnen:
   - Eingabewert hexadezimal: $11.0010.0010.0001.1101 = 0x3221D$
   - Mit Octave (Matlab) Produkt als hexadezimal:

```
octave:3> printf('CW=0x%x\n',0x3221D*10313)
CW=0x7e394245
binär: 0b111.1110.0011.1001.0100.0010.0100.0101
```

2. Erkennungswahrscheinlichkeit:

$$p_{\mathrm{E}} \approx 1 - \frac{1}{10313} = 99{,}990\%$$

3. Keine Maskierung, wenn Bit 3 und 14 invertiert ist, bedeutet

$$\mathrm{Rest}\left(\frac{0b100.0000.0000.1000}{10313}\right) \neq 0 \surd$$

Für Differenzen ungleich null, die kleiner als der Quotient sind, immer erfüllt.

Prüfkennzeichen

Aufgabe 3.2: Prüfsummen

Bilden Sie für die Bytefolge

```
0x13, 0xF2, 0x33, 0xE6
```

die Prüfsumme:

1. durch byteweises Aufsummieren unter Vernachlässigung der Überträge und
2. durch bitweise EXOR-Verknüpfung der Bytes.

Welche der beiden Prüfsummen erkennt, dass die nachfolgenden Datenfolgen verfälscht sind?

```
F1: 0x13, 0x33, 0xF2, 0xE6
F2: 0x13, 0xF2, 0x37, 0xE6
F3: 0x13, 0xF1, 0x90, 0x56
```

Wert unverf.	Zwischens-prüfsum.	binär
0x13		
0xF2		
0x33		
0xE6		
	EXOR:	

Wert F1	Zwischens-prüfsum.	binär
0x13		
0x33		
0xF2		
0xE6		
	EXOR:	

Wert F2	Zwischens-prüfsum.	binär
0x13		
0xF2		
0x37		
0xE6		
	EXOR:	

Wert F3	Zwischens-prüfsum.	binär
0x13		
0xF1		
0x90		
0x56		
	EXOR:	

	erkennbar an Prüfsumme	erkennbar an EXOR-Summe
F1		
F2		
F3		

Zur Kontrolle

Wert	Zwischensprüfsum.	binär
0x13	0x13	0001 0011
0xF2	0x05	1111 0010
0x33	0x38	0011 0011
0xE6	0x1E	1110 0110
	EXOR:	0011 0100

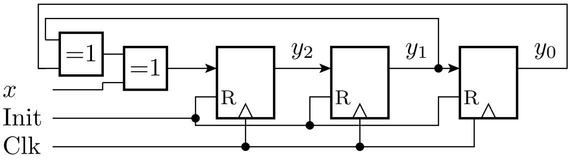
Wert	Zwischensprüfsum.	binär
0x13	0x13	0001 0011
0x33	0x46	0011 0011
0xF2	0x38	1111 0010
0xE6	0x1E	1110 0110
	EXOR:	0011 0100

Wert	Zwischensprüfsum.	binär
0x13	0x13	0001 0011
0xF2	0x05	1111 0010
0x37	0x3C	0011 0111
0xE6	0x22	1110 0110
	EXOR:	0011 0000

Wert	Zwischensprüfsum.	binär
0x13	0x13	0001 0011
0xF1	0x04	1111 0001
0x90	0x94	1001 0000
0x46	0xDA	0100 0110
	EXOR:	0011 0100

Aufgabe 3.3: Prüfkennzeichen mit LFSR

Gegeben ist folgendes linear rückgekoppelte Schieberegister:

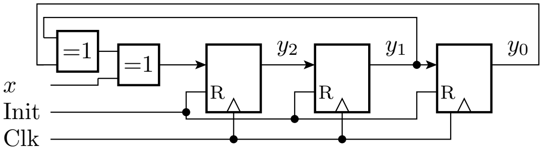


	x	y_2	y_1	y_0
0	1	0	0	0
1	0			
2	1			
3	1			
4	0			
5	0			
6	1			
7	1			
8	0			
9	1			
10	0			
11	0			
12	1			
13	0			
14	1			
15	0			
PKZ:				

1. Auf welches Prüfkennzeichen $\mathbf{y} = y_2 y_1 y_0$ wird die Datenfolge 1011 0011 0100 1010 beginnend mit dem linken Bit und Startwert 000 abgebildet? Füllen Sie dazu die Tabelle in der Abbildung aus.
2. Wie hoch ist Fehlererkennungswahrscheinlichkeit?

Zur Kontrolle

1. Prüfkennzeichen der Datenfolge 1011 0011 0100 1010:



	x	y_2	y_1	y_0
0	1	0	0	0
1	0	1	0	0
2	1	0	1	0
3	1	0	0	1
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	1	0	0	0
7	1	1	0	0
8	0	1	1	0
9	1	1	1	1
10	0	1	1	1
11	0	0	1	1
12	1	0	0	1
13	0	0	0	0
14	1	0	0	0
15	0	1	0	0
PKZ:		0	1	0

2. Fehlererkennungswahrscheinlichkeit:

$$p_{\mathrm{E}} \approx 1 - 2^{-3} = 87{,}5\%$$

Fehlerkorr. Codes

Aufgabe 3.4: Berechnung der Kreuzparität

1011001001101000	
1100001110010011	
0110010010101101	
1000100001100101	
1101001011010011	
1101000010011110	
1010011000010101	
1011010010100110	

Längsparität

Querparität

1. Ergänzen Sie die Bitwerte für die Längs- und Querparität so, dass die Anzahl der Einsen in jeder Zeile und Spalte incl. Paritätsbit gerade ist.
2. Woran ist eine Invertierung des rot unterlegten Bits zu erkennen?

Zur Kontrolle

	Längsparität
1011001001101000	1
1100001110010011	0
0110010010101101	0
1000100001100101	0
1101001011010011	1
1101000010011110	0
1010011000010101	1
1011010010100110	0
1000110111001111	
Querparität	

Hamming-Codes

Aufgabe 3.5: (8,12)-Hamming-Code

b_{12}	b_{11}	b_{10}	b_9	b_8	b_7	b_6	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1
x_7	x_6	x_5	x_4	q_3	x_3	x_2	x_1	q_2	x_0	q_1	q_0

$$\begin{aligned} q_0 &= x_0 \oplus x_1 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_6 \\ q_1 &= x_0 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_5 \oplus x_6 \\ q_2 &= x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_7 \\ q_3 &= x_4 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 \end{aligned}$$

1. Bilden Sie die Codeworte für die darzustellenden Werte: $w_1 = $ 0x73, $w_2 = $ 0x1D und $w_3 = $ 0xD6.
2. Bestimmen Sie für die Codeworten $c_4 = $ 0xA24, $c_5 = $ 0x5D6 und $c_6 = $ 0x141, ob zulässig oder korrigierbar und wenn zulässig oder korrigierbar, den Wert.

1. Codeworte für die darzustellenden Werte: 0x73, 0x1D und 0xD6.
2. Wert von 0xA24, 0x5D6 und 0x141

Bitnummer	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Zuordnung	x_7	x_6	x_5	x_4	q_3	x_3	x_2	x_1	q_2	x_0	q_1	q_0
Kontrollbits												
$w_1 =$ 0x73												
$w_2 =$ 0x1D												
$w_3 =$ 0xD6												
$c_4 =$ 0xA24												
$c_5 =$ 0x5D6												
$c_6 =$ 0x141												

Zur Kontrolle

Bitnummer	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
Zuordnung	x_7	x_6	x_5	x_4	q_3	x_3	x_2	x_1	q_2	x_0	q_1	q_0	
Kontrollbits													
$w_1 =$ 0x73	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	$c_1 =$ 0x79E
$w_2 =$ 0x1D	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	$c_2 =$ 0x1E7
$w_3 =$ 0xD6	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	$c_3 =$ 0xDB9
$c_4 =$ 0xA24	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	$dq_4 = 3$
$c_5 =$ 0x5D6	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	$dq_5 = 9$
$c_6 =$ 0x141	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	$dq_6 = 15$

w_4 : Wert 0xA5 mit verfälschtem $x_0 \Rightarrow w_4 =$0xA4

w_5 : Wert 0x5B mit verfälschtem $x_4 \Rightarrow w_5 =$0x4B

w_6 : Wert 0x18 mit verfälschtem »Bit 15«, nicht korrigierbar.

Formatkontrolle

Syntaxtest

Aufgabe 3.6: Entwurf Kontrollautomat

Ein (vereinfachter) Rechnerbefehlssatz besteht aus vier verschiedenen Befehlstypen

```
add␣rr,rr;
addi␣rr,imm8;
sub␣rr,rr;
subi␣rr,imm8;
```

␣ – Leerzeichen; »rr« Bezeichner eines der 32 Register ("r0", "r1", ... "r31"); »imm8« für die Wert einer 8-Bit Hexzahl ("0x00", "0x01", ..., "0xFF"; "0x" gefolgt von zwei Hex.-Ziffern mit den Zifferenwerten 'A' bis 'F').

1. Beschreiben Sie das Nachrichtenformat in der EBNF mit den Ersetzungsregeln für Sequenz, Option, Wiederholung etc.
2. Entwerfen Sie einen Kontrollautomat auf Syntaxfehler als Graph.

Zur Kontrolle

```
add␣rr,rr; addi␣rr,imm8;
sub␣rr,rr; subi␣rr,imm8;
```

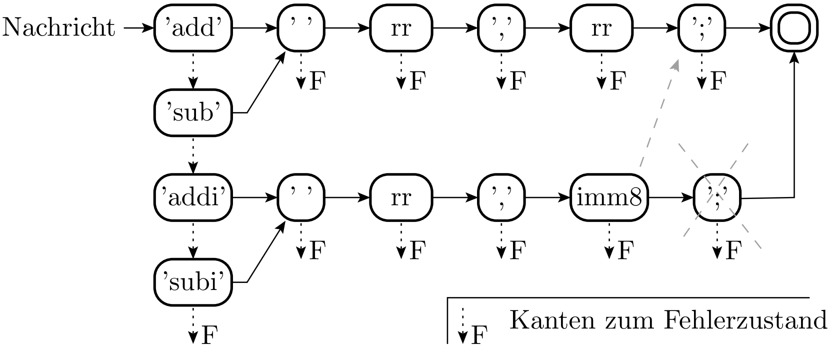
- rr: für die Bezeichner eines der 32 Register "r0", "r1", ... "r31"
- imm8: 8-Bit Hexzahl in der Form "0x00", "0x01", ..., "0xFF"
- ␣: Leerzeichen.

EBNF-Beschreiben:

```
Befehl = ('add' | 'sub', '␣', rr, ',', rr,   ';') |
         ('addi'| 'subi','␣', rr, ',', imm8, ';');
rr     = 'r', '0' | (('1' | '2'), z) | '3', ('0'|'1');
imm8   = '0x', h, h;
z      = '0' | '1' | ... | '9';
h      = z | 'A' | 'B' | ... | 'F'
```

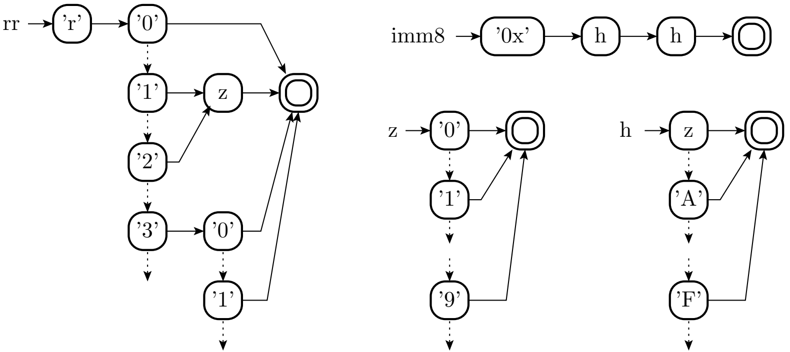
```
Befehl = ('add' | 'sub', '␣', rr, ',', rr,   ';') |
         ('addi'| 'subi','␣', rr, ',', imm8, ';') |;
```

Kontrollautomat für Befehle auf Syntaxfehler:



```
rr      = 'r', '0' | (('1' | '2'), z) | '3', ('0'|'1');
imm8    = '0x', h, h;
z       = '0' | '1' | ... | '9';
h       = z | 'A' | 'B' | ... | 'F'
```

Kontrollautomaten für die Befehlsbestandteile:

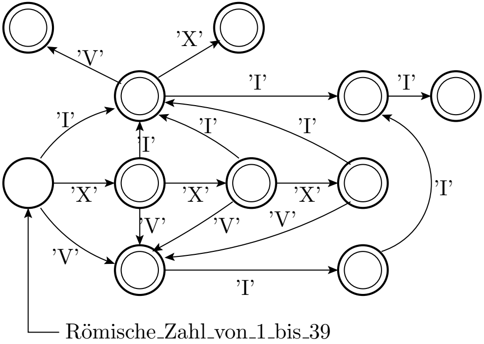


Aufgabe 3.7: Syntaxtest für römische Zahlen

Entwerfen Sie einen Kontrollautomaten für einen Syntaxtest für römische Zahlen mit einem Wert von 1 bis 39. Hier bietet sich ein Mealy-Automat an, der die Zeichen an den Kanten abräumt.

Wert		Wert		Wert		Wert	
1	I	11	XI	21	XXI	31	XXXI
2	II	12	XII	22	XXII	32	XXXII
3	III	13	XIII	23	XXIII	33	XXXIII
4	IV	14	XIV	24	XXIV	34	XXXIV
5	V	15	XV	25	XXV	35	XXXV
6	VI	16	XVI	26	XXVI	36	XXXVI
7	VII	17	XVII	27	XXVII	37	XXXVII
8	VIII	18	XVIII	28	XXVIII	38	XXXVIII
9	IX	19	XIX	29	XXIX	39	XXXIX
10	X	20	XX	30	XXX		

Zur Kontrolle



I	XI	XXI	XXXI
II	XII	XXII	XXXII
III	XII	XXII	XXXII
IV	XIV	XXIV	XXXIV
V	XV	XXV	XXXV
VI	XVI	XXVI	XXXVI
VII	XVII	XXVII	XXXVII
VIII	XVIII	XXVIII	XXXVIII
IX	XIX	XXIX	XXXIX
X	XX	XX	

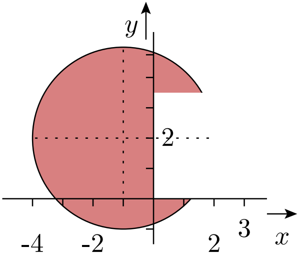
(potentzieller) Endzustand

Bei allen Eingaben, für die keine Kante gezeichnet ist, Übergang in den Fehlerzustand.

Typ und Wertebereich

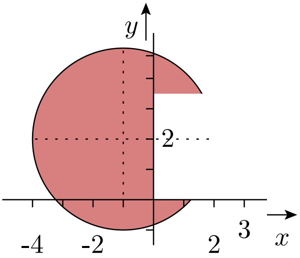
Aufgabe 3.8: Kontrollausdruck

Die Wertpaare (x, y) sollen Punkte der im nachfolgenden Bild eingezeichneten Kreisfläche mit dem Mittelpunkt $(-1, 2)$ und dem Radius 3 mit dem ausgeschnittenen rechteckigen Bereich sein.



Entwickeln Sie einen Kontrollausdruck für die Wertebereichskontrolle, der genau dann wahr ist, wenn ein Punkt (x, y) im zulässigen Bereich liegt.

Zur Kontrolle



Kontrollausdruck für die Wertebereichskontrolle:

$$((x < 0) \vee (y < 0) \vee (y > 3)) \wedge \left((x+1)^2 + (y-2)^2 < 3^2\right)$$

Aufgabe 3.9: Kontrollgüte

Ein System von Wertebereichskontrollen hat von $\zeta = 2000$ Fehlfunktionen $\zeta_{\text{Erk.ist}} = 800$ erkannt. ζ_{Erk} sei normalverteilt. Abhängigkeiten zwischen dem Auftreten der Fehlerfunktionen seien vernachlässigbar ($\kappa = 1$). Zulässige

1. Wie groß ist die Fehlererkennungswahrscheinlichkeit mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1% mindestens?
2. Wie groß ist die Fehlererkennungswahrscheinlichkeit mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1% maximal?

Lösungshinweise:

- Abschätzung des Erwartungswertbereiches der Anzahl der nicht erkannten FF aus einem experimentell bestimmten Ist-Wert.
- Division durch die Anzahl aller Fehlfunktionen.

... von $\zeta = 2000$ Fehlfunktionen $\zeta_{\mathrm{Erk.ist}} = 800$ erkannt, $\kappa = 1$, Irrtumswahrscheinlichkeit$\alpha_1 + \alpha_2 = 1\%$.

Bereich des Erwartungswerts:

$$\begin{aligned} E\left(\zeta\right)_{\mathrm{min}\,/\,\mathrm{max}} &= \zeta_{\mathrm{Erk.ist}} \mp \sqrt{\kappa \cdot \zeta_{\mathrm{Erk.ist}} \cdot \left(1 - \frac{\zeta_{\mathrm{Erk.ist}}}{\zeta}\right)} \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 800 \mp \sqrt{800 \cdot \left(1 - \frac{800}{2000}\right)} \cdot 2{,}33 = [749,\ 851] \end{aligned}$$

α	4,54%	0,26%	0	4%	2%	1%	0,4%	0,2%
$\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

Bereich der Erkennungswahrscheinlichkeit:

$$p_{\mathrm{E.min}} = 37{,}4\%; \quad p_{\mathrm{E.max}} = 42{,}5\%$$

Wertekontrollen

Mehrfachber. & Vergleich

Aufgabe 3.10: Vergleichsfenster

Zwei zu vergleichende unabhängige normalverteilte Werte X_1 und X_2 haben denselben Sollwert und die Standardabweichungen $\sqrt{D^2(X_1)} = 3$ und $\sqrt{D^2(X_1)} = 4$. Wie groß ist für die Kontrolle

```
if abs(X1-X2)>eps {<Fehlerbehandlung>
```

der Radius ε dess Vergleichsfenster mindestens zu wählen, damit die Wahrscheinlichkeit für Vergleichs-Phantomfehler $p_{\mathrm{VPh}} \leq 0{,}1\%$ ist?

$E(X_1 - X_2) =$

$\sqrt{D^2(X_1 - X_2)} =$

$\varepsilon =$

z	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

Zur Kontrolle

- Der Erwartungswert der Differenz unabhängiger Zufallsgrößen ist die Differenz der Erwartungswerte:

$$E\left(X_1 - X_2\right) = 0$$

- Die Varianz der Differenzen ist die Summe der Varianzen:

$$\sqrt{D^2\left(X_1 - X_2\right)} = \sqrt{D^2\left(X_1\right) + D^2\left(X_2\right)} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

- Standadisierter Normalverteilungswert für beiderseitig $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}05\%$ ist etwa 3,3.

z	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

- Mindestintervallradius für das Vergleichsfenster:

$$\varepsilon \approx 3{,}3 \cdot 5 = 16{,}5$$

Aufgabe 3.11: Quantisierungsfehler

1. Runden Sie die nachfolgenden Werte auf 4 Nachkommabits.
2. Führen Sie mit den Originalwerten und mit den gerundeten Werten[1] folgende Operationen durch:

   e=b*c; f=e+d; g=f-a;

3. Ergänzen Sie in der nachfolgenden Tabelle die gerundeten Werte, ihre Hex-Darstellung und den Rundungsfehler.

	w (Wert)	$w_{4\mathrm{NKB}}$	hex($w_{4\mathrm{NKB}}$)	$w - w_{4\mathrm{NKB}}$
a	123,6793			
b	16,7345			
c	5,9463			
d	24,7832			
e=b*c				

[1] Nach jeder Operation ist auf 4 Nachkommabits zu runden.

	w (Wert)	$w_{4\text{NKB}}$	hex($w_{4\text{NKB}}$)	$w - w_{4\text{NKB}}$
a	123,6793			
b	16,7345			
c	5,9463			
d	24,7832			
e=a-7*b				
f=5*c-d				
g=e*f				

$w_{4\text{NKB}}$ Wert gerundet auf 4 Nachkommabits.

Zur Kontrolle

	w (Wert)	$w_{4\text{NKB}}$	hex($w_{4\text{NKB}}$)	$w - w_{4\text{NKB}}$
a	123,6793	123,6875	0x7B,B	0,0082
b	16,7345	16,7500	0x10,C	0,0155
c	5,9463	5,9375	0x05,F	0,0088
d	24,7832	24,8125	0x18,D	0,0293
e=a-7*b	6,5378	6,4375	0x6,7	0,1003
f=5*c-d	4,9483	4,8750	0x4,E	0,0733
g=e*f	32,3510	31,3750	0x1f,6	0,9706

Quantisierungsfehler $\pm 0{,}5$ LSB ist $\pm 0,03125$

Diversität

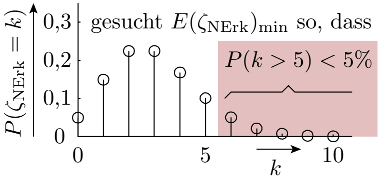
Aufgabe 3.12: Diversitätsabschätzung

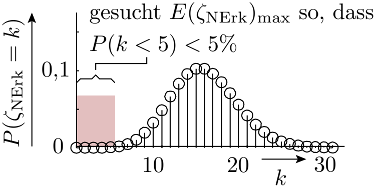
Bei einer Kontrolle durch Verdopplung und Vergleich wurden von $\zeta = 300$ Fehlfunktionen $\zeta_{\mathrm{NErk}} = 5$ nicht erkannt.

1. Auf welchen Bereich der zu erwartenden Anzahl der nicht erkannten Fehlfunktionen lässt das Experiment schließen? Zulässige Irrtumswahrscheinlichkeiten, dass im Experiment ein Werte oberhalb oder unterhalb des Bereichs hätte auftreten können, $\alpha_1 = \alpha_2 = 5\%$.
2. Auf welchen Bereich der Diversität lässt das Experiment schließen?

Von $\zeta = 300$ Fehlfunktionen wurden $\zeta_{\mathrm{NErk}} = 5$ nicht erkannt. $\alpha_1 = \alpha_2 = 5\%$.

Garantierbare Unter- und Obergrenze des Erwartungswerts:





	$\alpha_1 = \alpha_2 = 5\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 10\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 20\%$	
x_{ist}	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$
5	2,613	9,154	3,152	7,993	3,903	6,722
6	3,285	10,513	3,894	9,275	4,733	7,906

Zur Kontrolle

Von $\zeta = 300$ Fehlfunktionen wurden $\zeta_{\mathrm{NErk}} = 5$ nicht erkannt. $\alpha_1 = \alpha_2 = 5\%$.

	$\alpha_1 = \alpha_2 = 5\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 10\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 20\%$	
x_{ist}	$E(X)_{\mathrm{min}}$	$E(X)_{\mathrm{max}}$	$E(X)_{\mathrm{min}}$	$E(X)_{\mathrm{max}}$	$E(X)_{\mathrm{min}}$	$E(X)_{\mathrm{max}}$
5	2,613	9,154	3,152	7,993	3,903	6,722
6	3,285	10,513	3,894	9,275	4,733	7,906

- Bereich der Diversität:

	Grenze 1	Grenze 2
Anzahl FF	$E(\zeta_{\mathrm{NErk}})_{\mathrm{UG}} \approx 3{,}152$	$E(\zeta_{\mathrm{NErk}})_{\mathrm{OG}} \approx 9{,}275$
$E(DV) = \frac{300}{E(\zeta_{\mathrm{NErk}})_{\dots}}$	95	32