



# Test und Verlässlichkeit (F2)

## Kapitel 2: Struktur, Verteilungen, Fehler und Fehlfunktionen

Prof. G. Kemnitz

Institut für Informatik, TU Clausthal (TV-F2)  
1. Juli 2016



## Inhalt TV-F2: Struktur, Verteilung, Zufallstest

### Struktur & Fehler

- 1.1 Erschöpfender Test
- 1.2 Steuer- und Beobachtbarkeit
- 1.3 Haftfehlermodell
- 1.4 Komplexe Funktionen
- 1.5 Operationsprofil

### Verteilungen

- 2.1 Erwartungswert, Varianz, ...
- 2.2 Lineare Transformationen, ...
- 2.3 Verteilung von Zählwerten
- 2.4 Binomialverteilung
- 2.5 Effektive Anzahl der Zählversuche
- 2.6 Poisson-Verteilung

- 2.7 Normalverteilung
- 2.8 Multimodale Verteilungen

### Bereichsschätzungen

- 3.1 Normalverteilung
- 3.2 Eintrittswahrsch.
- 3.3 Verteilung unbekannt
- 3.4 Kleine Zählwerte

### Fehler und FF

- 4.1 Verteilung der Fehleranzahl
- 4.2 FHNW-Funktion
- 4.3 Effektive Fehleranzahl
- 4.4 Fehlfunktionen durch Fehler
- 4.5 Fehler und Modellfehler
- 4.6 Erforderliche Testsatzlänge
- 4.7 Zuverlässigkeitswachstum



## Struktur & Fehler



# 1. Struktur & Fehler

Eine Kernaussage zum Test und zur Verlässlichkeit von IT-Systemem steckt im »Pareto-Prinzip«:

- Ein kleiner Teil der Fehler verursacht die überwiegende Mehrheit der Fehlfunktionen.
- Ein kleiner Anteil der Tests findet die überwiegende Mehrheit der Fehler, ...

Wenn die »schlimmsten« Fehler beseitigt sind, gilt das Pareto-Prinzip jedoch weiter.

## Fakt 1

*Nach Beseitigung aller erkannten Fehler enthält das System weitere Fehler, die seltener Fehlfunktionen verursachen, deshalb bis dahin nicht aufgefallen sind und nun die Zuverlässigkeit auf einem höheren Niveau begrenzen.*

Die Ursache dafür sind die strukturbedingten stark variierenden Wahrscheinlichkeiten, mit denen die unterschiedlichen potenziellen Fehler Fehlfunktionen verursachen.



## Erschöpfender Test



## Erschöpfender Test

Tatsächliche Fehler sind nicht bekannt. Möglichkeiten für einen sicheren Nachweis eines unbekanntes Fehlverhaltens sind:

- Erschöpfender Test.
- Zufallstest mit Nachweiswahrscheinlichkeiten nahe eins.

Ein erschöpfender Test ist ein dynamischer Test mit allen Eingabemöglichkeiten.

Leider gibt es erschöpfende Tests nur theoretisch oder für sehr kleine Systeme. Denn für reales System dauern sie zu lange.

---

Kontrollfragen:

- Was ist ein dynamischer Test?
- Was sind potenzielle Fehler?





## Test mit allen Eingabemöglichkeiten

Die nachfolgende Tabelle zeigt, dass komplexe Funktionen mit vielen Eingabebits selbst ohne Gedächtnis nur mit einer winzigen Stichprobe möglicher Eingaben getestet werden können.

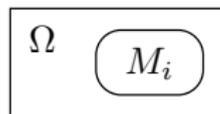
	$m$	$2^m$	$t^*$	$p_{\min}$
Gatter, 4 Eingänge	4	16	16 $\mu$ s	0,01...0,1
ALU, 68 Eingänge	68	$3 \cdot 10^{20}$	$10^7$ Jahre	$10^{-21} \dots 10^{-20}$
vier Eingabevariablen vom Typ int32_t	128	$3 \cdot 10^{38}$	$10^{25}$ Jahre	$10^{-39} \dots 10^{-38}$

( $m$  – Anzahl der Eingabebits;  $2^m$  – Anzahl der Eingabemöglichkeiten;  $t^*$  – Testdauer bei einer Service-Ausführungszeit von  $1 \mu$ s.)

- Die meisten Systeme verarbeiten mehr als 128 Eingabebits.
- Hinzu kommen oft tausende oder mehr gespeicherte Bits.
- Die geschätzte Zeit seit dem Urknall ist nur  $14 \cdot 10^9$  Jahre.



## Zufälliger Fehlernachweis



## Definition 2

Ein beständiger Fehler verursacht bei gleicher Eingabe immer dasselbe Fehlverhalten.

Eine Service-Anforderung hat einen Eingaberaum  $\Omega$  von Bedatungsmöglichkeiten und jeder beständige Fehler  $i$  wird mit einer Teilmenge  $M_i \in \Omega$  nachgewiesen. Die Nachweiswahrscheinlichkeit je Service-Anforderung ist die Wahrscheinlichkeit, dass der fehlerhafte Service mit einer Bedatung  $\mathbf{x}$  aus der Nachweismenge  $M_i$  angefordert wird:

$$p_i = P(\mathbf{x} \in M_i)$$

Wenn alle Eingabewerte mit gleicher Häufigkeit auftreten:

$$p_i = \frac{|M_i|}{|\Omega|}$$

( $|\dots|$  – Anzahl der Elemente der Menge).



Unbeständige Fehler haben auch eine Nachweismenge, werden aber bei einer Service-Anforderung mit einer Bedatung  $x \in M_i$  nur mit einer Wahrscheinlichkeit kleiner eins nachgewiesen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine von  $n$  Service-Anforderungen den Fehler  $i$  nachgeweist, beträgt, wenn jede Anforderung ihn unabhängig voneinander mit  $p_i$  nachweist:

$$p_i(n) = 1 - (1 - p_i)^n$$

- Übergang zur e-Funktion:

$$p_i(n) = 1 - e^{n \cdot \ln(1 - p_i)}$$

mit der Taylor-Reihe

$$\ln(1 - p_i) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_i^k}{k} = - \left( p_i + \frac{p_i^2}{2} + \dots \right)$$

Für  $p_i \ll 1$  (für die Testauswahl interessierender Bereich):

$$\boxed{p_i(n) = 1 - e^{-n \cdot p_i}} \quad (1)$$



## Sicherer Fehlernachweis

$n \cdot p_i$	0,5	1	2	4	8
$p_i(n) = 1 - e^{-n \cdot p_i}$	39%	63%	86%	98%	99,97%

Der nahezu sichere Nachweis eines Fehlers verlangt einen Testsatz mit

$$n \geq \frac{4 \dots 8}{p_i}$$

zufällig bedateten Service-Anforderungen. Für die Festlegung der erforderlichen Testsatzlänge genügt es, eine Untergrenze der Fehlernachweiswahrscheinlichkeit je Testschritt  $p_{\min}$  zu kennen.

### Fakt 3

*Jeder zufällig bedatete Testsatz der Länge  $n \approx 4 \dots 8 \cdot p_{\min}^{-1}$  weist praktisch jeden beständigen Fehler nach.*



## Anzahl der Care-Bits

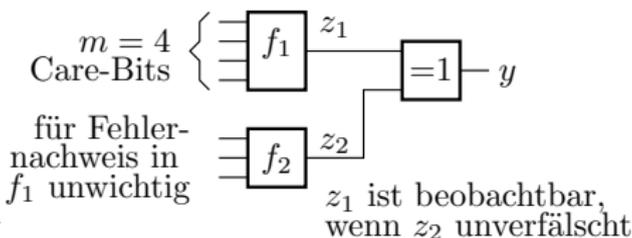
Ein Möglichkeit zur Abschätzung der Untergrenze der Fehler-nachweiswahrscheinlichkeit ist das Zählen der Bits, von denen der Fehlernachweis abhängt (Care-Bits<sup>1</sup>). Bei einem Service ohne Gedächtnis mit  $m$  Eingabebits beträgt die Größe des Eingaberaums  $|\Omega| = 2^m$  und die Größe der Nachweismenge eines Fehlers mindestens  $|M_i| \geq 1$ . Untergrenze der Fehler-nachweiswahrscheinlichkeit bei gleicher Häufigkeit aller Bedatungen:

$$p_{\min} \geq 2^{-m}$$

Ausreichende Testsatzlänge, um nahezu alle Fehler zu erkennen:

$$n \geq 2^{m+3}$$

Die Anzahl der Care-Bits kann deutlich kleiner als die Anzahl der Eingabebits sein.



<sup>1</sup>Als Gegenteil von Don't-Care-Bit.



## Beispielaufgabe



Wie viele Care-Bits darf eine Funktion maximal haben, damit ein Zufallstest der Länge  $n = 10^6$  jeden möglichen Fehler mit einer Wahrscheinlichkeit  $\geq 99\%$  nachweist?

Mindestnachweiswahrscheinlichkeit:

$$p_i(n) = 1 - e^{-n \cdot p_i} \geq 99\%$$

$$p_i \geq \frac{-\ln(1\%)}{n} = 4,6 \cdot 10^{-6}$$

Maximale Care-Bit-Anzahl:

$$2^{-m} \leq 4,6 \cdot 10^{-6}$$

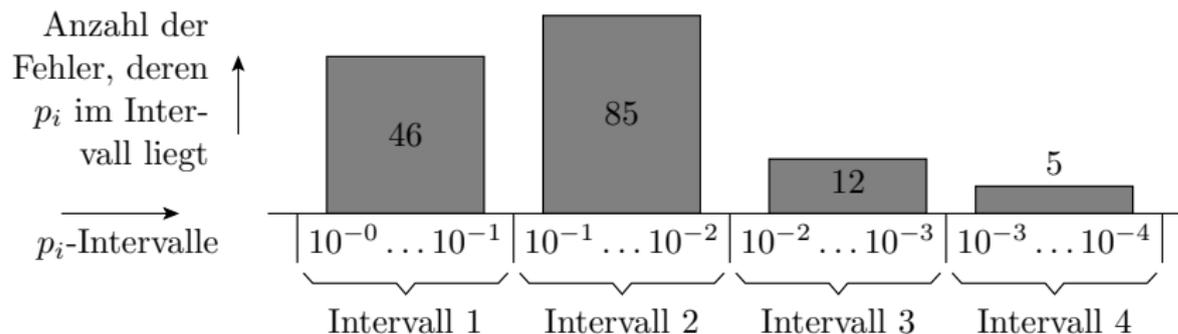
$m$	16	17	18	19	20
$2^{-m}$	$1,53 \cdot 10^{-5}$	$7,63 \cdot 10^{-6}$	$3,81 \cdot 10^{-6}$	$1,91 \cdot 10^{-6}$	$9,54 \cdot 10^{-7}$



## Steuer- und Beobachtbarkeit

## Lernziel

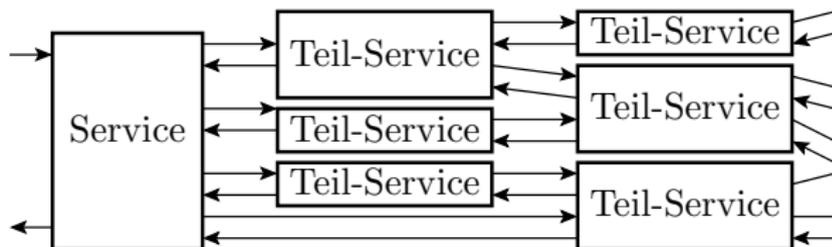
- Die Nachweiswahrscheinlichkeiten der Fehler in IT-Systemen streuen über viele Zehnerpotenzen.



- Die meisten Fehler sind gut nachweisbar. Aber auch nach ausgiebigen Tests sind noch Fehler im System zu erwarten, die selten Fehlfunktionen verursachen.
- Dieser Abschnitt zeigt, dass diese Eigenart aus der Struktur von IT-Systemen resultiert.

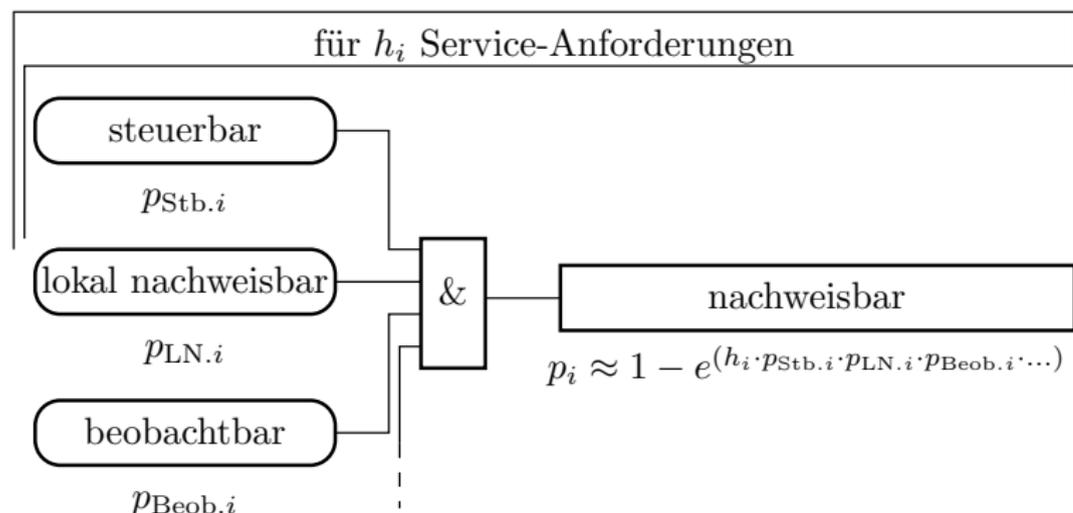


## Hierarchie



In einem hierarchischen System verursacht ein Fehler in einem Teil-Service nur dann ein Versagen der übergeordneten Service-Leistung, wenn

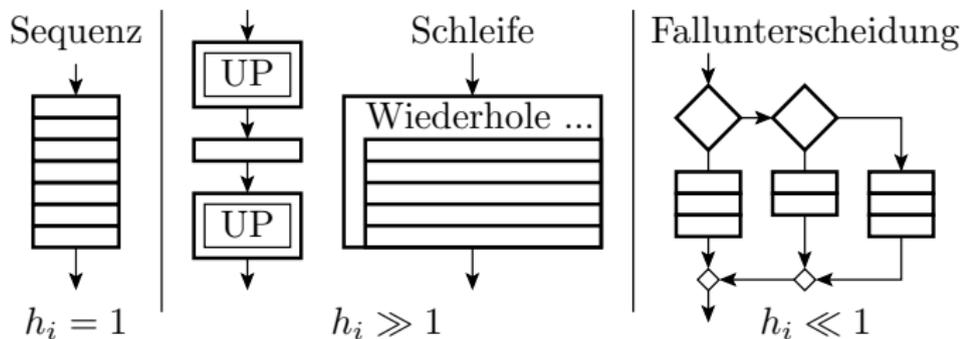
- die übergeordnete Service-Leistung den Teil-Service nutzt,
- der Fehler dabei angeregt wird / steuerbar ist,
- lokal nachweisbar ist und
- die lokale Verfälschung am Gesamtergebnis beobachtbar ist.
- Der Nachweis in einem Schritt lässt sich als Fehlerbaum mit einer UND-Verknüpfung von Steuerbarkeit, lokaler Anregung und Beobachtbarkeit beschreiben.



- Die  $h_i$ -fache Mehrfachnutzung in komplexen Service-Leistungen entspricht  $h_i$  Einzeltests des Teilsystems.
- Die Nachweiswahrscheinlichkeit je Test des Gesamtsystems ist das Produkt von  $h_i$  und aller  $p_{...i}$ 's (vergl. Gl. 1).

Im Weiteren wird aus Struktursicht gezeigt, warum  $h_i$  und die  $p_{...i}$ 's in einem weiten Bereich variieren.

## Verarbeitungsfluss und Nutzungshäufigkeit



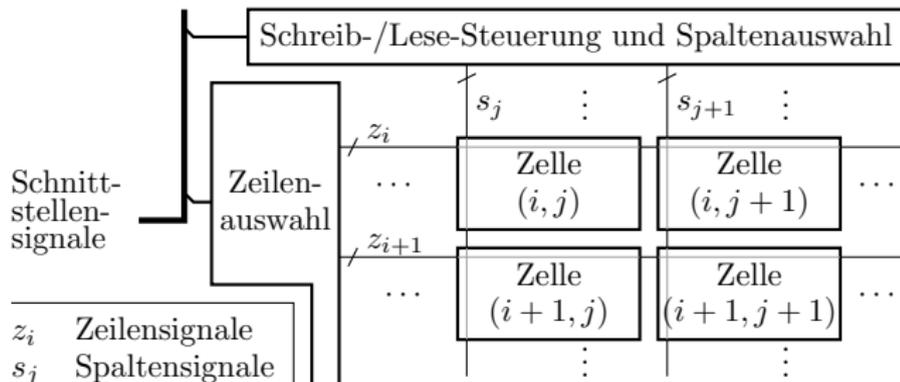
- Einfachnutzung ( $h_i = 1$ ): Sequenz, Nebenläufigkeit, ...
- Mehrfachnutzung ( $h_i \gg 1$ ): Schleifenkörper, Bibliotheksfunktionen, ...
- seltene Nutzung ( $h_i \ll 1$ ): Auswahl, Ausnahmen, Fehlerbehandlung, ...

Ursache der sehr unterschiedlichen Nutzungshäufigkeiten  $h_i$  sind die normalen Ablaufkonstrukte einer Programmiersprache.



Auch in digitalen Schaltungen werden Teil-Service-Leistungen unterschiedlich oft je übergeordneter Service-Auftrag genutzt:

- $h_i = 1$ : Prozessor bei Abarbeitung eines Maschinenbefehls,
- $h_i \gg 1$ : Prozessor bei Abarbeitung eines Programms,
- $h_i \ll 1$ : Speicherzelle bei einem Speicherzugriff, ...



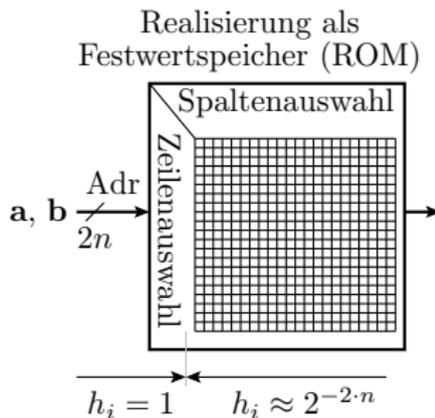
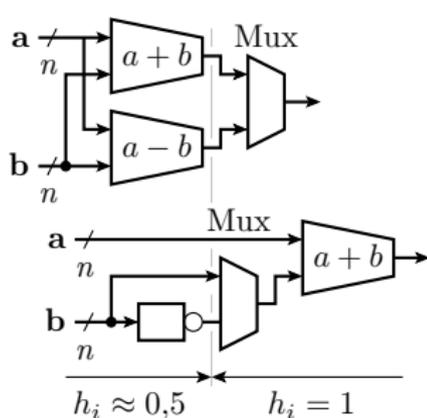
$$h_i \approx \frac{1}{1^{(*)} \dots 2 \cdot A}$$

( $A$  – Anzahl der Adressen;  $(*)$  – Nur-Lese-Speicher).

Schlecht nachweisbar sind die Fehler in den selten genutzten Systembestandteilen:

- in Auswahlfällen, in Ausnahmefällen, ...
- in Zellen großer Blockspeicher.

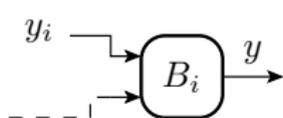
Wie schlecht potentielle Fehler nachweisbar sind, hängt nicht nur von der Zielfunktion, sondern auch erheblich von der Struktur der Realisierung ab:





## Beobachtbarkeit

Die Ergebnisse einer genutzten Teil-Service-Leistung  $y_i$  werden über eine Funktion  $B_i$  auf die Ergebnisse  $y$  der Gesamt-Service-Leistung abgebildet. Die Beobachtbarkeit  $p_{\text{Beob.}i} = b_i$ , dass Verfälschungen von  $y_i$  das Gesamtergebnis  $y$  verfälschen, hängt von der Verfälschung und der Funktion  $B_i$  ab.



$y_i$  Ergebnisse von Teil-Service  $i$   
 $y$  Ergebnis des Gesamtsystems  
 $B_i$  Beobachterfunktion für  $y_i$

Fehlerhafte Ergebnisse einer Teil-Service-Leistung  $i$  sind immer beobachtbar ( $b_i = 1$ ), wenn sie

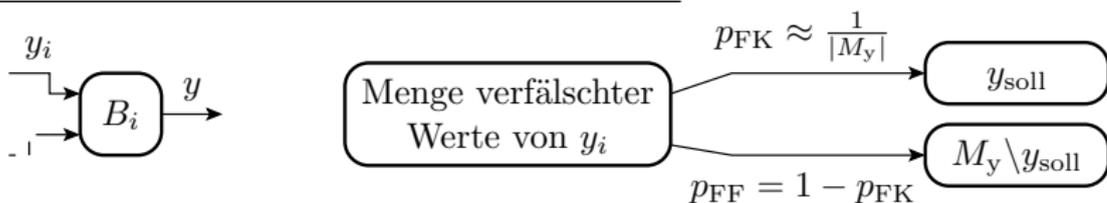
- gleichzeitig Ergebnisse der Gesamt-Service-Leistung sind,
- linear oder
- mit einer umkehrbaren Funktion auf das Gesamtergebnis abgebildet werden.



Bei nicht umkehrbaren Beobachterfunktionen liefert eine Mengenbetrachtung einen ersten Richtwert für die Beobachtbarkeit. Angenommen, der richtige Wert von  $y_i$  und alle Verfälschungen werden gleichwahrscheinlich auf Werte von  $y$  abgebildet. Dann ist die Beobachtbarkeit die Wahrscheinlichkeit, das ein verfälschtes  $y_i$  auf ein falsches  $y$  abgebildet wird:

$$b_i \approx p_{\text{FK}} \approx 1 - \frac{1}{|M_y|}$$

( $|M_y|$  – Anzahl der unterschiedlichen mit  $y$  darstellbaren Werte).



- $p_{\text{FK}}$  Wahrscheinlichkeit der Klassifizierung fehlerhafter Werte als korrekt  
 $p_{\text{FF}}$  Wahrscheinlichkeit der Klassifizierung fehlerhafter Werte als fehlerhaft  
 $M_y$  Menge der mit  $y$  darstellbaren Werte  
 $y_{\text{soll}}$  richtiger Werte für  $y$



Für die Testauswahl und die Verlässlichkeit interessieren die schwer nachweisbaren und im Kontext der Beobachtbarkeit die schwer zu beobachtenden Fehler.

Tendenziell am schlechtesten beobachtbar sind danach Verfälschungen, die von der Beobachterfunktion  $B_i$  auf ein binäres Ergebnis  $|M_y| = 2$  abgebildet werden. Nach Überschlag Beobachtbarkeit  $b_i \approx 0,5$ :

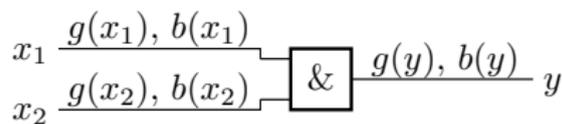
- Berechnung von Verzweigungsbedingungen,
- Digitalisierung,
- ...

Eine logische Weiterverarbeitung kann die Beobachtbarkeit noch erheblich reduzieren.

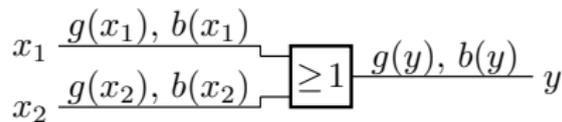


## Beobachtbarkeit bei logischer Weiterverarbeitung

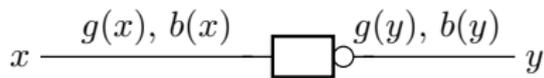
Die Eingabe einer UND-Operation ist beobachtbar, wenn die andere Eingabe eins, bei einer ODER-Operation, wenn die andere Eingabe null ist. Die Auftrittshäufigkeit einer Eins ist die Wichtung  $g$  und einer Null die Gegenwahrscheinlichkeit  $1 - g$ .



$$\begin{aligned} b(x_2) &= b(y) \cdot g(x_1) \\ b(x_1) &= b(y) \cdot g(x_2) \\ g(y) &= g(x_1) \cdot g(x_2) \end{aligned}$$



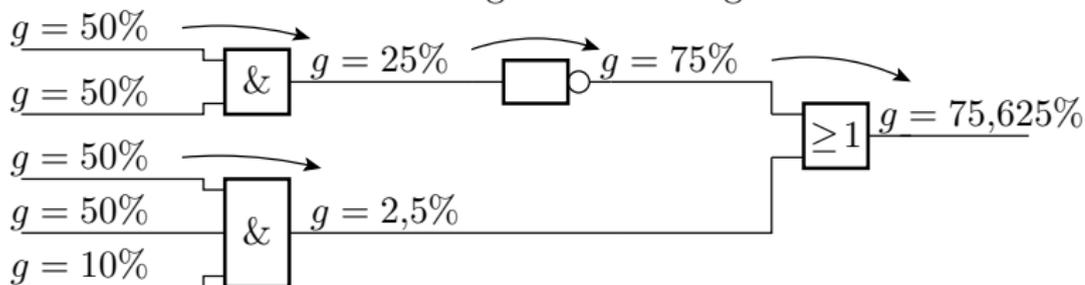
$$\begin{aligned} b(x_1) &= b(y) \cdot (1 - g(x_2)) \\ b(x_2) &= b(y) \cdot (1 - g(x_1)) \\ g(y) &= 1 - (1 - g(x_1)) \cdot (1 - g(x_2)) \end{aligned}$$



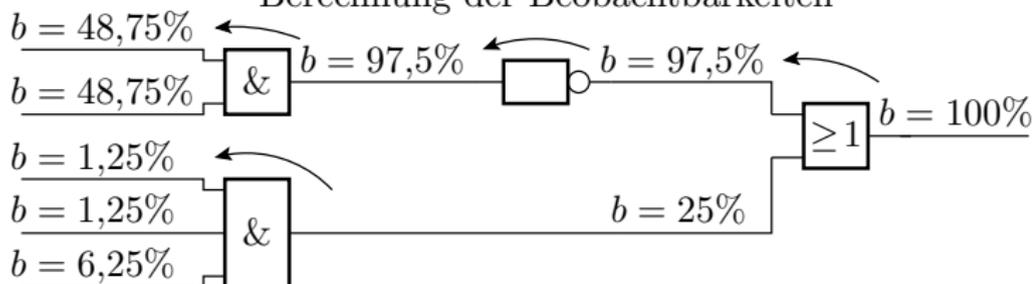
$$\begin{aligned} b(x) &= b(y) \\ g(y) &= (1 - g(x)) \end{aligned}$$

Die Wichtungen werden in und die Beobachtbarkeiten entgegen dem Berechnungsfluss bestimmt.

## Berechnung der Wichtungen



## Berechnung der Beobachtbarkeiten



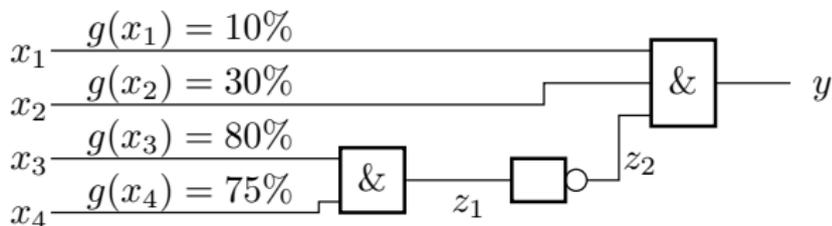
Die Beobachtbarkeit kann sehr kleine Werte annehmen. Wie bei Fehlerbäumen (vergl. F1, Abschn. 2.2) sind rekongergente Auffächerungen problematisch für ihre Berechnung.



## Beispielaufgabe

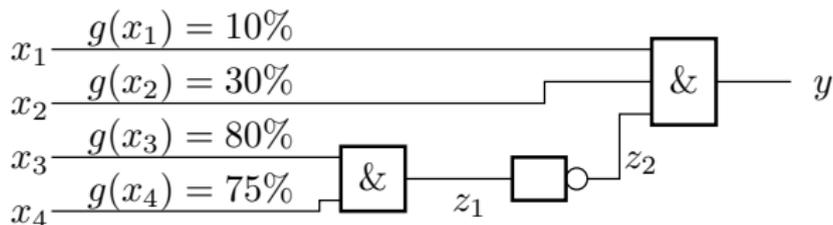


Welche Beobachtbarkeit hat Eingang  $x_1$  mit den vorgegebenen Wichtungen der Bitsignale an den Eingängen?





## Lösung



- $x_1$  ist beobachtbar, wenn  $x_2 = 1$  und  $z_2 = 1$ :

$$b(x_1) = g(x_2) \cdot g(z_2)$$

- $z_2$  ist eins, wenn  $z_1 = 0$ :

$$g(z_2) = 1 - g(z_1)$$

- $z_1$  ist eins, wenn  $x_3 = 1$  und  $x_4 = 1$ :

$$g(z_1) = g(x_3) \cdot g(x_4)$$

$$b(x_1) = g(x_2) \cdot (1 - g(x_3) \cdot g(x_4))$$

$$= 30\% \cdot (1 - 80\% \cdot 75\%) = 12\%$$



## Haftfehlermodell



## Fragen zur Wiederholung



- 1 Was ist ein Modellfehler?
- 2 Wofür werden Modellfehler benötigt?
- 3 Warum lassen sich für diese Aufgabe keine richtigen Fehler verwenden?
- 4 Was ist ein Fehlermodell?



## Antworten

- 1 Ein **Modellfehler** ist ein Beispielfehler mit exakt vorgegebenem Fehlverhalten.
- 2 Modellfehler werden zur Bewertung und/oder Auswahl von Testsätzen benötigt.
- 3 Die richtigen Fehler sind zum Zeitpunkt der Testauswahl nicht bekannt und nach dem Test auch nur in dem Umfang, wie der Test sie nachgewiesen hat.
- 4 Ein **Fehlermodell** ist ein Algorithmus für die Berechnung von Modellfehlermengen für die Suche und Bewertung von Testsätzen.

---

Für weiterführende Betrachtungen der Zusammenhänge zwischen den potenziellen Fehlern, ihren Nachweiswahrscheinlichkeiten und Auftrittshäufigkeiten wird ein Beispielfehlermodell benötigt.



## Das Haftfehlermodell

Für jeden logischen Wert (binäre Signale, Entscheidungen, ...)

Annahme von zwei Modellfehlern:

- Wert ständig null (sa0, stuck-at-0) und
- Wert ständig eins (sa1, stuck-at-1).

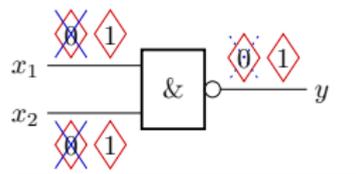
In der Praxis am meisten verbreitetes Fehlermodell.

- Geeignet für die Simulation und Testberechnung für tausende Modellfehler und Testbeispiele in Systemen mit tausenden von logischen Operationen.
- Bei Entwürfen/Software wird zur Minderung der Fehlervielfalt in der Regel eine binarisierte Ebene über die Beschreibung gelegt. Eigentliche Testbewertung/-auswahl rückführbar auf die für Haftfehler.

## Haftfehler für Loggatter

Für jeden Gatteranschluss wird unterstellt:

- ein sa0 (stuck-at-0) Fehler
- ein sa1 (stuck-at-1) Fehler



- ◇ 0 sa0-Modellfehler
- ◇ 1 sa1-Modellfehler
- × identisch nachweisbar
- ⋈ implizit nachweisbar

$x_2$	$x_1$	$\overline{x_2} \wedge \overline{x_1}$	sa0( $x_1$ )	sa1( $x_1$ )	sa0( $x_2$ )	sa1( $x_2$ )	sa0( $y$ )	sa1( $y$ )
0	0	1	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1	0	0	1

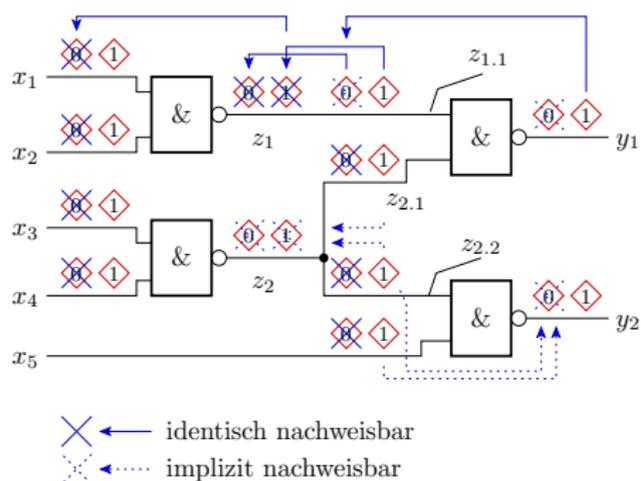
Nachweisidentität (gleiche Nachweismenge)

⋯→ Nachweisimplikation

■ zugehörige Eingabe ist Element der Nachweismenge

Zusammenfassung identisch nachweisbarer Fehler. Optionale Streichung redundanter und implizit nachweisbarer Modellfehler. Modellierte Fehler sind ähnlich wie Transistorfehler in Gattern nachweisbar.

## Streichen identischer und implizit nachweisbarer Fehler



Größe der Anfangsfehlermenge:	24
Anzahl der nicht identisch nachweisbaren Fehler: ohne implizit nachgewiesene Fehler:	14 10

Mengen von identisch nachweisbaren Fehlern	Nachweis impliziert durch
1 sa0(x <sub>1</sub> ), sa0(x <sub>2</sub> ), sal(z <sub>1</sub> ), sal(z <sub>1.1</sub> )	
2 sal(x <sub>1</sub> )	
3 sal(x <sub>2</sub> )	
4 sa0(x <sub>3</sub> ), sa0(x <sub>4</sub> ), sal(z <sub>2</sub> )	9, 12
5 sal(x <sub>3</sub> )	
6 sal(x <sub>4</sub> )	
7 sa0(z <sub>2</sub> )	5, 6, 8, 11
8 sa0(z <sub>1</sub> ), sa0(z <sub>1.1</sub> ), sa0(z <sub>2.1</sub> ), sal(y <sub>1</sub> )	2, 3
9 sal(z <sub>2.1</sub> )	
10 sa0(y <sub>1</sub> )	1, 9
11 sa0(z <sub>2.2</sub> ), sa0(x <sub>5</sub> ), sal(y <sub>2</sub> )	
12 sal(z <sub>2.2</sub> )	
13 sal(x <sub>5</sub> )	
14 sa0(y <sub>2</sub> )	12, 13

## Redundante Fehler

### Definition 4

Ein redundanter (Modell-) Fehler ist ein Fehler in einem Teilsystem, der die Funktion des Gesamtsystems nicht beeinträchtigt.

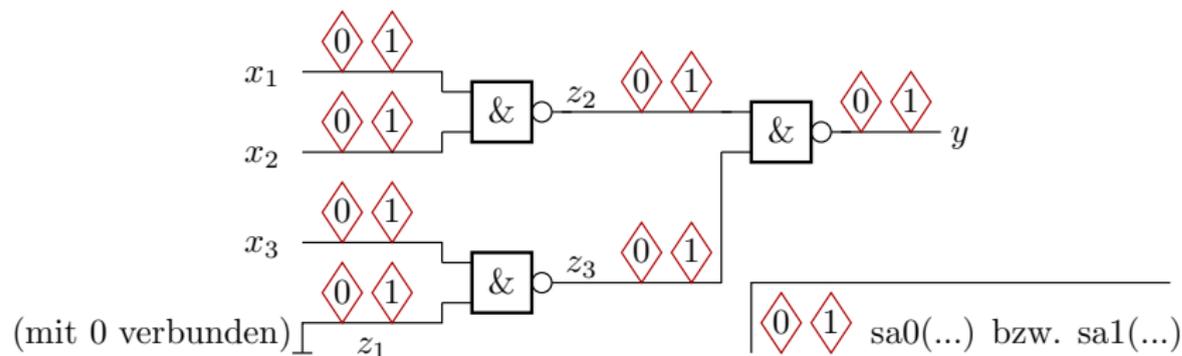
- Der Gatteranschluss kann mit »0« (sa0 Fehler nicht nachweisbar) bzw. »1« (sa1-Fehler nicht nachweisbar) verbunden sein, ohne dass sich die Funktion ändert.
- Umformungen zur Beseitigung redundanter Modellfehler dienen auch zur Systemoptimierung.



## Beispielaufgabe



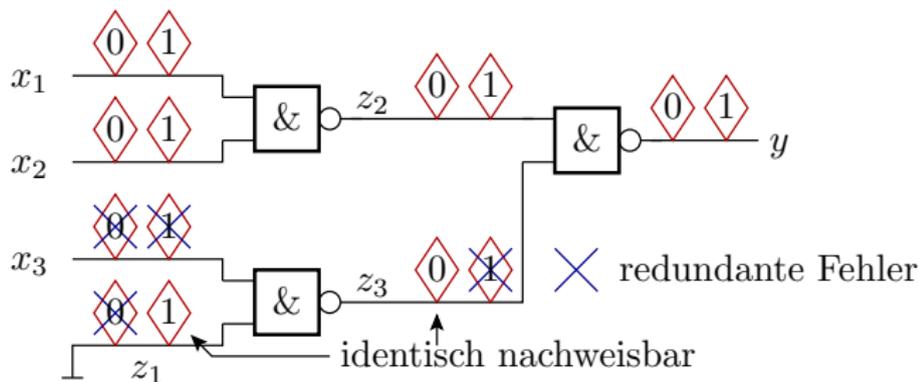
Gegeben ist die nachfolgende Schaltung mit 12 eingezeichneten Haftfehlern.



Welche der Haftfehler sind

- 1** redundant, d.h. mit keiner Eingabebelegung nachweisbar,
- 2** identisch nachweisbar,
- 3** implizit durch die Tests anderer Haftfehler nachweisbar?

## Lösung Aufgabenteil 1

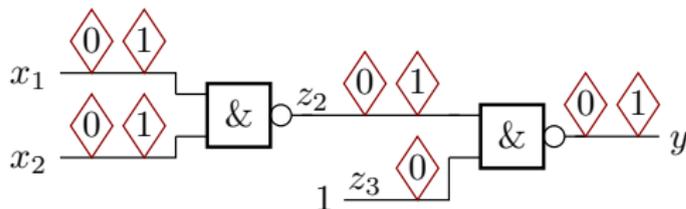


$z_1 = 0$  impliziert, dass

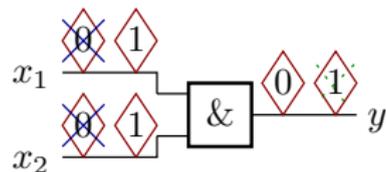
- $sa0(z_1)$  nicht anregbar ist,
- $z_3 = 1$ , so dass  $sa1(z_3)$  nicht anregbar ist und
- dass  $x_3$  nicht beobachtbar ist, so dass  $sa0(x_3)$  und  $sa1(x_3)$  auch redundant sind.

## Lösung Aufgabenteil 2 und 3

### Schaltung ohne redundante Fehler



### Konstantenelimination



- identischer Nachweis
- impliziter Nachweis

$x_2$	$x_1$	$sa0(x_1)$	$sa1(x_1)$	$sa0(x_2)$	$sa1(x_2)$	$sa0(y)$	$sa1(y)$
0	0	—	—	—	—	—	+
0	1	—	—	—	+	—	+
1	0	—	+	—	—	—	+
1	1	+	—	+	—	+	—

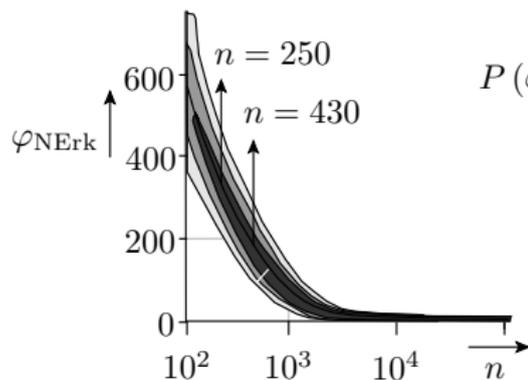


Die Fehlermenge ohne redundante, identisch und implizit nachweisbare Haftfehler umfasst  $sa1(x_1)$ ,  $sa1(x_2)$  und  $sa0(y)$ .

## Ein Experiment mit Haftfehlern

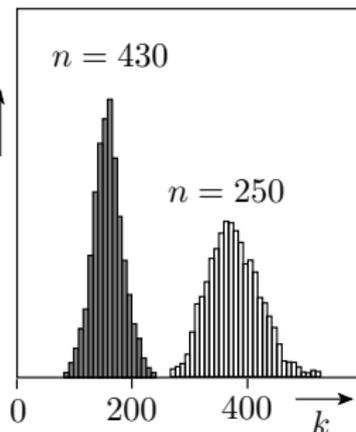
Zählexperiment. Kombinatorische Beispielschaltung (Benchmark c3540). Betrachtete Fehler sind 3606 simulierte, unterschiedlich nachweisbare Haftfehler. Die Verteilung wurde durch Simulation mit 1000 verschiedenen Zufallstestsätzen bestimmt.

Verteilung der Anzahl der nicht erkannten Modellfehler als Funktion von  $n$  (Benchmark c3540, 3606 Haftfehler)



$$P(\varphi_{\text{NErk}} = k)$$

Verteilung für zwei Testsatzlängen





Das Experiment zeigt beispielhaft,

- für welche Art von Untersuchungen Fehlermodelle gebraucht werden,
- dass die meisten Fehlermöglichkeiten gut (mit wenigen Zufallstests) nachweisbar sind,
- es aber auch Fehlermöglichkeiten gibt, deren Nachweis sehr lange Testsätze verlangt.

Die experimentellen Ergebnisse (Verteilung, Streuung etc.) werden später noch genauer ausgewertet.



# Komplexe Funktionen

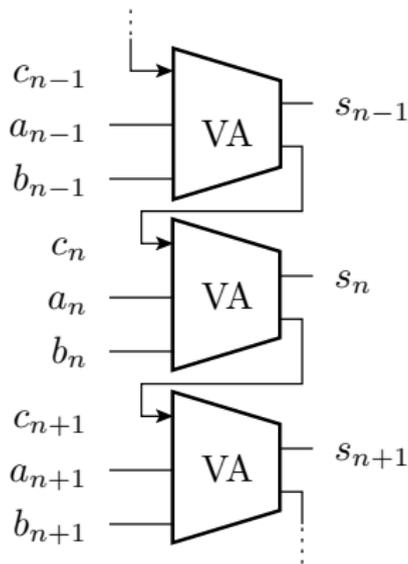


## Fehler in komplexen Funktionen

- Die Anzahl der Care-Bits einer komplexen Funktion ist im ungünstigsten Fall die Anzahl der Eingabebits plus die Anzahl der gespeicherten Bits. Hunderte Care-Bits  $\Rightarrow p_i \geq 2^{-100}$  ...
- Die unteren Grenzen für Nachweiswahrscheinlichkeiten sind so gering, dass es Fehler geben kann, die in Millionen Jahren praktisch nie eine Fehlfunktion verursachen.
- Aber auch hier lässt sich vielfach aus der Struktur auf im Mittel viel häufigere Fehlfunktionen bzw. viel größere Nachweiswahrscheinlichkeiten schließen.

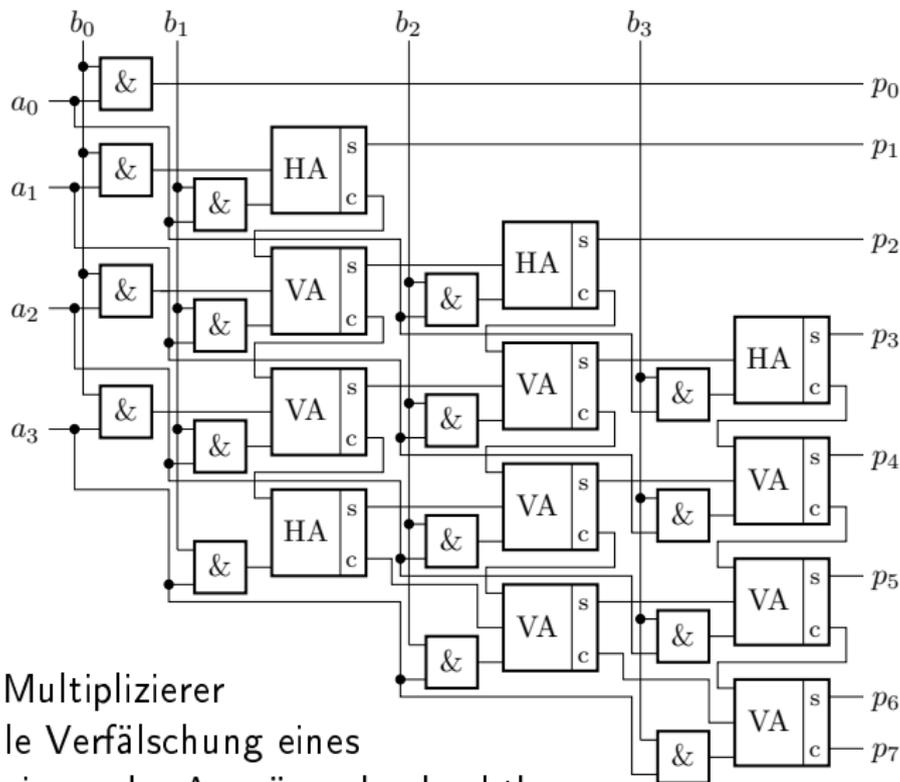
## Beispiel Ripple-Addierer

- Jede Addition von zwei Datenworten nutzt jeden der Volladdierer.
- Fehlerhafte Ausgaben am Summenbit sind direkt beobachtbar.
- Fehlerhafte Überträge invertieren das nächst höhere Summenbit.



Beobachtbarkeit der Service-Leistungen der einzelnen Volladdierer ist eins, die Nachweiswahrscheinlichkeit von Haftfehlern auf den Verbindungen ist etwa 50%, ein Volladdierer hat drei Care-Bits, ...  $p_{\min} \approx 2^{-4 \dots 6}$  und nicht wie bei einer Tabellenrealisierung mit  $p_{\min} \approx 2^{2 \cdot n + 1 \dots 2}$ .

## Multiplizierer



Auch bei einem Multiplizierer ist fast jede lokale Verfälschung eines Signalwertes an einem der Ausgänge beobachtbar.



## Programmbausteine

Selbst kleine Programme verarbeiten Informationen aus so vielen Bits, dass eine Kontrolle mit allen Eingabewerten undenkbar ist. Nach aktuellen Standards gilt als ausreichender Test:

- mindestens jede Anweisung einmal auszuführen (nicht sicherheitskritische Funktionen),
- mindestens jeden Zweig einer Fallunterscheidung einmal auszuführen (nach RTCA DO-178A ab Software, die bedeutende Ausfälle verursachen kann, gefordert), ...

Dass der einmalige Test jeder Anweisung, jedes Zweiges, ... als ausreichend betrachtet wird<sup>2</sup>, deutet auf bedingte Wahrscheinlichkeiten für den Fehlernachweis bei Anweisungsausführung nahe eins.

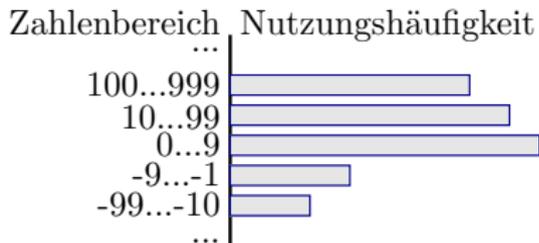
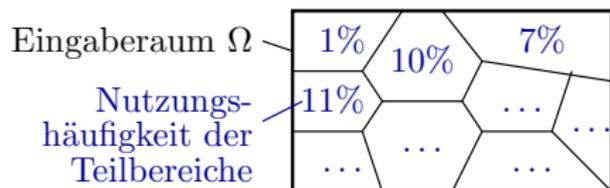
<sup>2</sup>Es könnten sich in Zukunft auch für Software strengere Vollständigkeitskriterien durchsetzen, z.B. die Forderung, jede Anweisung während des Test mehrfach auszuführen.



# Operationsprofil

## Operationsprofil

Der Eingaberaum für einen Service ist in der Regel in Teilbereiche unterteilt, die unterschiedlich häufig genutzt werden. Beispielsweise werden kleine Zahlenwerte häufiger als große und positive häufiger als negative genutzt.

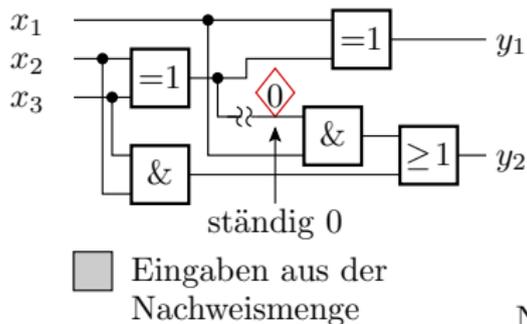


Bei einem menügesteuerten Programm werden die einzelnen Menüeinträge unterschiedlich oft ausgewählt.

Operation	Nutzungshäufigkeit
editieren	35%
löschen	12%
browse	46%
drucken	7%

## Operationsprofil und Fehlernachweis

In der Beispielschaltung ist die Verbindung zu einem Gattereingang unterbrochen, der dadurch ständig null führt. Nachweis mit zwei der acht Bedatungsmöglichkeiten. Nachweiswahrscheinlichkeit gleich Summe der Auftrittshäufigkeiten beider Bedatungen aus  $M_i$ :



Eingabe			Ausgabe		Auftrittshäufigkeit	
$x_3$	$x_2$	$x_1$	$y_2$	$y_1$		
0	0	0	0	0	0,1	0,1
0	0	1	0	1	0,05	0,1
0	1	0	0	1	0,15	0,2
0	1	1	1	0	0,2	0,05
1	0	0	0	1	0,05	0,2
1	0	1	1	0	0,2	0,05
1	1	0	1	0	0,05	0,2
1	1	1	1	1	0,2	0,1

Nachweiswahrscheinlichkeit: 0,4    0,1

Erheblicher Einfluss auf die Fehlernachweiswahrscheinlichkeiten.



## Gewichteter Zufallstest

Ein einfach zu beschreibendes/erzeugendes Operationsprofil für digitale Schaltungen ist die bitweise Wichtung:

- Auftrittswahrscheinlichkeit für Bitwert »1«

$$P(x_i = 1) = g(x_i)$$

- Auftrittswahrscheinlichkeit für Bitwert »0«

$$P(x_i = 0) = 1 - g(x_i)$$

( $g_i$  – Wichtung).

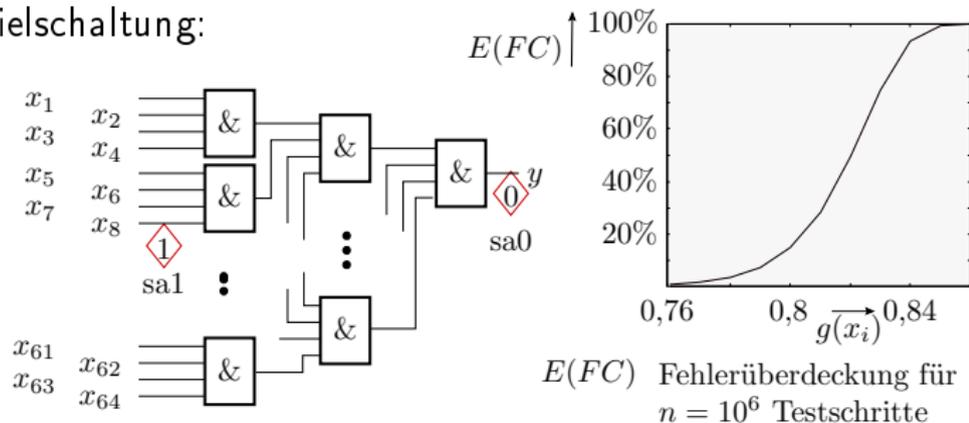
- Auftrittswahrscheinlichkeit Eingabewert  $\mathbf{x}$

$$P(\mathbf{x}) = \prod_{i=0}^{m-1} \begin{cases} g(x_i) & \text{wenn } x_i = 1 \\ 1 - g(x_i) & \text{wenn } x_i = 0 \end{cases}$$

( $m$  – Bitanzahl).



Beispielschaltung:



Angenommene Fehler: Für je einen der 64 Eingänge ständig 1:

$$p_{sa1} = g^{63} \cdot (1 - g)$$

Für den Ausgang ständig 0:

$$p_{sa0} = g^{64}$$

Eine Wichtung von 86% verringert die erforderliche Testsatzlänge für den Nachweis aller angenommenen Fehler von  $n \approx 2^{67}$  (64 Care-Bits) auf  $n \approx 10^6$ .



## Fehlernachweis und Fehlfunktionen

Das Operationsprofil hat erheblichen Einfluss auf die Fehlernachweiswahrscheinlichkeiten und die Häufigkeit der Fehlfunktionen, die jeder Fehler verursacht.

Schlecht nachweisbare Fehler lassen sich außer durch gezielt berechnete Tests auch durch gezielte Auswahl des Operationsprofils abdecken.

Software sollte u.a. auch immer mit dem Operationsprofil »inkompetenter Nutzer« getestet werden.

Bei gleichem Operationsprofil für Test und Anwendung lässt sich aus dem Testaufwand auf die Zuverlässigkeit im späteren Einsatz schließen.

## Beispielaufgabe

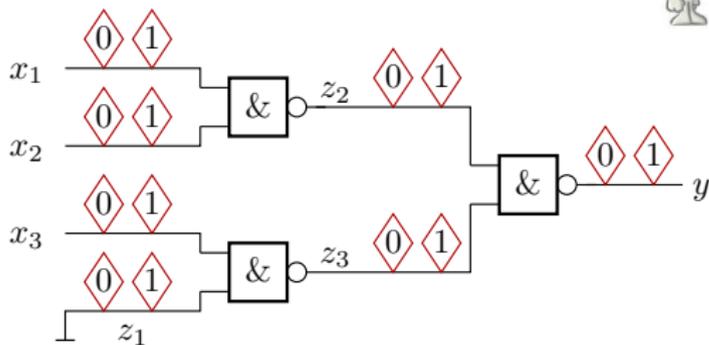


Für die bereits in der Aufgabe zuvor behandelte Schaltung ist nach Streichung aller redundanten und aller

identisch nachweisbaren Fehler die zu erwartende Fehlerüberdeckung<sup>3</sup> für  $n = 1$  und 10 Testschritte für

- 1 einen ungewichteten (UG) Zufallstest  $g(x_i) = 50\%$  und
- 2 einen mit  $g(x_1) = g(x_3) = 30\%$  und  $g(x_2) = 75\%$  gewichteten (G) Zufallstest.

zu berechnen.



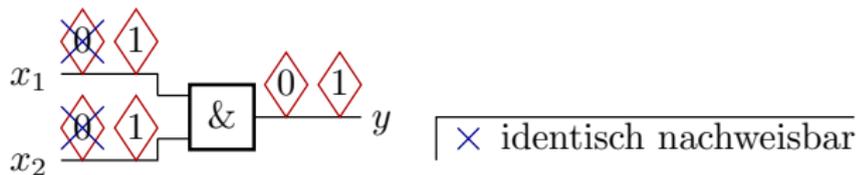
<sup>3</sup>Mittelwert aller Fehlernachweiswahrscheinlichkeiten.

## Lösung

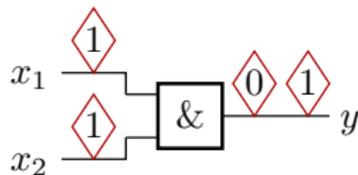
Die Schaltung lässt sich durch Konstantenelimination zu einem UND-Gatter vereinfachen:

$$y = \overline{\overline{x_1 \wedge x_2} \wedge \overline{x_3 \wedge 0}} = x_1 \wedge x_2$$

an dem die drei sa0-Fehler identisch nachweisbar sind.



Für die verbleibenden vier Haftfehler werden auf der Folgefolie die Nachweiswahrscheinlichkeiten mit einer Tabelle bestimmt, die den vier möglichen Eingaben die Auftrittshäufigkeit und für jeden Fehler die Nachweisbarkeit zuordnet.



$x_2$	$x_1$	UG	G	sa1( $x_1$ )	sa1( $x_2$ )	sa0( $y$ )	sa1( $y$ )
0	0	25%	17,5%	–	–	–	+
0	1	25%	7,5%	–	+	–	+
1	0	25%	52,5%	+	–	–	+
1	1	25%	22,5%	–	–	+	–
Fehler				sa1( $x_1$ )	sa1( $x_2$ )	sa0( $y$ )	sa1( $y$ )
$p_{UG}$				25%	25%	25%	75%
$p_G$				52,5%	7,5%	22,5%	77,5%

( $p_{UG}$ ,  $p_G$  – Nachweiswahrscheinlichkeit je Testschritt für ungewichtete bzw. mit  $g(x_1) = 30\%$  und  $g(x_2) = 75\%$  gewichtete Eingaben).



- Fehlerüberdeckung für  $n = 1$  Testschritt:

Fehler	sa1( $x_1$ )	sa1( $x_2$ )	sa0( $y$ )	sa1( $y$ )	$E(FC) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^4 p_{...}$
$p_{UG}$	25%	25%	25%	75%	37,5%
$p_G$	52,5%	7,5%	22,5%	77,5%	40%

- Fehlerüberdeckung für  $n = 10$  Testschritte:

$$p_{...}(10) = 1 - (1 - p_{...}(1))^{10}$$

Fehler	sa1( $x_1$ )	sa1( $x_2$ )	sa0( $y$ )	sa1( $y$ )	$E(FC) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^4 p_{...}$
$p_{UG}$	94,4%	94,4%	94,4%	100%	95,8%
$p_G$	99,9%	54,1%	92,2%	100%	86,6%

Für kurze Testsätze verbessert und für lange Testsätze verschlechtert die Wichtung die zu erwartende Fehlerüberdeckung  $E(FC)$ .



# Verteilungen



### Verteilung

Eine Verteilung weist möglichen Werten einer Zufallsvariablen Werte zu:

- Häufigkeitsverteilungen: Zählwerte, Umfragewerte, ...
- Wahrscheinlichkeitsverteilungen: Wahrscheinlichkeiten.

Häufigkeitsverteilungen werden empirisch erfasst. Mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen lassen sich Häufigkeitsverteilungen annähern, vorhersagen, auf ähnliche Sachverhalte übertragen, ...

---

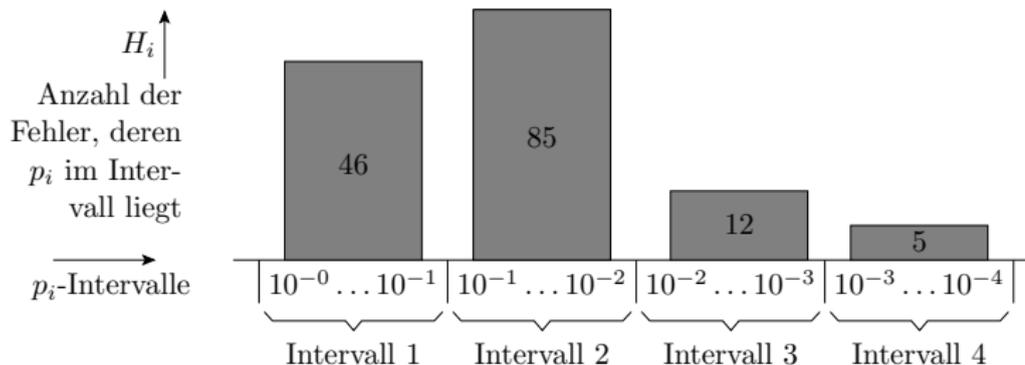
Lernziele des Abschnitts:

- Untersuchung der Verteilungen von Zählgrößen (Anzahl der Fehler, Fehlfunktionen, ...)
- Bereichsschätzungen für Eintrittswahrscheinlichkeiten (z.B. für die Fehlerentstehung, Fehlererkennung, ...)
- Worst-Case-Abschätzungen für seltene Ereignisse.

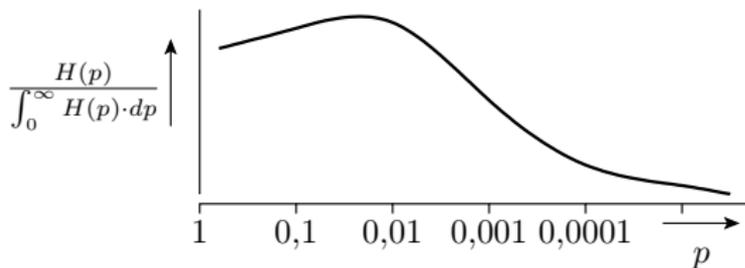


## 2. Verteilungen

- Beispiel Häufigkeitsverteilung: Anzahl der Fehler mit einer Nachweiswahrscheinlichkeit in einem bestimmten Intervall:



- Wahrscheinlichkeitsverteilung, dass ein Fehler eine Nachweiswahrscheinlichkeit  $p$  besitzt:





# Erwartungswert, Varianz, ...



## Wahrscheinlichkeitsverteilung, Erwartungswert

Bei einer Wahrscheinlichkeitsverteilung sind die möglichen Ergebnisse<sup>4</sup> ein Zahlenbereich (abzählbar oder stetig). Jedem Wert dieses Bereiches ist eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet.

mögliche Ergebnisse $x_i$	2	3	4	5	6	Summe
Wahrscheinlichkeit $p_i$	4%	12%	29%	37%	18%	100%

Der **Erwartungswert**  $E(X)$  ( $X$  – Zufallsgröße) ist der mit ihren Auftretenswahrscheinlichkeiten gewichtete Mittelwert:

$$E(X) = \sum_{i=1}^N p_i \cdot x_i \quad (2)$$

( $N$  – Anzahl der möglichen Ergebnisse). Für das Beispiel:

$$2 \cdot 4\% + 3 \cdot 12\% + 4 \cdot 29\% + 5 \cdot 37\% + 6 \cdot 18\% = 4,53$$

<sup>4</sup>Die möglichen Ergebnisse werden als Realisierungen bezeichnet.



## Varianz und Standardabweichung

Die **Varianz**  $D^2(X)$  ist die mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert:

$$D^2(X) = \sum_{i=1}^N p_i \cdot (x_i - E(X))^2 \quad (3)$$

Die **Standardabweichung**  $\sqrt{D^2(X)}$  ist die Wurzel aus der Varianz und ein Maß dafür, wie stark die Ergebnisse eines Zufallsexperiments um ihren Erwartungswert streuen.

mögliche Ergebnisse $x_i$	2	3	4	5	6	Summe
Wahrscheinlichkeit $p_i$	4%	12%	29%	37%	18%	100%

$$\begin{aligned} D^2(X) &= 4\% \cdot (2 - 4,53)^2 + 12\% \cdot (3 - 4,53)^2 + 29\% \cdot (4 - 4,53)^2 \\ &+ 37\% \cdot (5 - 4,53)^2 + 18\% \cdot (6 - 4,53)^2 = 1,09 \end{aligned}$$

$$\sqrt{D^2(X)} = 1,04$$



## Verschiebungssatz

Die Varianz ist gleichfalls die Differenz aus dem Erwartungswert der Quadrate und dem Quadrat des Erwartungswertes<sup>5</sup>:

$$D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \quad (4)$$

Herleitung:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N p_i \cdot (x_i - E(X))^2 &= \sum_{i=1}^N p_i \cdot (x_i^2 - 2 \cdot x_i \cdot E(X) + E(X)^2) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^N p_i \cdot x_i^2}_{E(X^2)} + E(X) \cdot \left( E(X) \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^N p_i}_1 - 2 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^N p_i \cdot x_i}_{E(X)} \right) \end{aligned}$$

Für das Beispiel zuvor:

$$D^2(X) = 4\% \cdot 2^2 + 12\% \cdot 3^2 + 29\% \cdot 4^2 + 37\% \cdot 5^2 + 18\% \cdot 6^2 - 4,53^2 = 1,09$$

<sup>5</sup>Bei begrenzter Rechengenauigkeit u.U. numerisch problematisch.



## Ein weiteres Beispiel

Gegeben ist die Verteilung in der nachfolgenden Tabelle:

Wert	5	6	8	11	22
Wahrscheinlichkeit	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Wie groß sind

- 1 der Erwartungswert,
- 2 die Varianz und
- 3 die Standardabweichung?



## Lösung

Wert	5	6	8	11	22
Wahrscheinlichkeit	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

1 Erwartungswert:

$$E(X) = 0,1 \cdot 5 + 0,2 \cdot 6 + 0,4 \cdot 8 + 0,2 \cdot 11 + 0,1 \cdot 22 = 9,3$$

2 Varianz nach Gleichung 3:

$$\begin{aligned} D^2(X) &= 0,1 \cdot (5 - 9,3)^2 + 0,2 \cdot (6 - 9,3)^2 + 0,4 \cdot (8 - 9,3)^2 \\ &+ 0,2 \cdot (11 - 9,3)^2 + 0,1 \cdot (22 - 9,3)^2 = 21,4 \end{aligned}$$

Varianz nach dem Verschiebungssatz:

$$\begin{aligned} D^2(X) &= 0,1 \cdot 5^2 + 0,2 \cdot 6^2 + 0,4 \cdot 8^2 + 0,2 \cdot 11^2 \\ &+ 0,1 \cdot 22^2 - 9,3^2 = 21,4 \end{aligned}$$

3 Standardabweichung:  $\sqrt{D^2(X)} = \sqrt{21,4} = 4,63$



## Erwartungswert und Varianz einer Datenstichprobe

Für eine Datenstichprobe einer Zufallsgröße  $X$

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_{N_S})$$

ist der Schätzer für den Erwartungswert der Mittelwert:

$$E_S(X) = \frac{1}{N_S} \cdot \sum_{i=1}^{N_S} w_i \quad (5)$$

---

Der Schätzer für die Varianz ist die mittlere quadratische Abweichung vom geschätzten Mittelwert:

$$D_S^2(X) = \frac{1}{N_S - 1} \cdot \sum_{i=1}^{N_S} (w_i - E(X))^2 \quad (6)$$

Der Quotient ist um eins kleiner als die Stichprobengröße  $N_S$ , d.h die Abschätzung der Varianz erfordert mindestens Stichprobengröße  $N_S = 2$ .



# Lineare Transformationen, ...



## Lineare Transformation

Lineare Transformationen sind die Multiplikation und Addition einer Zufallsgröße mit reellen Zahlen. Der Erwartungswert vergrößert und verschiebt sich um dieselben Werte:

$$E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$$

Bei der Varianz entfällt die Verschiebung und der Skalierungsfaktor geht im Quadrat ein<sup>6</sup>:

$$D^2(a \cdot X + b) = a^2 \cdot D^2(X) \quad (7)$$

Die Varianz ist insbesondere verschiebungsinvariant und bleibt bei einer Spiegelung der Verteilung gleich:

$$D^2(-X) = (-1)^2 \cdot D^2(X) = D^2(X)$$

---

<sup>6</sup>Die Kontrolle der Gleichung ist eine Übungsaufgabe.



## Kontrolle am Beispiel

Realisierungen $x$ von $X$	1	2	3
Realisierungen $y$ von $Y = 5 - 2X$	3	1	-1
$P(Y = y) = P(X = x)$	0,3	0,5	0,2

$$E(X) = 0,3 + 1 + 0,6 = 1,9$$

$$D^2(X) = 0,3 + 2 + 1,8 - 1,9^2 = 0,49$$

$$E(Y) = 0,9 + 0,5 - 0,2 = 1,2$$

$$D^2(Y) = 2,7 + 0,5 + 0,2 - 1,2^2 = 1,96$$

$$E(Y) = 5 - 2 \cdot E(X)$$

$$D^2(Y) = (-2)^2 \cdot D^2(X)$$



## Summe von Zufallsgrößen

Die Verteilung der Summe von Zufallsgrößen ordnet jedem der möglichen Werte der Summe die Wahrscheinlichkeit zu, dass die Summe diesen Wert hat:

$x$	1	3	4	$y$	2	3	4
$P(X = x)$	0,1	0,4	0,5	$P(Y = y)$	0,3	0,6	0,1

$$P(X + Y = 3) = P(X = 1) \cdot P(Y = 2)$$

$$P(X + Y = 4) = P(X = 1) \cdot P(Y = 3)$$

$$P(X + Y = 5) = P(X = 1) \cdot P(Y = 4) + P(X = 3) \cdot P(Y = 2)$$

$$P(X + Y = 6) = P(X = 3) \cdot P(Y = 3) + P(X = 4) \cdot P(Y = 2)$$

$$P(X + Y = 7) = P(X = 3) \cdot P(Y = 4) + P(X = 4) \cdot P(Y = 3)$$

$$P(X + Y = 8) = P(X = 4) \cdot P(Y = 4)$$



Für die Summe von Zufallsgrößen ist der Erwartungswert gleich der Summe der Erwartungswerte:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Die Varianz ist die Summe der Varianzen plus doppelte Kovarianz:

$$D^2(X + Y) = D^2(X) + D^2(Y) + 2 \cdot \text{Cov}(X, Y) \quad (8)$$

mit der Kovarianz<sup>7</sup>:

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))) \quad (9)$$

Für unabhängige Zufallsgrößen ist die Kovarianz null und die Varianz die Summe der Varianzen der Summanden:

$$D^2(X + Y) = D^2(X) + D^2(Y)$$

---

<sup>7</sup>Die Kontrolle der Gleichungen sind Übungsaufgaben.

## Gemessener Wert und Messfehler

In der Messtechnik gilt für jeden gemessenen Wert:

$$X_M = X + X_F$$

( $X$  – Messwert;  $X_F$  – Messfehler). Alle drei Größen haben einen Erwartungswert und eine Varianz. Mit dem Messwert und dem Messfehler als unabhängige Zufallsgrößen, gilt für diese:

$$E(X_M) = E(X_F) + E(X)$$

$$D^2(X_M) = D^2(X_F) + D^2(X)$$

- $E(X_F)$  – Maß für den systematischen Messfehler
- $\sqrt{D^2(X_F)}$  – Standardabweichung und Maß für den zufälligen Messfehler.

## Beispielaufgabe



Der gemessene Wert einer Widerstands-Charge ist im Mittel  $E(R_M) = 1010 \Omega$  und hat eine Standardabweichung von  $\sqrt{D^2(R_M)} = 11,18 \Omega$ . Die Messung habe einen systematischen Fehler von  $E(R_F) = 12 \Omega$  und eine Standardabweichung von  $\sqrt{D^2(R_F)} = 5 \Omega$ . Welchen Erwartungswert und welche Standardabweichung hat der (tatsächliche) Messwert?

---

$$E(R) = E(R_M) - E(R_F) = 1010 \Omega - 12 \Omega = 998 \Omega$$

$$D^2(R) = D^2(R_M) - D^2(R_F) = (11,18 \Omega)^2 - (5 \Omega)^2 = 100 \Omega^2$$

$$\sqrt{D^2(R)} = 10 \Omega$$

Der (tatsächliche) Messwert hat eine kleinere Standardabweichung als der gemessene Wert.



## Verteilung von Zählwerten



## Verteilung von Zählwerten

Zählwerte sind eine Summe von Einzelereignissen (z.B. Anzahl der korrekt ausgeführten oder fehlerhaft ausgeführten Service-Leistungen). Die Einzelereignisse können null oder eins sein und haben eine Bernoulli-Verteilung:

$k$	0	1
$P(X_i = k)$	$1 - p_i$	$p_i$

( $X_i$  – Zufallsgröße Einzelereignis  $i$ ;  $p_i$  – Eintrittswahrscheinlichkeit  $X_i = 1$ ). Für  $N$  zu zählende Versuchsergebnisse ist die Anzahl der eingetretenen Ereignisse die Summe der Zufallsgrößen  $X_i$ :

$$X = \sum_{i=1}^N X_i$$



Der Erwartungswert der Einzelereignisse ist

$k$	0	1
$P(X_i = k)$	$1 - p_i$	$p_i$

$$E(X_i) = (1 - p_i) \cdot 0 + p_i \cdot 1 = p_i$$

Varianz nach Verschiebungssatz:

$$D^2(X_i) = (1 - p_i) \cdot 0^2 + p_i \cdot 1^2 - p_i^2 = p_i \cdot (1 - p_i)$$

Der Erwartungswert der Summe ist die Summe der Erwartungswerte

$$E(X) = \sum_{i=1}^N p_i \quad (10)$$

Für die Varianz wird oft unterstellt, dass die zu zählenden Ereignisse, wie das Auftreten unterschiedlicher Fehlfunktion, nicht voneinander abhängen (Varianz der Summe gleich der Summe der Varianzen der Summanden, Kovarianz null):

$$D^2(X) = \sum_{i=1}^N p_i \cdot (1 - p_i) \quad (11)$$



Für die Verteilung gilt, dass bei Hinzunahme eines weiteren Experiments  $i$  sich mit Wahrscheinlichkeit  $p_i$  der Zählwert um eins erhöht und mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - p_i$  gleich bleibt:

$$P_i(X = k) = p_i \cdot P_{i-1}(X = k - 1) + (1 - p_i) \cdot P_{i-1}(X = k)$$

Berechnung der Verteilung:

$i$	$p_i$	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$
1	30%	70%	30%			
2	50%	35%	50%	15%		
3	40%	21%	44%	29%	6%	
4	10%	18,9%	41,7%	30,5%	8,3%	0,6%

$$P_1(X = 0) = 1 - p_1$$

$$P_1(X = 1) = p_1$$

Wiederhole für  $i = 2$  bis  $N$

$$P_i(X = 0) = P_{i-1}(X = 0) \cdot (1 - p_i)$$

$$P_i(X = i) = P_{i-1}(X = i - 1) \cdot p_i$$

Wiederhole für  $k = 1$  bis  $i - 1$

$$P_i(X = k) = P_{i-1}(X = k) \cdot (1 - p_i) + P_{i-1}(X = k - 1) \cdot p_i$$

( $i$  – Anzahl der berücksichtigten Summanden;  $k$  – Zählwert).



## Erwartungswert und Varianz für das Beispiel

Nach Gl. 2 beträgt der Erwartungswert der Summe aller

$N = 4$  Summanden:

$$E(X) = 18,9\% \cdot 0 + 41,7\% \cdot 1 + 30,5\% \cdot 2 + 8,3\% \cdot 3 + 0,6\% \cdot 4 = 1,3$$

$i$	$p_i$	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$
1	30%	70%	30%			
2	50%	35%	50%	15%		
3	40%	21%	44%	29%	6%	
4	10%	18,9%	41,7%	30,5%	8,3%	0,6%

Als Summe aller  $p_i$  nach Gl. 10 ist die Berechnung kürzer:

$$E(X) = 30\% + 50\% + 40\% + 10\% = 1,3$$

Die Varianz beträgt nach dem Verschiebungssatz Gl. 4:

$$18,9\% \cdot 0^2 + 41,7\% \cdot 1^2 + 30,5\% \cdot 2^2 + 8,3\% \cdot 3^2 + 0,6\% \cdot 4^2 - 1,3^2 = 0,79$$

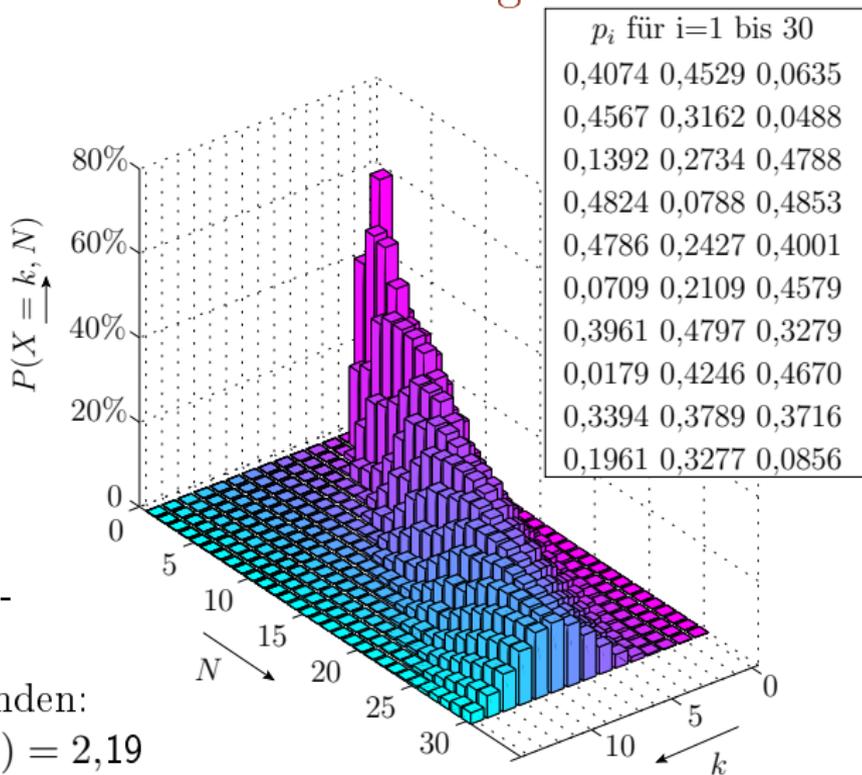
Die vereinfachte Berechnung nach Gl. 11 lautet:

$$D^2(X) = 0,3 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 0,9 = 0,79$$



## Mit Matlab berechnete Zählverteilung

Das nachfolgende Säulendiagramm zeigt eine mit Matlab schrittweise berechnete Zählverteilung. Die Eintrittswahrscheinlichkeiten der Zählereignisse siehe Kasten im Bild. Erwartungswert und Varianz für alle 30 Summanden:  
 $E(X)=7,05$ ,  $D^2(X) = 2,19$





# Binomialverteilung



## Binomialverteilung

Für den Sonderfall, dass gleichwahrscheinliche Ereignisse gezählt werden (alle  $p_i = p$ ), ist die Summe der gezählten Ereignisse binomialverteilt

$$P(X = k) = \binom{N}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{N-k} \quad (12)$$

mit dem Erwartungswert

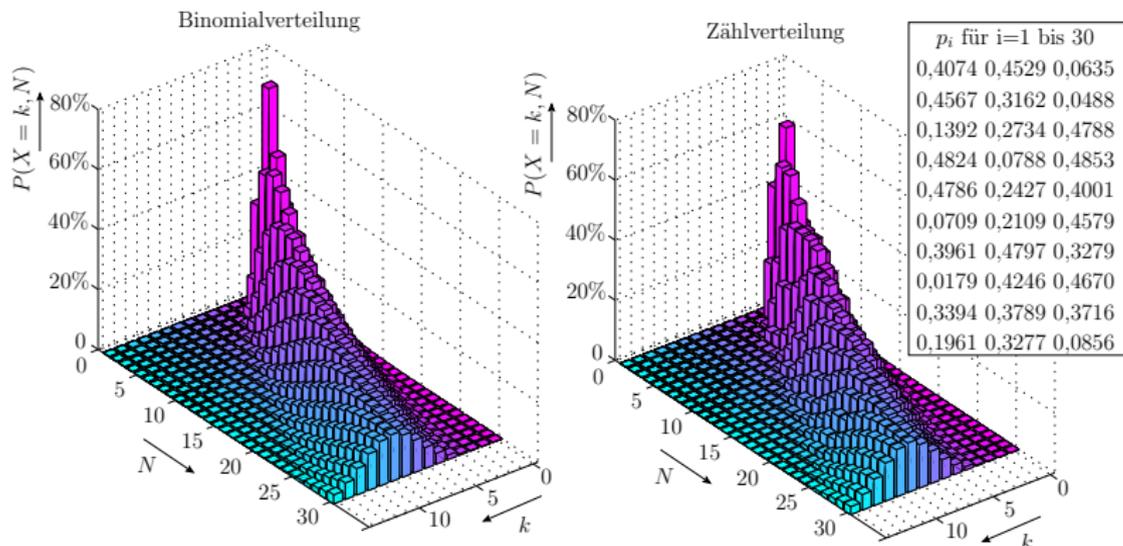
$$E(X) = N \cdot p$$

und der Varianz

$$D^2(X) = N \cdot p \cdot (1 - p) \quad (13)$$

( $N$  – Anzahl der gezählten Ereignisse, die 0 oder 1 sein können).

## Binomialverteilung vs. allgemeine Zählverteilung



Eine Binomialverteilung mit  $p = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N p_i$  und demselben  $N$  nähert eine Zählverteilung gut an und berechnet sich aus nur den zwei Parametern  $N$  und  $p$  und hat eine etwas kleinere Standardabweichung.

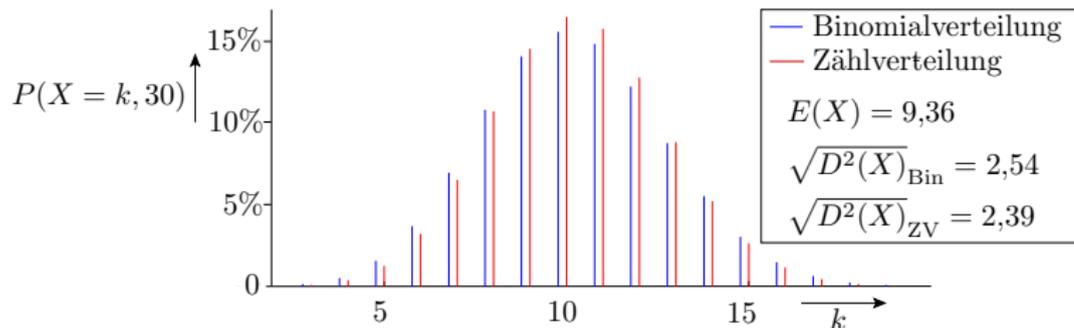


## Satz 5

Bei gleicher Anzahl von unabhängigen Zählwerten  $N$  und  $p = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N p_i$  ist die Varianz der Binomialverteilung eine obere Schranke der Varianz einer Zählverteilung:

$$D^2(X)_{\text{Bin}} = N \cdot p \cdot (1 - p) \geq D^2(X)_{\text{ZV}} = \sum_{i=1}^N p_i \cdot (1 - p_i) \quad (14)$$

Für die beiden Verteilungen der Folie zuvor gilt für  $N = 30$ :





## Beweis Satz 5

Ersatz der individuellen Auftrittswahrscheinlichkeiten der zu zählenden Ereignisse durch die mittlere Wahrscheinlichkeit und eine Differenz, die im Mittel null ist:

$$p_i = p + \delta_i \text{ mit } \sum_{i=1}^N \delta_i = 0$$

Varianz der Zählverteilung:

$$\begin{aligned} D^2(X)_{ZV} &= \sum_{i=1}^N (p + \delta_i) \cdot (1 - p - \delta_i) \\ &= \underbrace{N \cdot p \cdot (1 - p)}_{D^2(X)_{\text{Bin}}} - (1 - 2p) \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^N \delta_i}_0 - \underbrace{\sum_{i=1}^N \delta_i^2}_{\geq 0} \end{aligned}$$

$$D^2(X)_{ZV} \leq D^2(X)_{\text{Bin}} \sqrt{\quad}$$

## Beispielaufgabe

Die mittlere Nachweiswahrscheinlichkeit von 10 Fehlern sei 30%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Fehler nachgewiesen werden?



---

Zur Kontrolle:

$$\begin{aligned}P(X \geq 2) &= 1 - \sum_{k=0}^1 \binom{10}{k} \cdot 0,3^k \cdot (1 - 0,3)^{10-k} \\&= 1 - (0,7^{10} + 10 \cdot 0,3 \cdot 0,7^9) \\&\approx 85\%\end{aligned}$$



## Effektive Anzahl der Zählversuche



## Abhängigkeiten zwischen zu zählenden Ereignissen

Die bisherigen Betrachtungen unterstellen, dass die zu zählenden Ereignisse unabhängig voneinander auftreten.

Für zu zählende Fehler und Fehlfunktionen gilt das nicht immer. Fehler im selben Teilsystem teilen sich z.B. Steuer- und Beobachtungsbedingungen. Ihr Nachweis erfordert z.T. gleiche Eingaben und Zustände.

- Wie lassen sich hierfür Verteilung und Varianz abschätzen?

---

Die empirische Lösung wird sein:

- Experimentelle Abschätzung  $E_S(X)$ ,  $D_S^2(X)$ .
- Festlegung von  $p$  und  $N_{\text{eff}}$  (mittlere Eintrittswahrscheinlichkeit und effektive Anzahl der Zählversuche) so, dass eine Binomialverteilung mit  $p$  und  $N_{\text{eff}}$  den Erwartungswert  $E_S(X)$  und die Varianz  $D_S^2(X)$  hat.

## Gedankenexperiment zur Varianzerhöhung

Angenommen, von den  $N$  zu addierenden Zufallsgrößen mit dem Wertebereich 0 und 1 haben immer  $\kappa$  denselben Wert. Dann können je  $\kappa$  Zufallsgrößen zu einer zusammengefasst werden mit der Verteilung:

$$P(X_i = 0) = 1 - p_i$$

$$P(X_i = \kappa) = p_i$$

Die Zählwert ist dann eine Summe von  $N/\kappa$  unabhängigen Zufallsgrößen:

$$X = \sum_{i=1}^{N/\kappa} X_i$$

Der Erwartungswert der Summanden:

$$E(X_i) = 0 \cdot (1 - p_i) + \kappa \cdot p_i = \kappa \cdot p_i$$

Varianz der Summanden (nach Verschiebungssatz):

$$\begin{aligned} D^2(X_i) &= (1 - p_i) \cdot 0^2 + p_i \cdot \kappa^2 - (\kappa \cdot p_i)^2 \\ &= \kappa^2 \cdot p_i \cdot (1 - p_i) \end{aligned}$$



Erwartungswert der Summe:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N/\kappa} \kappa \cdot p_i = N \cdot p$$

Varianz der Summe:

$$D^2(X) = \sum_{i=1}^{N/\kappa} p_i \cdot \kappa^2 \cdot (1 - p_i) \leq \kappa \cdot N \cdot p \cdot (1 - p)$$

( $p$  – mittlere Eintrittswahrscheinlichkeit). Das Verhältnis aus Varianz und Erwartungswert

$$\frac{D^2(X)}{E(X)} = \frac{\kappa \cdot N \cdot p \cdot (1 - p)}{N \cdot p} = \kappa \cdot (1 - p) \quad \text{mit } p = \frac{E(X)}{N}$$

Die Rechengröße  $\kappa$  wird im Weiteren als Varianzerhöhung bezeichnet:

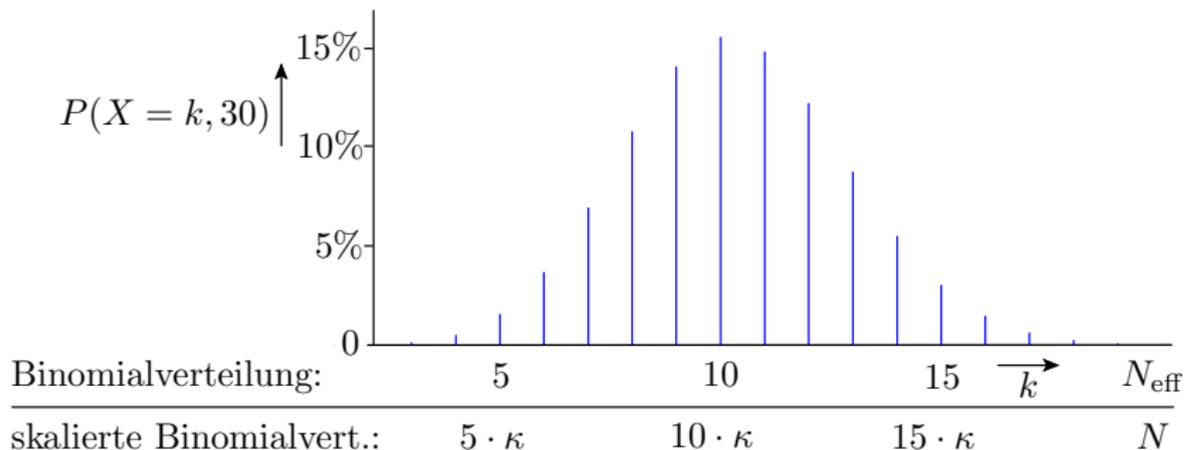
$$\kappa = \frac{D^2(X)}{E(X) \cdot \left(1 - \frac{E(X)}{N}\right)} \approx \frac{D_S^2(X)}{E_S(X) \cdot \left(1 - \frac{E_S(X)}{N}\right)}$$

und ist aus Erwartungswert  $E_S(X)$  und Varianz  $D_S^2(X)$  einer Datenstichprobe abschätzbar.



## Effektive Anzahl der Zählversuche

Eine Zählgröße aus  $\frac{N}{\kappa}$  Summanden mit den Werten 0 und  $\kappa$  hat dieselbe Verteilung wie eine mit genauso vielen Summanden mit den Werten 0 und 1, wenn alle Zählwerte durch  $\kappa$  geteilt werden.





## Erwartungswert und Varianz einer skalierten Binomialverteilung

Mit der Varianzerhöhung  $\kappa$  und der effektiven Fehleranzahl

$$N_{\text{eff}} = \frac{N}{\kappa} \quad (15)$$

ergibt sich für Varianz und Erwartungswert:

	Erwartungswert	Varianz
Binomialverteilung	$N_{\text{eff}} \cdot p$	$N_{\text{eff}} \cdot p \cdot (1 - p)$
skalierte Binomialv.	$\kappa \cdot N_{\text{eff}} \cdot p = N \cdot p$	$\kappa^2 \cdot N_{\text{eff}} \cdot p \cdot (1 - p)$ $= \kappa \cdot N \cdot p \cdot (1 - p)$



## Beispielabschätzung der effektiven Fehleranzahl



- $N = 2.000$  gezählte Werte.  $N_S = 10$  Wiederholungen des Zählversuchs. Ergebnisse (Zählwerte):

Versuch $i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ergebnis $w_i$	34	67	58	40	49	47	66	54	35	57

- Erwartungswert der Datenstichprobe nach Gl. 5:

$$E_S(X) = \frac{1}{N_S} \cdot \sum_{i=1}^{N_S} w_i = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} w_i = 50,7$$

- Varianz der Datenstichprobe nach Gl. 6:

$$D_S^2(X) = \frac{1}{N_S - 1} \cdot \sum_{i=1}^{N_S} (w_i - E(X))^2 = \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{10} (w_i - 50,7)^2 = 140,01$$



- Geschätzter Erwartungswert:  $E_S(X) = 50,7$
- mittlere Eintrittswahrscheinlichkeit:  $p = \frac{E_S(X)}{N} = \frac{50,7}{2000} \approx 2,5\%$
- Geschätzte Varianz:  $D_S^2(X) = 140,01$
- $\kappa$  nach Gl. ??:

$$\kappa \geq \frac{D_S^2(X)}{E_S(X) \cdot (1-p)} = \frac{140,01}{50,7 \cdot (1-2,5\%)} = 2,83$$

- Effektive Fehleranzahl:

$$N_{\text{eff}} = \frac{N}{\kappa} \approx 707$$

- Kumulative skalierte Binomialverteilung mit demselben Erwartungswert und derselben Varianz:

$$P\left(\frac{X}{\kappa} \leq k\right) = \sum_{j=0}^k \binom{N_{\text{eff}}}{j} \cdot p^j \cdot (1-p)^{N_{\text{eff}}-j}$$



# Poisson-Verteilung



## Poisson-Verteilung

Beim Zählen vieler seltener Ereignisse, z.B. der Fehlfunktionen bei Millionen von Service-Anforderungen, von denen nur wenige eintreten, streben die Eintrittswahrscheinlichkeit der Einzelereignisse und die Abweichung zwischen Erwartungswert und Varianz gegen null:

$$\begin{aligned} p_i &\rightarrow 0 \\ E^2(X_i) - D^2(X_i) = p_i - p_i \cdot (1 - p_i) = -p_i^2 &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Die Varianz der zu zählenden Ereignisse und die der Summe streben gegen den Erwartungswert

$$\begin{aligned} D^2(X_i) &= E(X_i) \\ D^2(X) = \sum_{i=1}^N D^2(X_i) &= E(X) = \sum_{i=1}^N E(X_i) \end{aligned}$$

Die Verteilung der Summe strebt gegen die Poisson-Verteilung.



Die Poisson-Verteilung ist eine einparametrische Verteilung, die sich allein aus dem Erwartungswert berechnet:

$$P(X = k) = \text{Poi}(k, E(X)) = e^{-E(X)} \cdot \frac{E(X)^k}{k!}$$

Der Erwartungswert einer Zählverteilung ist das Produkt aus der Anzahl der Zählwerte  $N$  und der mittleren Eintrittswahrscheinlichkeit  $p$ :

$$E(X) = \sum_{i=1}^N p_i = N \cdot p \quad \text{mit} \quad p = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N p_i$$

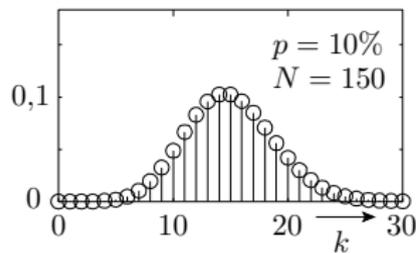
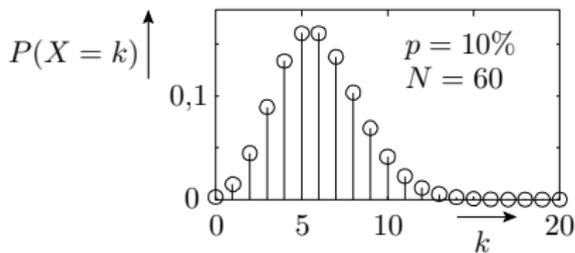
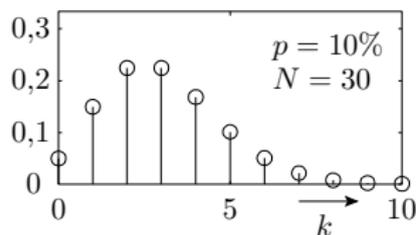
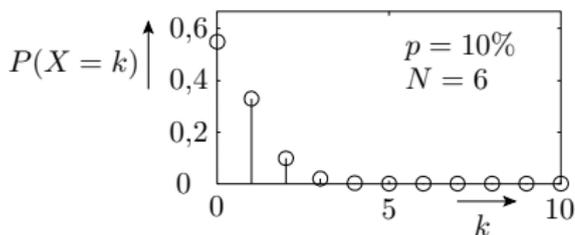
---

Für die Zählung unwahrscheinlicher Ereignisse ( $p \ll 0,1$ ) lautet die Poisson-Verteilung:

$$P(X = k) = e^{-p \cdot N} \cdot \frac{(p \cdot N)^k}{k!} \quad (16)$$

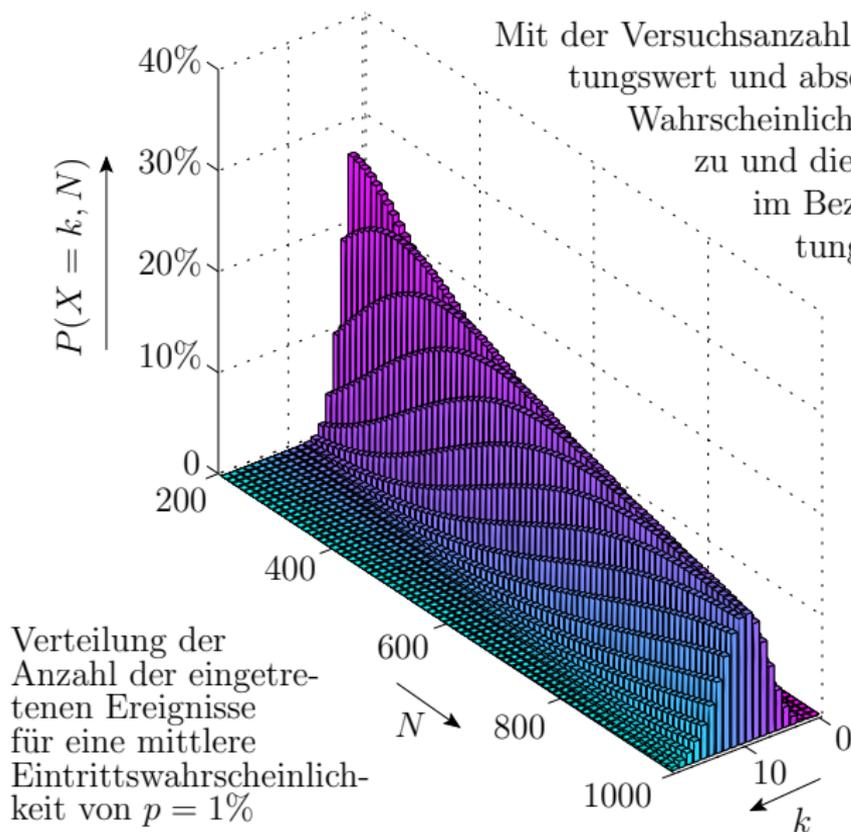
( $N$  – Anzahl der Zählversuche;  $p$  – mittlere Eintrittswahrscheinlichkeit).

$$P(X = k) = e^{-p \cdot N} \cdot \frac{(p \cdot N)^k}{k!}$$



Der Erwartungswert  $E(X) = p \cdot N$  nimmt proportional mit  $N$  zu.

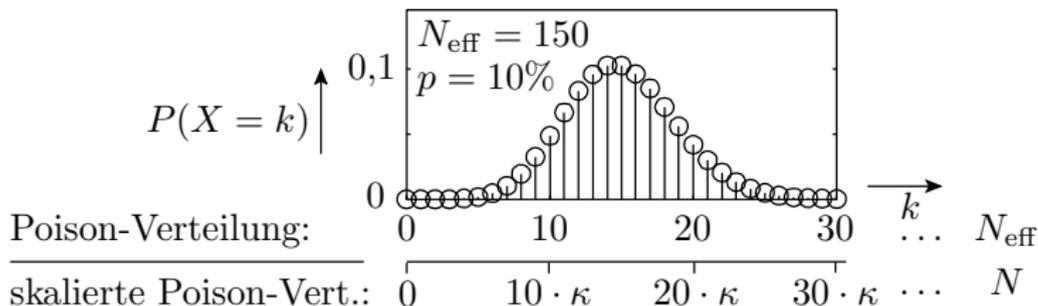
Die relative Breite des wahrscheinlichen Bereichs  $\frac{\sqrt{D^2(X)}}{E(X)} = \frac{1}{\sqrt{p \cdot N}}$  nimmt mit  $N$  ab. Siehe auch nächste Folie.





## Skalierte Poisson-Verteilung

Varianzerhöhungen  $\kappa = \frac{D^2(X)}{E(X)}$  durch Abhängigkeiten können wieder durch eine Streckung der Realisierungsachse berücksichtigt werden.



	Erwartungswert	Varianz
Poisson-Verteilung	$N_{\text{eff}} \cdot p$	$N_{\text{eff}} \cdot p$
skalierte Poisson-Vert.	$\kappa \cdot N_{\text{eff}} \cdot p = N \cdot p$	$\kappa^2 \cdot N_{\text{eff}} \cdot p = \kappa \cdot N \cdot p$



Für eine kleine Anzahl eintretender Ereignisse (0, 1, 2, ...) sind kaum Abhängigkeiten zu erwarten ( $\kappa = 1$ ;  $N_{\text{eff}} = N$ ).



# Normalverteilung



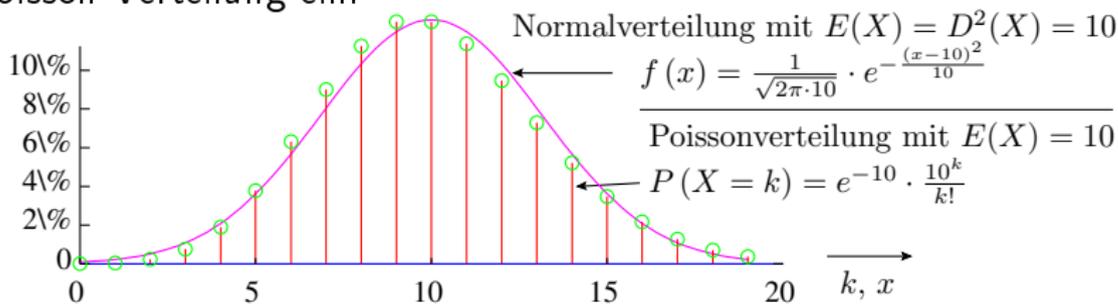
## Normalverteilung

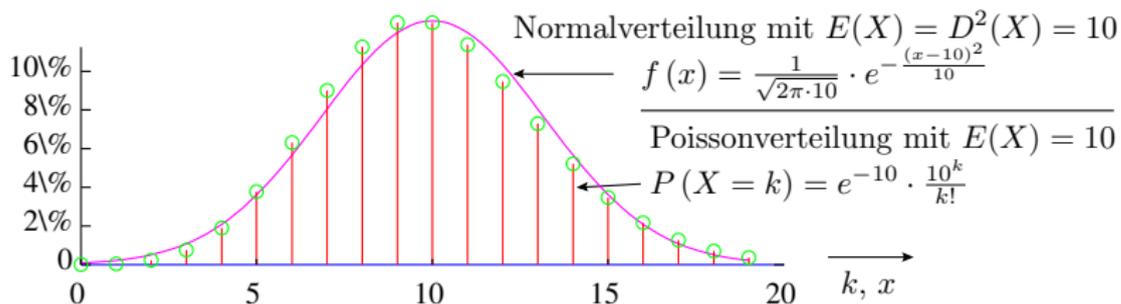
Die Summe sehr vieler unabhängiger Zufallsgrößen strebt unter sehr allgemeinen Bedingungen gegen eine Normalverteilung:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot D^2(X)}} \cdot e^{-\frac{(x-E(X))^2}{D^2(X)}}$$

- kein Summand hat dominanten Einfluss und
- Erwartungswert deutlich größer als Standardabweichung.

Schließt die behandelte Zählverteilung, Binomialverteilung und Poisson-Verteilung ein.





In der Praxis gilt die Annäherung einer Zähl- durch eine Normalverteilung in der Regel bereits unter der Bedingung

$$10 \cdot \kappa \leq E(X) \leq N - 10 \cdot \kappa$$

als ausreichend genau ( $\kappa$  – Varianzerhöhung;  $E(X) \cdot N \cdot p$  – Erwartungswert der Zählwerte;  $N$  – Anzahl der Zählversuche;  $p$  – mittlere Eintrittswahrscheinlichkeit).

Die Annäherung einer Zählverteilung durch eine Normalverteilung eignet sich gut für Bereichsschätzungen.



## Standardisierte Normalverteilung

Die standardisierte Normalverteilung hat den Erwartungswert  $E(X) = 0$  und die Varianz  $D^2(X) = 1$ . Kumulative Verteilungsfunktion:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-z^2} \cdot dz$$

Tabelliert für  $z = 0$  bis 3,9 in Schritten von 0,1:

$z$	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

Wegen der Symmetrie gilt für  $z < 0$ :

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$



## Skalierung

Normalverteilte Zufallsgrößen mit abweichendem Erwartungswert und/oder abweichender Standardabweichung werden in Zufallsgrößen mit Erwartungswert null und Standardabweichung eins transformiert:

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D^2(X)}}$$

Dasselbe erfolgt für alle Werte  $x$  (inkl. Unter- und Obergrenzen):

$$z = \frac{x - E(X)}{\sqrt{D^2(X)}}$$

Umrechnung zwischen Eintrittswahrscheinlichkeiten und Wertebereichen mit der Tabelle der standardisierten Normalverteilung:

$z$	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000



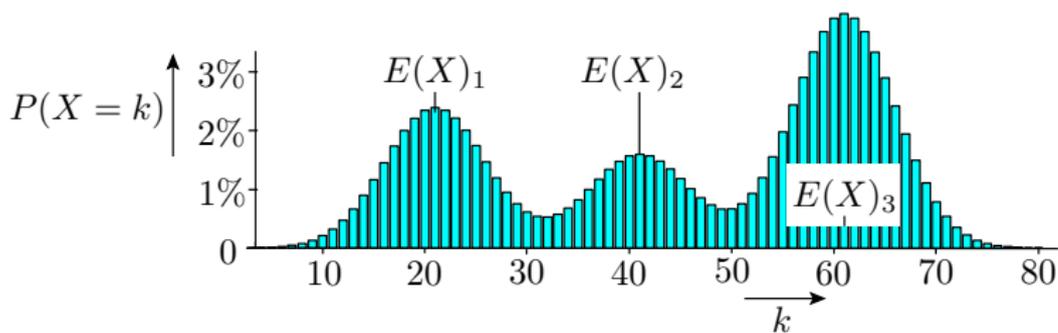
# Multimodale Verteilungen

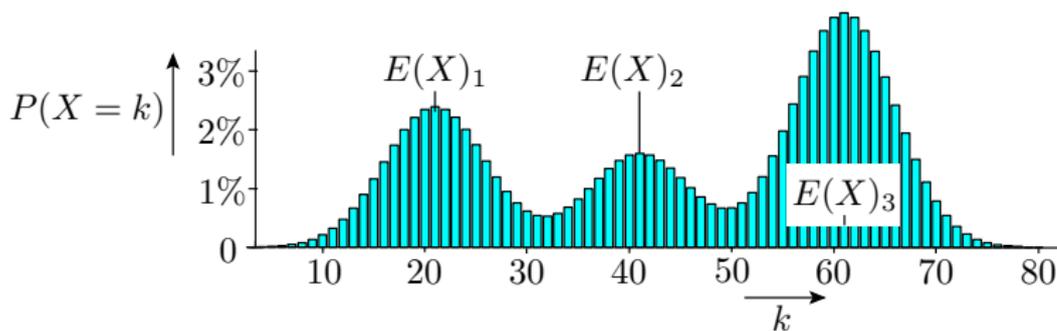
## Multimodale (mehrgipflige) Verteilung

Eine multimodale Verteilung ist eine Häufigkeitsverteilung mit mehreren Gipfeln. Sie entsteht z.B. durch Mischung unterschiedlich verteilter Grundgesamtheiten. Mischung von drei Normalverteilungen mit unterschiedlichem Erwartungswert

$$P(X = k) = f(k) = 0,3 \cdot f_1(k) + 0,2 \cdot f_2(k) + 0,5 \cdot f_3(k)$$

$f_i(k)$  – Normalverteilungen mit Erwartungswerten  $E(X)_i$  und Standardabweichung  $\sqrt{D^2(X)} = 5$ :





Die Multimodalität deutet auf Polarisierungen der Beobachtungswerte (Zugehörigkeit zu unterschiedlichen Verteilungen).

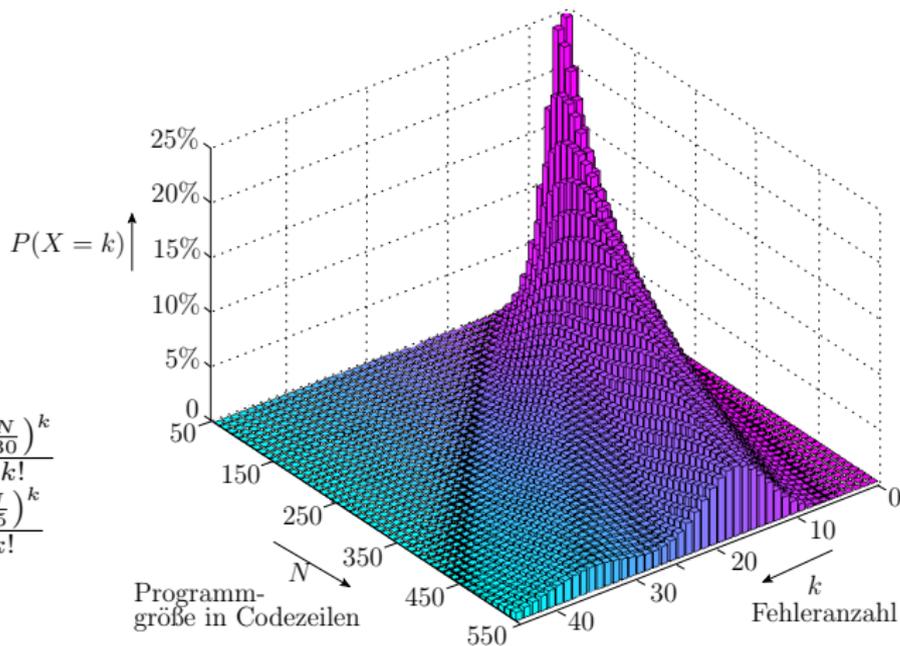
Polarisierungen können wichtige Informationen über die Natur der untersuchten Variablen liefern:

- Abhängigkeiten bei der Fehlerentstehung, bei Ausfällen beim Fehlernachweis und beim Versagen von Service-Leistungen,
- Vorlieben oder Neigung befragter Experten, z.B. bei der Einschätzung von Gefährdungen und Risiken und
- Problemen des Messverfahrens.



Beispiel sei ein Software-Team, in dem ein Anfänger und ein Profi gemeinsam Software-Bausteine aus  $N$  Code-Zeilen entwickeln, der Profi 66% der Bausteine mit ca. einem Fehler je 30 Codezeilen und der Anfänger 33% der Bausteine mit einem Fehler je 15 Codezeilen.

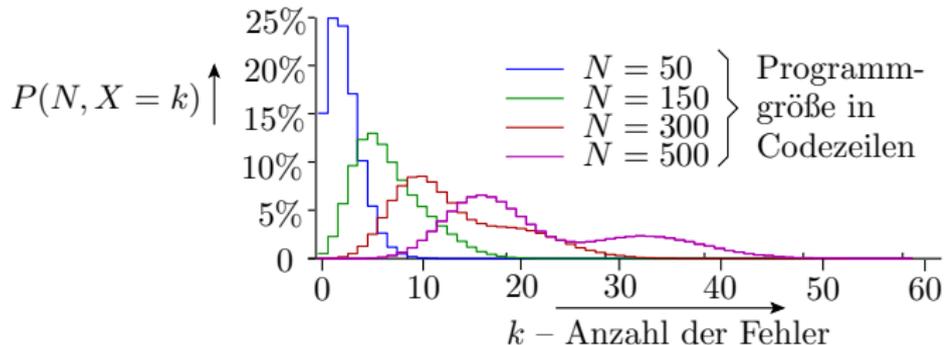
$$P(N, X = k) \\ = \frac{2}{3} \cdot e^{-\frac{N}{30}} \cdot \frac{\left(\frac{N}{30}\right)^k}{k!} \\ + \frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{N}{15}} \cdot \frac{\left(\frac{N}{15}\right)^k}{k!}$$





Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Modul genau  $k$  Fehler enthält, ist  $2/3$  mal der Wahrscheinlichkeit, dass es  $k$  Fehler enthält und vom Profi stammt plus  $1/3$  mal der Wahrscheinlichkeit, dass es vom Anfänger stammt:

$$P(N, X = k) = \frac{2}{3} \cdot e^{-\frac{N}{30}} \cdot \frac{\left(\frac{N}{30}\right)^k}{k!} + \frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{N}{15}} \cdot \frac{\left(\frac{N}{15}\right)^k}{k!} \quad (17)$$



Die Polarisierung nimmt mit der Größe der Software-Bausteine, die vom Profi und vom Anfänger getrennt entwickelt werden, zu.

## Beispielaufgabe



In einer Modellfehlermenge aus  $N = 25$  Fehlern mit einer Nachweiswahrscheinlichkeit  $p = 40\%$  seien zehn Fehler identisch und die übrigen Fehler unabhängig voneinander nachweisbar. Bestimmen Sie

- 1 den Erwartungswert und
- 2 die Varianz der Anzahl der nachweisbaren Fehler.
- 3 Die Varianzerhöhung  $\kappa$  gegenüber  $N = 25$  unabhängig voneinander nachweisbaren Modellfehlern (Nachweiswahrscheinlichkeit je Modellfehler  $p = 40\%$ ).
- 4 Eine Approximation der Verteilung als Mischverteilung aus zwei Binomialverteilungen.
- 5 Berechnung und Darstellung der Verteilung.



## Lösung Aufgabenteil 1

Die Anzahl der nachweisbaren Fehler ist modellierbar als Summe von

- $i = 1$  bis 15 unabhängigen Zufallsgrößen mit der Verteilung

$k$	0	1	$E(X)_i$	$D^2(X)_i$
$P(X_i = k)$	$1 - p$	$p$	$p$	$p \cdot (1 - p)$

- und einer dazu unabhängigen Zufallsgröße  $X_{16}$  mit der Verteilung (Varianz siehe Folie 85):

$k$	0	10	$E(X)_{16}$	$D^2(X)_{16}$
$P(X_{16} = k)$	$1 - p$	$p$	$10 \cdot p$	$10^2 \cdot p \cdot (1 - p)$

- 1 Erwartungswert als Summe der Erwartungswerte der Summanden:

$$E(X) = 15 \cdot p + 10 \cdot p = 25 \cdot 40\% = 10$$



## Lösung Aufgabenteil 2 und 3

$k$	0	1	$E(X)_i$	$D^2(X)_i$
$P(X_i = k)$	$1 - p$	$p$	$p$	$p \cdot (1 - p)$
$k$	0	5	$E(X)_{16}$	$D^2(X)_{16}$
$P(X_{16} = k)$	$1 - p$	$p$	$10 \cdot p$	$10^2 \cdot p \cdot (1 - p)$

- 2 Varianz als Summe der Varianzen der Summanden:

$$D^2(X) = 15 \cdot p \cdot (1 - p) + 100 \cdot p \cdot (1 - p) = 115$$

- 3 Gegenüber der Varianz der Summe von 25 unabhängigen Ereignissen mit Eintrittswahrscheinlichkeit  $p$

$$D^2(X)_{\text{unabh}} = 25 \cdot p \cdot (1 - p)$$

Varianzerhöhung:  $\kappa = 115/25 = 4,6$

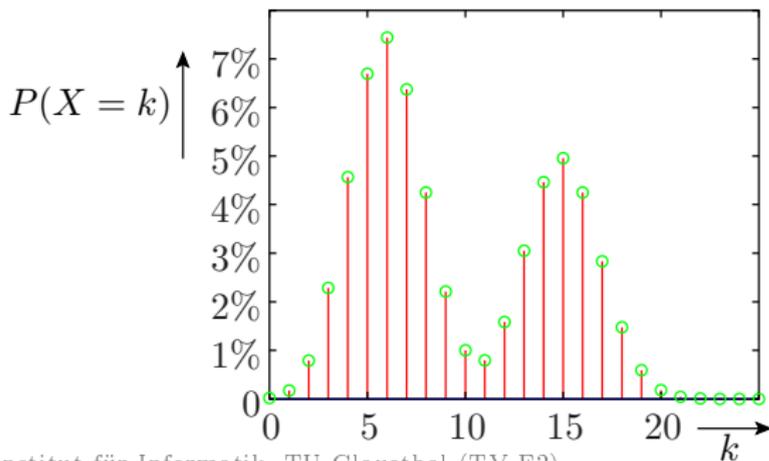
## Lösung Aufgabenteil 4

- 2 Die Gesamtverteilung lässt sich als Mischverteilung zweier binomialverteilter Grundgesamtheiten beschreiben:

$$P(X = k) = (1 - p) \cdot P_{1\dots 15}(X = k) + p \cdot P_{1\dots 15}(X + 10 = k)$$

mit

$$P_{1\dots 15}(X = k) = \binom{15}{k} \cdot 0,4^k \cdot 0,6^{15-k}$$





Programm zur Berechnung der Verteilung zu Aufgabenteil 4:

```
clear; clf;
N=15; p=0.4;
n_k(1)=1; % Berechnen von N über k
for k=1:N
    n_k(k+1)=n_k(k)*(N-k+1)/k;
end
for k=0:15
    P(k+1) = n_k(k+1) *p^k *(1-p)^(N-k);
end
PP(1:16)=(1-p)*P;
PP(17:26)=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
PP(10:25) =PP(10:25) + p*P;
stem(0:25, PP, 'r');
```

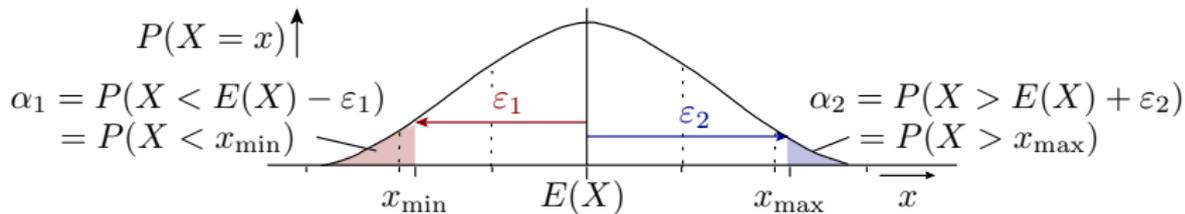


# Bereichsschätzungen



## Bereichsschätzungen

Bestimmung wahrscheinlicher Realisierungsbereiche unter Vorgabe einer kleinen zulässigen Irrtumswahrscheinlichkeit:



$\alpha_1$  Irrtumswahrscheinlichkeit, dass Werte unterhalb des geschätzten Bereichs liegen.

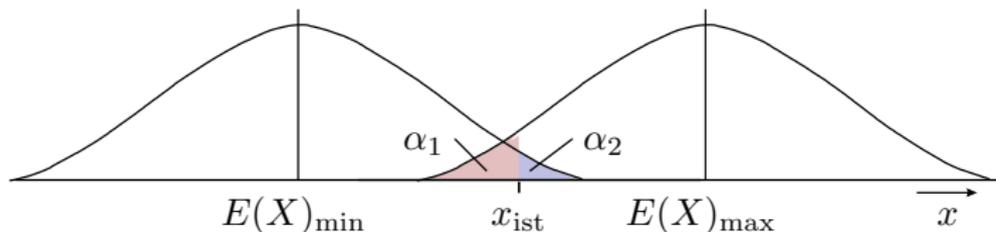
$\alpha_2$  Irrtumswahrscheinlichkeit, dass Werte oberhalb des geschätzten Bereichs liegen.

$\varepsilon_{1/2}$  Intervallradius, Abstand der unteren / oberen Bereichsgrenze vom Erwartungswert.

## Schätzaufgaben

Schätzen eines Realisierungsbereichs:

- Untergrenze  $x_{\min}$ :  $P(X < x_{\min}) < \alpha_1$
- Obergrenze  $x_{\max}$ :  $P(X > x_{\max}) < \alpha_2$
- beiderseitig:  $(P(X < x_{\min}) < \alpha_1) \wedge (P(X > x_{\max}) < \alpha_2)$



Erwartungswert aus einem experimentell bestimmten Werten  $x_{\text{ist}}$ :

- Untergrenze  $E(X)_{\min}$ :  $P(X > x_{\text{ist}}) < \alpha_2$
- Obergrenze  $E(X)_{\max}$ :  $P(X < x_{\text{ist}}) < \alpha_1$



### 3. Bereichsschätzungen

Eintrittswahrscheinlichkeiten von Zählversuchen:

- Untergrenze:  $p_{\min} = \frac{E(X)_{\min}}{N}$
- Obergrenze:  $p_{\max} = \frac{E(X)_{\max}}{N}$
- Intervall:  $p \in \left[ \frac{E(X)_{\min}}{N}, \frac{E(X)_{\max}}{N} \right]$

---

Bei den im weiteren behandelten Abschätzungen wird in der Regel von einer Zählverteilung ausgegangen mit der Varianz

$$D^2(X) = \kappa \cdot E(X) \cdot \left(1 - \frac{E(X)}{N}\right)$$

bzw.

$$D^2(X) = E(X) \quad E(X) \ll N; \kappa = 1$$

( $\kappa$  – Abhängigkeitskoeffizient;  $N$  – Anzahl der Zählversuche).

Annäherung der Zählverteilung für die Schätzaufgaben:

- Normalverteilung:  $10 \leq \kappa \cdot E(X) \leq N - 10 < 10 \ll N$
- Poissonverteilung:  $E(X) < 10 \ll N$
- beliebige Verteilung  $\Rightarrow$  Tschebyscheffsche Ungleichung



# Normalverteilung



## Bereichsschätzung für normalverteilte Zufallsgrößen

Bereichsschätzungen für normalverteilte Zufallsgrößen werden auf die für die standardisierte Normalverteilung

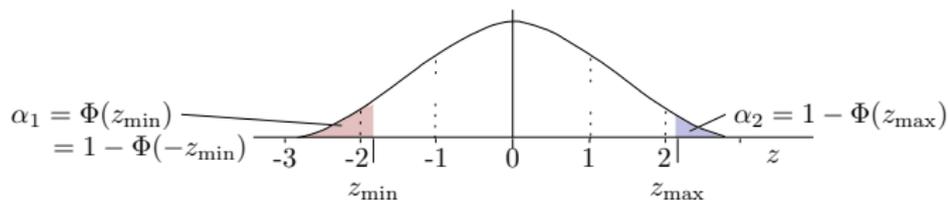
$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2} \cdot dx$$

zurückgeführt. Dazu werden die Zufallsgrößen mit abweichendem Erwartungswert und/oder abweichender Standardabweichung in eine Zufallsgröße mit Erwartungswert null und Standardabweichung eins transformiert:

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D^2(X)}}$$

Dasselbe erfolgt für alle Werte  $x$  (inkl. Unter- und Obergrenzen):

$$z = \frac{x - E(X)}{\sqrt{D^2(X)}}$$



Die nachfolgende Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitszuordnung der standardisierten Normalverteilung

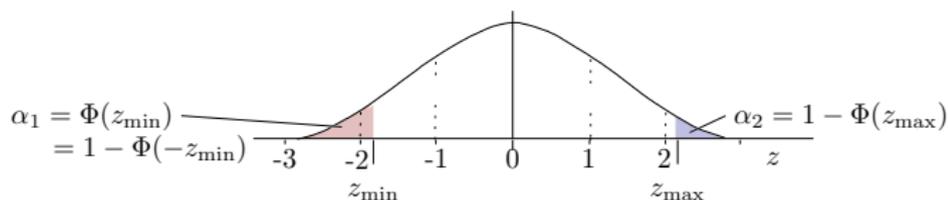
$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2} \cdot dx$$

für  $z = 0$  bis 3,9 in Schritten von 0,1:

$z$	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000



## Ablese von Irrtums- und Bereichswahrscheinl.



- Untergrenze:  $x_{\min} = E(X) - 1,8 \cdot \sqrt{D^2(X)} \Rightarrow z_{\min} = -1,8$
- Obergrenze:  $x_{\max} = E(X) + 2,2 \cdot \sqrt{D^2(X)} \Rightarrow z_{\max} = 2,2$

$z$	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

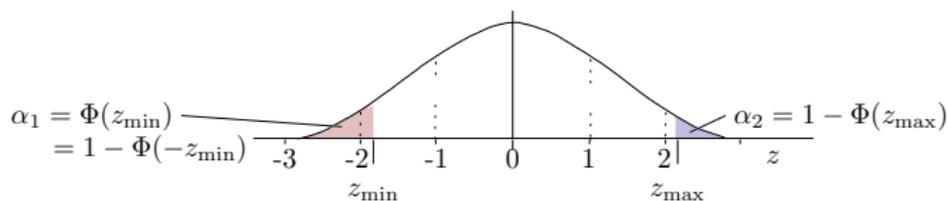
$$\alpha_1 = 1 - \Phi^{-1}(1,8) = 3,59\%$$

$$\alpha_2 = 1 - \Phi^{-1}(2,2) = 1,39\%$$

$$1 - \alpha_1 - \alpha_2 = 91,02\%$$



## Einseitige Bereichsschätzung



Für ein  $\alpha_1$  wird das  $z_{\min}$  oder für ein  $\alpha_2$  das  $z_{\max}$  gesucht.

$z$	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

Umstellung der tabellierten Funktion nach

$$z_{\min} = -\Phi^{-1}(1 - \alpha_1)$$

$$z_{\max} = \Phi^{-1}(1 - \alpha_2)$$



$z$	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

Umstellung nach  $\Phi^{-1}(1 - \alpha)$ :

$\alpha$	2,27%	0,13%	0	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
$\Phi^{-1}(1 - \alpha)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

Berechnung unterer und oberer Bereichsgrenzen:

$$z_{\min} = -\Phi^{-1}(1 - \alpha_1)$$

$$x_{\min} = E(X) - \sqrt{D^2(X)} \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha_1)$$

$$z_{\max} = -\Phi^{-1}(1 - \alpha_2)$$

$$x_{\max} = E(X) + \sqrt{D^2(X)} \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha_2)$$

Symmetrische Bereichsschätzung ( $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$ )

$$P(-z_{\min} \leq Z \leq z_{\max}) = \Phi(z) - \Phi(-z) = 2 \cdot \Phi(z) - 1 \geq 1 - \alpha$$

$$-z_{\min} = z_{\max} \geq \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$\alpha$	4,54%	0,26%	0	4%	2%	1%	0,4%	0,2%
$\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

Bereich für  $E(X) \neq 0$  und/oder  $D^2(X) \neq 1$ :

$$x_{\min / \max} = E(X) \mp \sqrt{D^2(X)} \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Zum Vergleich:

$\alpha$	2,27%	0,13%	0	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
$\Phi^{-1}(1 - \alpha)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

## Bereichsschätzungen für Zählergebnisse

Die Varianz einer Zählverteilung ist überschlagsweise die einer Binomialverteilung mit demselben Erwartungswert erhöht um den Abhängigkeitskoeffizienten  $\kappa$ :

$$D^2(X) \approx \kappa \cdot E(X) \cdot \left(1 - \frac{E(X)}{N}\right)$$

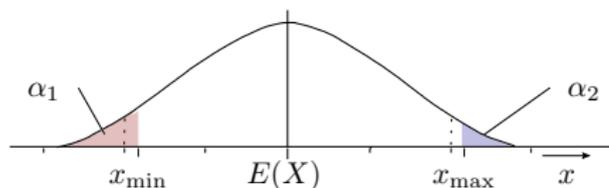
$$x_{\min} = E(X) - \sqrt{\kappa \cdot E(X) \cdot \left(1 - \frac{E(X)}{N}\right)} \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha_1)$$

$$x_{\max} = E(X) + \sqrt{\kappa \cdot E(X) \cdot \left(1 - \frac{E(X)}{N}\right)} \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha_2)$$

Für eine symmetrische Bereichsschätzung ( $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$ ):

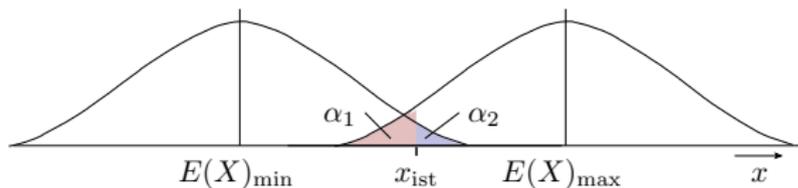
$$x_{\min / \max} = E(X) \mp \sqrt{\kappa \cdot E(X) \cdot \left(1 - \frac{E(X)}{N}\right)} \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

## Bereichsschätzung für den Erwartungswert von Zählergebnissen



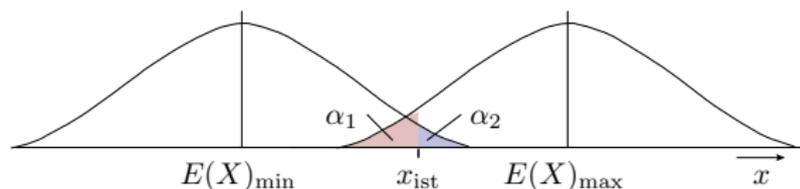
$$x_{\min} = E(X) - \sqrt{D^2(X)} \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha_1)$$

$$x_{\max} = E(X) + \sqrt{D^2(X)} \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha_2)$$



$$E(X)_{\min} = x_{\text{ist}} - \sqrt{D^2(X)} \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha_2)$$

$$E(X)_{\max} = x_{\text{ist}} + \sqrt{D^2(X)} \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha_1)$$



Mit der Varianz::

$$D^2(X) \approx \kappa \cdot x_{\text{ist}} \cdot \left(1 - \frac{x_{\text{ist}}}{N}\right)$$

( $N$  – Anzahl der Zählversuche;  $\kappa$  – Abhängigkeitskoeffizient ).

$$E(X)_{\min} \approx x_{\text{ist}} - \sqrt{\kappa \cdot x_{\text{ist}} \cdot \left(1 - \frac{x_{\text{ist}}}{N}\right)} \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha_2)$$

$$E(X)_{\max} = x_{\text{ist}} + \sqrt{\kappa \cdot x_{\text{ist}} \cdot \left(1 - \frac{x_{\text{ist}}}{N}\right)} \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha_1)$$

Für eine symmetrische Bereichsschätzung ( $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$ ):

$$E(X)_{\min / \max} = x_{\text{ist}} \mp \sqrt{\kappa \cdot x_{\text{ist}} \cdot \left(1 - \frac{x_{\text{ist}}}{N}\right)} \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

## Beispielaufgaben



Eine Zufallsgröße  $X$  hat den Erwartungswert  $E(X) = 20$  und die Standardabweichung  $\sqrt{D^2(X)} = 5$ .

- 1 Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist  $X \geq 30$ ?
- 2 Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist  $X \leq 15$ ?
- 3 Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt  $X$  im Bereich  $17,5 \pm 7,5$ ?
- 4 Welche Schranke  $x_{\max}$  überschreitet  $X$  nur mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\leq 1\%$ ?
- 5 Welche Schranke  $x_{\min}$  unterschreitet  $X$  nur mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\leq 2\%$ ?
- 6 In welchem (symmetrischen) Bereich liegt der Wert von  $x$  mit 99%-iger Sicherheit?



## Lösung Aufgabenteil 1

1 ... Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist  $X \geq 30$ ?

$z$	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

---

Gegeben:  $E(X) = 20$ ,  $\sqrt{D^2(X)} = 5$ ,  $x_{\min} = 30$ . Gesucht  $P(X \geq x_{\min})$ .

$$\begin{aligned}P(X \geq x_{\min}) &= 1 - \Phi\left(\frac{x_{\min} - E(X)}{\sqrt{D^2(X)}}\right) = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{30 - 20}{5}\right) = 1 - \Phi(2) = 0,0228\end{aligned}$$



## Lösung Aufgabenteil 2 und 3

$z$	...,0	...,1	...,2	...,3	...,4	...,5	...,6	...,7	...,8	...,9
0,...	0,5000	0,5398	0,5793	0,6179	0,6554	0,6915	0,7257	0,7580	0,7881	0,8159
1,...	0,8413	0,8643	0,8849	0,9032	0,9192	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713
2,...	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981
3,...	0,9987	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000

- 2 Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist  $X \leq 15$ ? ( $E(X) = 20$ ,  $\sqrt{D^2(X)} = 5$ )

$$P(X < 15) = \Phi\left(\frac{15 - 20}{5}\right) = 1 - \Phi(1) = 0,1587$$

- 3 Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt  $X$  im Bereich  $17,5 \pm 7,5$ ? ( $E(X) = 20$ ,  $\sqrt{D^2(X)} = 5$ )

$$\begin{aligned} P(10 < X < 25) &= \Phi\left(\frac{25 - 20}{5}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 20}{5}\right) \\ &= \Phi(1) - (1 - \Phi(2)) = 0,8185 \end{aligned}$$



## Lösung Aufgabenteil 4 und 5

$\alpha$	2,28%	0,13%	0	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%
$\Phi^{-1}(1 - \alpha)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

- 4 Obergrenze  $x_{\max}$  für Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha \leq 1\%$ ,  
 $E(X) = 20$  und  $\sqrt{D^2(X)} = 5$ :

$$\begin{aligned} x_{\max} &\geq E(X) + \sqrt{D^2(X)} \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha) \\ &= 20 + 5 \cdot \Phi^{-1}(1 - 1\%) = 31,65 \end{aligned}$$

- 5 Untergrenze  $x_{\min}$  für Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha \leq 2\%$ ,  
 $E(X) = 20$  und  $\sqrt{D^2(X)} = 5$ :

$$\begin{aligned} x_{\min} &\leq E(X) - \sqrt{D^2(X)} \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha) \\ &= 20 - 5 \cdot \Phi^{-1}(1 - 2\%) = 9,75 \end{aligned}$$



## Lösung Aufgabenteil 6

4 Symmetrischer Bereich mit 99%-iger Sicherheit:

$$x_{\min}, x_{\max} = E(X) \mp \sqrt{D^2(X)} \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{1\%}{2}\right)$$

$\alpha$	4,54%	0,26%	0	4%	2%	1%	0,4%	0,2%
$\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10

$$x_{\min}, x_{\max} = 20 \mp 5 \cdot 2,57$$

$$x_{\min} = 7,15$$

$$x_{\max} = 32,85$$



Eintrittswahrsch.



## Schätzen von Eintrittswahrscheinlichkeiten

Die Eintrittswahrscheinlichkeit eines Zählwertes ist der Quotient aus der Anzahl der Zählwerte und der Versuchsanzahl. Für ein experimentell bestimmten Zählwert  $x_{\text{ist}}$  betragen

- Schätzwert

$$p_S = \frac{x_{\text{ist}}}{N}$$

- Untergrenze

$$p_{\min} = \frac{E(X)_{\min}}{N}$$

- und Obergrenze

$$p_{\max} = \frac{E(X)_{\max}}{N}$$

Je größer die Anzahl  $N$  der Zählversuche und die Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  desto kleiner ist der Bereich  $[p_{\min}, p_{\max}]$ , in dem die tatsächliche Wahrscheinlichkeit liegt.



## Mindestwert für das Zählergebnis

Für eine normalverteilte Zählgröße gilt bei  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$ :

$$E(X)_{\min/\max} = x_{\text{ist}} \mp \sqrt{\kappa \cdot x_{\text{ist}} \cdot \left(1 - \frac{x_{\text{ist}}}{N}\right)} \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Relativer Intervallradius:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{rel}} &= \frac{E(X)_{\max} - x_{\text{ist}}}{x_{\text{ist}}} = \frac{x_{\text{ist}} - E(X)_{\min}}{x_{\text{ist}}} \\ &= \sqrt{\frac{\kappa}{x_{\text{ist}}} \cdot \left(1 - \frac{x_{\text{ist}}}{N}\right)} \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\end{aligned}$$

Das Mindestzählergebnis, damit der relative Intervallradius unter Vorgabe einer Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  nicht größer als  $\varepsilon_{\text{rel}}$  ist beträgt:

$$x_{\text{ist}} = \frac{1}{\frac{1}{N} + \frac{\varepsilon_{\text{rel}}^2}{\kappa \cdot (\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}))^2}}$$



## Mindestversuchsanzahl

Für  $N \gg x_{\text{ist}}$  vereinfacht sich die Abschätzung des Mindestzählergebnisses zu:

$$x_{\text{ist}} = \frac{1}{\frac{1}{N} + \frac{\varepsilon_{\text{rel}}^2}{\kappa \cdot (\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}))^2}} \approx \frac{\kappa \cdot (\Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}))^2}{\varepsilon_{\text{rel}}^2} \quad (18)$$

### Folgerung 6

*Zur Schätzung der Eintrittswahrsch*

$$E(X)_{\min/\max} = x_{\text{ist}} \mp \sqrt{\kappa \cdot x_{\text{ist}} \cdot \left(1 - \frac{x_{\text{ist}}}{N}\right) \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

*einlichkeit  $p_S \in \frac{x_{\text{ist}}}{N} \cdot (1 \mp \varepsilon_{\text{rel}})$  für näherungsweise normalverteilte Zählversuche ist die Versuchsanzahl  $N$  mindestens solange zu erhöhen, bis der Zählwert  $x_{\text{ist}}$  nach Gl. 18 erreicht ist.*

## Beispielaufgaben



- 1 In welchen Bereich liegt der Erwartungswert für ein Zählergebnis  $x_{\text{ist}} = 20$  bei  $N = 100$  Zählversuchen?
- 2 Wie groß muss die Anzahl  $N$  der Zählversuche sein, um zu zeigen, dass die Eintrittswahrscheinlichkeit  $p = 1\% \cdot (1 \mp 10\%)$  beträgt?

Abhängigkeiten zwischen den Zählergebnissen seien in beiden Aufgaben zu vernachlässigen ( $\kappa = 1$ ) und die zulässigen Irrtumswahrscheinlichkeiten seien  $\alpha = 1\%$ .



## 1 Bereich des Erwartungswerts:

$$E(X)_{\min/\max} = x_{\text{ist}} \mp \sqrt{\kappa \cdot x_{\text{ist}} \cdot \left(1 - \frac{x_{\text{ist}}}{N}\right)} \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$(\kappa = 1, \alpha = 1\%, x_{\text{ist}} = 20, N = 100, \Phi^{-1}(1 - 0,5\%) = 2,57)$$


---

2 Mindestanzahl der Zählversuche:  $N = \frac{x_{\text{ist}}}{p}$ 

Mindestzählergebnis:

$$x_{\text{ist}} = \frac{\kappa \cdot \left(\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right)^2}{\epsilon_{\text{rel}}^2} =$$

$$(\kappa = 1, \alpha = 1\%, x_{\text{ist}} = 20, p = 1\% \cdot (1 \mp 10\%))$$



## Zur Kontrolle

- 1 Bereich des Erwartungswerts:

$$\begin{aligned}
 E(X)_{\min / \max} &= x_{\text{ist}} \mp \sqrt{\kappa \cdot x_{\text{ist}} \cdot \left(1 - \frac{x_{\text{ist}}}{N}\right) \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} \\
 &= 20 \mp 2,57 \cdot \sqrt{20 \cdot \left(1 - \frac{20}{100}\right)} = [9,72, 30,28]
 \end{aligned}$$

$$(\kappa = 1, \alpha = 1\%, x_{\text{ist}} = 20, N = 100, \Phi^{-1}(1 - 0,5\%) = 2,57)$$


---

- 2 Mindestanzahl der Zählversuche:

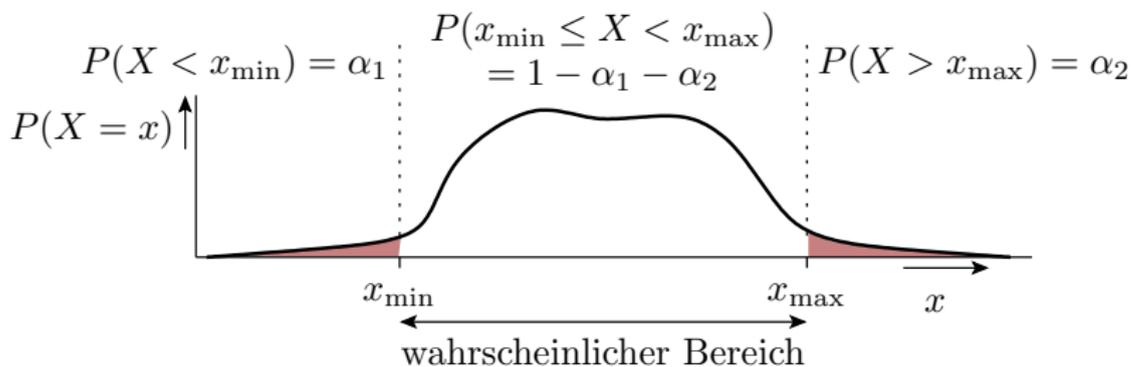
$$N = \frac{\kappa \cdot \left(\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right)^2}{p \cdot \varepsilon_{\text{rel}}^2} = \frac{(2,57)^2}{0,01 \cdot 0,1^2} = 66049$$

$$(\kappa = 1, \alpha = 1\%, x_{\text{ist}} = 20, p = 1\% \cdot (1 \mp 10\%))$$



## Verteilung unbekannt

## Bereichsschätzung für beliebige Verteilungen



Eine Bestimmung eines wahrscheinlichen Intervalls  $[x_{\min}, x_{\max}]$ , in dem der Wert einer Zufallsgröße  $X$  mit einer Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$  liegt, ist auch möglich, wenn die Verteilung nicht bekannt, multimodal, ... (beliebig) ist. Voraussetzung ist eine hinreichend kleine Varianz im Vergleich zum Abstand zwischen dem Erwartungswert und den Wertebereichsgrenzen.



## Das schwache Gesetz der großen Zahlen

Nach der tschebyscheffschen Ungleichung:

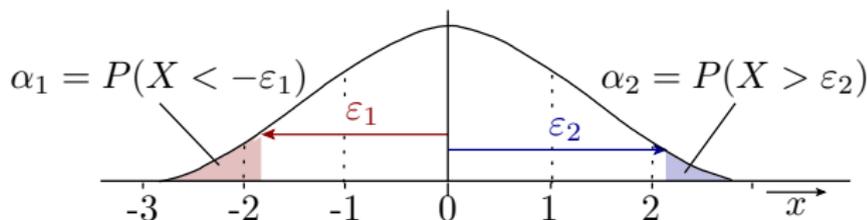
$$P(|x - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}$$

ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert einer Zufallsgröße mehr als ein Intervallradius  $\varepsilon$  von seinem Erwartungswert abweicht, nicht größer als das Verhältnis der Varianz zum Quadrat des Intervallradius  $\varepsilon$ . Bei Zulassen einer Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  beträgt der Intervallradius mindestens:

$$\varepsilon \geq \sqrt{\frac{D^2(X)}{\alpha}}$$

Ausgehend von einer bekannten Realisierung  $x_{\text{ist}}$  beschränkt das den Bereich des Erwartungswerts auf  $E(X) \in x_{\text{ist}} \pm \varepsilon$ . Bei bekanntem oder vermutetem Erwartungswert  $E(X)$  ist der wahrscheinliche Bereich, in dem  $1 - \alpha$  der experimentellen Ergebnisse liegen werden  $x_{\text{min/max}} \in E(X) \pm \varepsilon$ .

## Zum Vergleich: Intervallradius bei Normalverteilung



Bei einer standardisierten Normalverteilung beträgt der Intervallradius für  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right)$$

Für Normalverteilungen mit einer Standardabweichung  $\neq 1$  ist er um die Standardabweichung größer:

$$\varepsilon = \sqrt{D^2(X)} \cdot \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right)$$

Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha$		10%	5%	2%	1%	0,5%	0,2%
$\varepsilon_{DX1} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{D^2(X)}}$	beliebige Verteilung	3,16	4,47	7,07	10	14,1	22,4
	Normalverteilung	1,65	1,96	2,33	2,75	2,81	3,10



## Beispielaufgabe



Gegeben sei eine Stichprobe gemessener Widerstandswerte in  $k\Omega$ :

$$X : 10,3, 10,5, 9,7, 8,9, 10,1, 11,0, 10,2, 9,5$$

Aus dieser Stichprobe soll

- 1 ohne weitere Vorkenntnisse über die Verteilung und
- 2 unter der Annahme, dass die Widerstandswerte normalverteilt sind,

auf den möglichen Bereich des Erwartungswertes geschlussfolgert werden. Zugelassene Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha = 2\%$ .



## Lösung

Erwartungswert und Standardabweichung der Datenstichprobe:

$$E_S(R) = \frac{1}{8} (10,3 + \dots) \text{ k}\Omega = 10,025 \text{ k}\Omega$$

$$\sqrt{D_S^2(R)} = \sqrt{\frac{1}{7} \left( (10,3 - 10,025)^2 + \dots \right) \text{ k}\Omega^2} = 647 \Omega$$

Auf Standardabweichung 1 normierter Intervallradius:

Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha$	10%	5%	2%	1%	0,5%	0,2%	
$\epsilon_{DX1} = \frac{\epsilon}{\sqrt{D^2(X)}}$	beliebige Verteilung	3,16	4,47	7,07	10	14,1	22,4
	Normalverteilung	1,65	1,96	2,33	2,75	2,81	3,10

**1** Ohne Kenntnis der Verteilung:

$$E(R) \in 10,025 \text{ k}\Omega \pm 7,07 \cdot 647 \Omega = [5,3 \text{ k}\Omega, 14,8 \text{ k}\Omega]$$

**2** Für normalverteilte Widerstandswerte:

$$E(R) \in 10,025 \text{ k}\Omega \pm 2,33 \cdot 647 \Omega = [8,5 \text{ k}\Omega, 11,5 \text{ k}\Omega]$$



## Kleine Zählwerte



## Kleine Zählwerte

Für weniger als  $10 \ll N$  eingetretene / nicht eingetretene Zählereignisse ist deren Anzahl näherungsweise poissonverteilt. Die Abschätzung einer Unter-, einer Obergrenze oder eines Bereichs

- für den Zählwert bei bekanntem Erwartungswert,
- für den Erwartungswert bei bekanntem Zählwert

basiert auf der kumulativen Poisson-Verteilung:

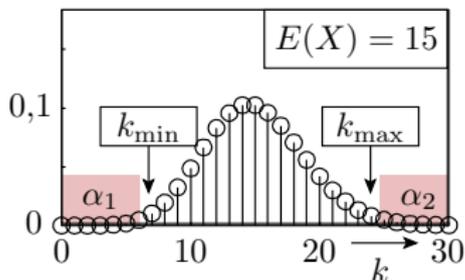
$$\text{poiscdf}(E(X), k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k e^{-E(X)} \cdot \frac{E(X)^i}{i!}$$

Berechnung mit Matlab/Octave:

```
function [P] = poiscdf(E, k)
w=1; sum=1;
for i=1:k
    w = w*E/i; sum = sum + w;
end
P =e^(-E)*sum;
```



## Obere und untere Bereichsgrenze



- Untere Bereichsgrenze:

$$\text{poiscdf}(E(X), k_{\min} - 1) \leq \alpha_1$$

- Obere Bereichsgrenze:

$$1 - \text{poiscdf}(E(X), k_{\max}) < \alpha_2$$

- symmetrischer Bereich:

$$\left( \text{poiscdf}(E(X), k_{\min} - 1) \leq \frac{\alpha}{2} \right) \\ \wedge \left( 1 - \text{poiscdf}(E(X), k_{\max}) < \frac{\alpha}{2} \right)$$

Eine garantierbare Untergrenze  $k_{\min} \geq 1$  verlangt  $E(X) \geq -\ln(\alpha)$ ,  
z.B. für  $\alpha = 1\%$   $E(X) > 4,6$ .

Numerische Suche des größten  $k_{\min}$ 

$$\text{poiscdf}(E(X), k_{\min} - 1) \leq \alpha_1$$

```
function [k_min] = pois_k_min(alpha1, E)
    assert (poiscdf(E, 0) <= alpha)
    k_min = 1
    while (poiscdf(E, k_min-1) <= alpha1)
        k_min = k_min + 1;
    end
    k_min = k_min - 1;
```

Suchablauf für  $\alpha_1 = 1\%$  und  $E(X) = 9$  (pois\_k\_min(0.01, 9):

```
k_min= 0 alpha1=0.0123%
k_min= 1 alpha1=0.1234%
k_min= 2 alpha1=0.6232%
k_min= 3 alpha1=2.1226% (poiscdf(9, 2) ≤ 1%)
```

Garantierbare Untergrenze:  $k_{\min} = 3$ . Nur ein Drittel von  $E(X) = 9$ .

Numerische Suche kleinsten  $k_{\max}$ 

$$1 - \text{poiscdf}(E(X), k_{\max}) \leq \alpha_2$$

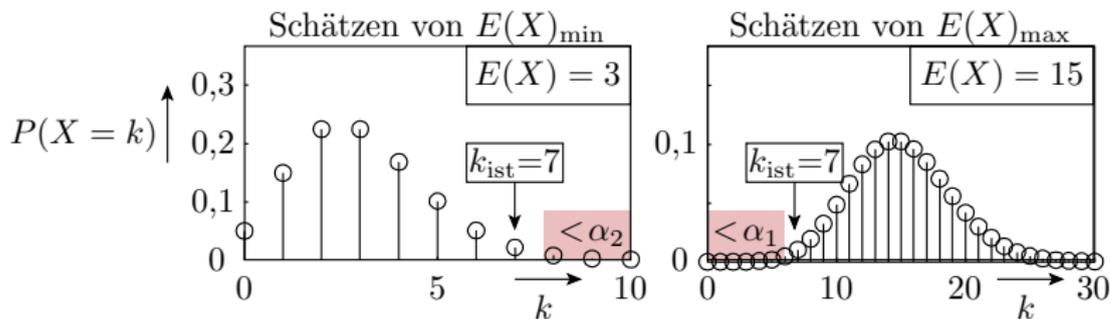
```
function [k_max] = pois_k_max(alpha, E)
    k_max = 0;
    while (poiscdf(E, k_max) <= 1-alpha)
        k_max = k_max + 1;
    end
```

Suchablauf für  $\alpha_1 = 1\%$  und  $E(X) = 9$  (`pois_k_max(0.01, 9)`):

```
k_max= 0 alpha2=99.9877%
k_max= 1 alpha2=99.8766%
...
k_max=16 alpha2=1.1106%
k_max=17 alpha2=0.5320% (1 - poiscdf(9, 17) ≤ 1%)
```

Die garantierbare Obergrenze ist  $k_{\max} = 17$  und fast doppelt so groß wie der Erwartungswert  $E(X) = 9$ .

## E(X)-Bereich für einen bekannten Zählwert $k_{\text{ist}}$



Untere Bereichsgrenze:

$$\text{poiscdf}(E(X)_{\min}, k_{\text{ist}}) > 1 - \alpha_2$$

Obere Bereichsgrenze (Voraussetzung  $k_{\text{ist}} > 0$ ):

$$\text{poiscdf}(E(X)_{\max}, k_{\text{ist}} - 1) \leq \alpha_1$$



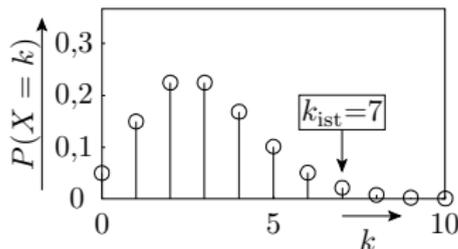
## Numerische Berechnung der Untergrenze

```
function [E_min] = pois_EUG(alpha, k_ist)
    EE_min = k_ist+1; dE=E_min;
    while (1)
        a = 1-poiscdf(E_min, k_ist);
        if (a > alpha)           E_min = E_min - dE;
        elseif (a < 0.99* alpha) E_min = E_min + dE;
        else                     return
    end
end
```

Für  $k_{ist} = 7$ ,  $\alpha_2 = 1\%$

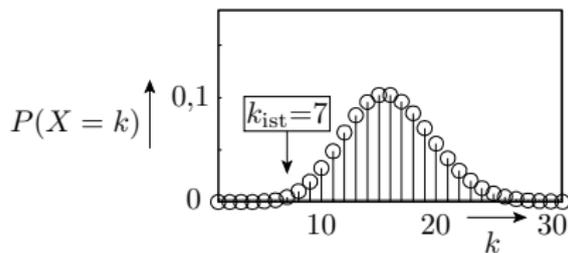
$1 - \text{poiscdf}(8.000, 7) = 54.704\%$ ,  
 $1 - \text{poiscdf}(4.000, 7) = 5.113\%$ ,  
 $1 - \text{poiscdf}(2.000, 7) = 0.110\%$ ,  
 $1 - \text{poiscdf}(3.000, 7) = 1.190\%$ , ...

$E(X)_{\min} = 2,91$



## Berechnung der Obergrenze

```
function [E_max] = pois_EOG(alpha, k_ist)
    E_max = 10*k_ist+(1/alpha); dE=E_max;
    while (1)
        dE=dE/2; a = poiscdf(E_max, k_ist-1);
        if (a < alpha)      E_max = E_max - dE;
        else                E_max = E_max + dE;
        end % if
        if dE<0.001 return
        end % if
    end % while
end % function
```



Für  $k_{ist} = 7, \alpha_2 = 1\%$

- poiscdf(85.000, 6)=0.000%
- poiscdf(42.500, 6)=0.000%
- poiscdf(21.250, 6)=0.010%
- poiscdf(10.625, 6)=9.540%
- poiscdf(15.938, 6)=0.417%
- ...

$E(X)_{max} \approx 14,57$



## Tabellierung der Erwartungswertbereiche

	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 2\%$	
$x_{\text{ist}}$	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$
0	0,005	–	0,01	–	0,02	–
1	0,103	5,298	0,148	4,606	0,215	3,912
2	0,338	7,430	0,436	6,638	0,567	5,834
3	0,672	9,273	0,823	8,406	1,016	7,516
4	1,078	10,978	1,279	10,045	1,529	9,084
5	1,537	12,593	1,785	11,605	2,089	10,580
6	2,037	14,150	2,330	13,109	2,684	12,027



	$\alpha_1 = \alpha_2 = 5\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 10\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 20\%$	
$x_{\text{ist}}$	$E(X)_{\text{min}}$	$E(X)_{\text{max}}$	$E(X)_{\text{min}}$	$E(X)_{\text{max}}$	$E(X)_{\text{min}}$	$E(X)_{\text{max}}$
0	0,051	–	0,105	–	0,223	–
1	0,355	2,997	0,532	2,303	0,824	1,609
2	0,817	4,744	1,102	3,890	1,534	2,995
3	1,366	6,297	1,744	5,323	2,296	4,279
4	1,970	7,754	2,432	6,681	3,089	5,514
5	2,613	9,153	3,152	7,993	3,903	6,721
6	3,285	10,513	3,894	9,275	4,733	7,906



## Beispielaufgabe



- 1 Die mittlere Eintrittswahrscheinlichkeit einer Fehlfunktion sei  $p = 10^{-5}$  je Service-Anforderung. Bis zu wie vielen Service-Anforderungen  $N$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine Fehlfunktion eintritt, mindestens 99%?
- 2 Wie wahrscheinlich ist es, dass eine poisson-verteilte Zufallsgröße mit dem Erwartungswert  $E(X) = 0,6$  keinen Wert größer 3 hat?
- 3 Ein Kontrolle habe eine Maskierungswahrscheinlichkeit von  $p = 2^{-24}$ . Bis zu welcher Anzahl  $N$  von Service-Aufrufen treten mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 1\%$  nicht mehr als 4 Maskierungen auf?
- 4 Mit  $N = 10^5$  Service-Anforderungen wurden drei Fehlfunktionen beobachtet. Auf welche Unter- und Obergrenze für die Wahrscheinlichkeit einer Fehlfunktion je Service-Aufruf  $p$  lässt sich mit  $\alpha = 1\%$  schließen?



## Lösung Aufgabenteil 1

Die mittlere Eintrittswahrscheinlichkeit einer Fehlfunktion sei  $p = 10^{-5}$  je Service-Anforderung. Bis zu wie vielen Service-Anforderungen  $N$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine Fehlfunktion eintritt, mindestens 99%?

---

Für  $p = 10^{-5}$  soll  $P(X = 0) \geq 99\%$  sein:

$$\begin{aligned}P(X = 0) &= e^{-p \cdot N} \geq 99\% \\N &\leq \frac{1}{p} \cdot (-\ln(99\%)) \approx 10^3\end{aligned}$$



## Lösung Aufgabenteil 2

Wie wahrscheinlich ist es, dass eine poisson-verteilte Zufallsgröße mit dem Erwartungswert  $E(\varphi) = 0,6$  keinen Wert größer 3 hat?

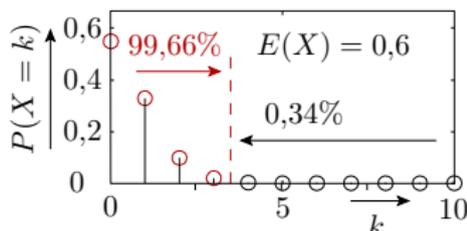
Gegeben:  $E(\varphi) = 0,6$ ,  $k_{\max} = 3$  . Gesucht:

$$P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^3 e^{-0,6} \cdot \frac{0,6^k}{k!}$$

Programmtechnische Lösung:

```
printf('P(k<=3)=%4.2f%%\n', 100*poiscdf(0.6, 3));  
>> P(k<=3)=99.66%
```

Ergebnis  
graphisch:





## Lösung Aufgabenteil 3

Ein Kontrolle habe eine Maskierungswahrscheinlichkeit von  $p = 2^{-24}$ . Bis zu welcher Anzahl  $N$  von Service-Aufrufen treten mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 1\%$  nicht mehr als 4 Maskierungen auf?

---

Zu bestimmen ist  $E_{\min}$ , so dass nicht mehr als  $k_{\text{ist}} = 4$  Maskierungen auftreten und dazu das  $N_{\min}$ , das multipliziert mit  $p = 2^{-24}$   $E_{\min}$  ergibt.

- Programmgestützte Berechnung von  $E(X)_{\min}$ :

```
printf('E_min=%4.2f\n', pois_E_min(0.01, 4))  
>> E_min=1.28
```

- Bestimmung von  $N_{\min}$  aus  $E(X)_{\min}$  und  $p$ :

$$N_{\min} = \frac{E(X)_{\min}}{2^{-24}} \approx 21,5 \cdot 10^6$$



## Lösung Aufgabenteil 4

Mit  $N = 10^5$  Service-Anforderungen wurden drei Fehlfunktionen beobachtet. Auf welche Unter- und Obergrenze für die Wahrscheinlichkeit einer Fehlfunktion je Service-Aufruf  $p$  lässt sich mit  $\alpha = 1\%$  schließen?

- $E(X)_{\min/\max}$  für  $k_{\text{ist}} = 3$  und  $\alpha = 1\%$  aus der Tabelle ablesen:

	$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$		$\alpha_1 = \alpha_2 = 2\%$	
$X_{\text{ist}}$	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$	$E(X)_{\min}$	$E(X)_{\max}$
2	0,338	7,430	0,436	6,639	0,567	5,835
3	0,672	9,274	<b>0,823</b>	<b>8,405</b>	1,016	7,517

- Der gesuchte Wahrscheinlichkeitsbereich ist der Erwartungsbereich geteilt durch  $N = 10^5$  Service-Anforderungen:

$$p_{\min} = 8,23 \cdot 10^{-6}; \quad p_{\max} = 8,405 \cdot 10^{-5}$$



# Fehler und FF



## Verteilung der Fehleranzahl



## Zählverteilung der Fehleranzahl

Von  $i = 1$  bis  $N_{PF}$  ist jeder potenzielle Fehler  $i$  mit einer Wahrscheinlichkeit  $p_i$  vorhanden. Beschreibung durch Bernoulli-Versuche mit den Zufallsgrößen:

$$\varphi_i = \begin{cases} 0 & \text{Fehler nicht vorhanden: } P(\varphi_i = 0) = 1 - p_i \\ 1 & \text{Fehler vorhanden: } P(\varphi_i = 1) = p_i \end{cases}$$

Anzahl aller vorhandenen Fehler:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N_{PF}} \varphi_i$$

Dieser Ansatz gilt gleichermaßen für:

- entstandene Fehler,
- vom Test nachweisbare Fehler,
- beseitigte Fehler,
- im Einsatz noch vorhandene Fehler, ...



## Kontrollfragen



Es sei unterstellt, dass zwischen dem Vorhandensein der zu zählenden Fehler keine Abhängigkeiten bestehen:

- 1 Wie groß ist der Erwartungswert?
- 2 Wie groß ist die Varianz?
- 3 Durch welche bekannten Verteilungen lässt sich die Verteilung der Fehleranzahl für viele potentielle Fehler annähern und was sind die Voraussetzung der jeweiligen Näherung?
- 4 Angenommen die zu zählenden Fehler sind nachweisbare Modellfehler und die Modellfehlermenge enthält immer paarweise zwei identische Fehler. Wie ändern sich Erwartungswert und Varianz?



## Antworten auf die Fragen 1 bis 3

- 1 Die zu erwartende Fehleranzahl als Summe der Erwartungswerte der Summanden beträgt nach Gl. 10:

$$E(\varphi) = \sum_{i=1}^{N_{\text{PF}}} p_i$$

- 2 Die Varianz der Fehleranzahl ist für unabhängig auftretende, nachweisbare, ... Fehler nach Gl. 11 die Summe der Varianzen:

$$D^2(\varphi) = \sum_{i=1}^{N_{\text{PF}}} p_i \cdot (1 - p_i)$$

- 3 Für eine kleine Anzahl ( $< 10$ ) auftretender, nachweisbarer, ... Fehler aus einer sehr großen Menge möglicher Fehler ist die Fehleranzahl näherungsweise poisson-verteilt. Für größere zu erwartende Zählwerte geht die Poisson-Verteilung in eine Normalverteilung über.



## Antworten auf die Frage 4

- 4 Angenommen die zu zählenden Fehler sind nachweisbare Modellfehler und die Modellfehlermenge enthält immer paarweise zwei identische Fehler. Wie ändern sich Erwartungswert und Varianz?

Nach Folie 85

- hat das keinen Einfluss auf den Erwartungswert.
- Die Varianz verdoppelt sich ( $\kappa = 2$ ) im Vergleich zu unabhängig auftretenden, nachweisbaren, ... Fehlern.



## Zufälliger Fehlernachweis

Ein Zufallstest mit  $n$  Testschritten hat nach Gl. 1 die Nachweiswahrscheinlichkeit

$$p(n) = 1 - e^{-n \cdot p}$$

( $n$  – Anzahl der Tests). Die zu erwartende Anzahl der nachweisbaren Fehler ist die Summe der Produkte aus den Wahrscheinlichkeiten »Fehler vorhanden« und »Fehler nachweisbar«:

$$E(\varphi_{\text{Erk}}, n) = \sum_{i=1}^{N_{\text{PF}}} p_{i.\text{vorh}} \cdot (1 - e^{-n \cdot p_{i.\text{nachw}}})$$

Die zu erwartende Fehlerüberdeckung ist zusätzlich durch die zu erwartende Anzahl der Fehler vor dem Test zu teilen:

$$E(FC) = \frac{E(\varphi_{\text{Erk}}, n)}{E(\varphi)} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{\text{PF}}} p_{i.\text{vorh}} \cdot (1 - e^{-n \cdot p_{i.\text{nachw}}})}{\sum_{i=1}^{N_{\text{PF}}} p_{i.\text{vorh}}}$$

Modellfehler (Anzahl  $N_{\text{MF}}$ ) sind immer vorhanden ( $p_{i.\text{vorh}} = 1$ ):

$$E(FC) = \frac{\sum_{i=1}^{N_{\text{MF}}} (1 - e^{-n \cdot p_{i.\text{nachw}}})}{N_{\text{MF}}}$$

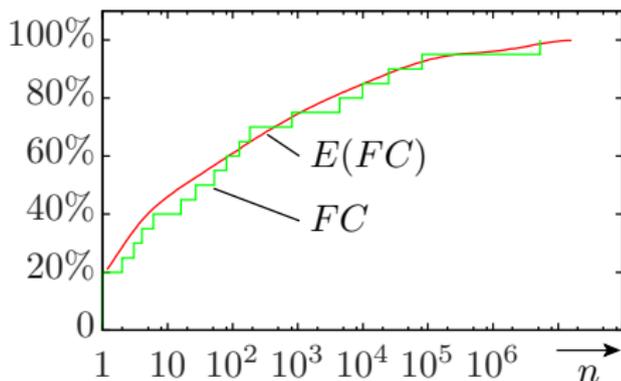


Das nachfolgende Simulationsexperiment unterstellt für  $N_{MF} = 20$  Modellfehler Wahrscheinlichkeiten und berechnet daraus die zu erwartende Fehlerüberdeckung in Abhängigkeit von  $n$ :

```
p = [ 0.9  0.8  0.8  0.7  0.6  0.5  0.3  0.2 ...
      8E-2 5E-2 2E-2 1E-2 7E-3 2E-3 8E-4 2E-4 ...
      9E-5 5E-5 7E-6 3E-7] ;
```

```
N_MF = length(p); Nmax = 4/p(N_MF);
```

```
for i=1:N_MF
  n(i) = Nmax**(i/N_MF);
  sum=0;
  for j=1:N_MF
    sum=sum+exp(-n(i)*p(j));
  end
  E(i)=1-sum/N_MF;
end
semilogx(n, E);
```



Die zu Beginn sehr starke und mit der Größenordnung von  $n$  abnehmende Zunahme der Fehlerüberdeckung ist typisch.



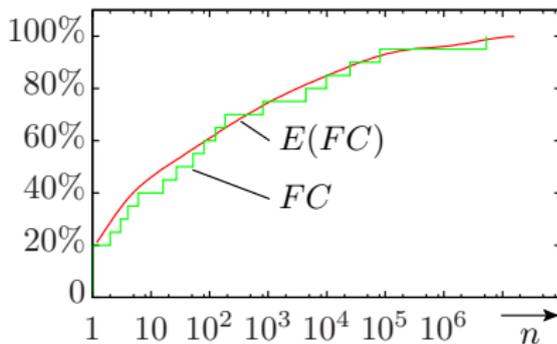
## FHNW-Funktion

## Die FHNW-Funktion

Die FHNW-Funktion  $H(p)$  beschreibt die Häufigkeit der Fehler in Abhängigkeit von ihrer Nachweiswahrscheinlichkeit. Mit ihr beträgt die zu erwartende Anzahl der mit einem Zufallstest erkennbaren Fehler:

$$\begin{aligned}
 E(\varphi_{\text{Erk}}, n) &= \sum_{i=1}^{N_{\text{PF}}} p_{i.\text{vorh}} \cdot (1 - e^{-n \cdot p_{i.\text{nachw}}}) \\
 &= \int_0^{\infty} H(p) \cdot (1 - e^{-n \cdot p}) \cdot dp \text{ mit } H(p) = 0 \text{ für } p > 1
 \end{aligned}$$

Für die Abbildung ist  $H(p)$  für  $p \in \{0,9, 0,7, \dots, 3 \cdot 10^{-3}\}$  eins, für  $p = 0,8$  zwei und sonst null (siehe Folie zuvor). Falls nicht wie hier vorgegeben, ist für  $E(\varphi_{\text{Erk}}, n)$  ein  $H(p)$  zu suchen, was zu dieser führt.



## Kontrollfragen



- 1 Wie groß ist die zu erwartende Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler  $E(\varphi_{\text{NErk}}, n)$  in Abhängigkeit von der Testsatzlänge und der FHNW-Funktion?
- 2 Wie groß ist die zu erwartende Fehlerüberdeckung  $E(FC, n)$  in Abhängigkeit von der Testsatzlänge und der FHNW-Funktion?
- 3 Warum muss die FHNW-Funktion  $H(p)$  für  $p > 1$  null sein.

## Antworten

- 1 Zu erwartende Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler:

$$\begin{aligned} E(\varphi_{\text{NErk}}, n) &= \sum_{i=1}^{N_{\text{PF}}} p_{i.\text{vorh}} \cdot e^{-n \cdot p_{i.\text{nachw}}} \\ &= \int_0^{\infty} H(p) \cdot e^{-n \cdot p} \cdot dp \text{ mit } H(p) = 0 \text{ für } p > 1 \end{aligned}$$

- 2 Zu erwartende Fehlerüberdeckung:

$$\begin{aligned} E(FC, n) &= \frac{\sum_{i=1}^{N_{\text{PF}}} p_{i.\text{vorh}} \cdot (1 - e^{-n \cdot p_{i.\text{nachw}}})}{\sum_{i=1}^{N_{\text{PF}}} p_{i.\text{vorh}}} \\ &= \frac{\int_0^{\infty} H(p) \cdot (1 - e^{-n \cdot p}) \cdot dp}{\int_0^{\infty} H(p) \cdot dp} \text{ mit } H(p) = 0 \text{ für } p > 1 \end{aligned}$$

- 3  $H(p)$  muss für  $p > 1$  null sein, weil es keine Fehler mit einer Nachweiswahrscheinlichkeit größer eins gibt.



## Potenzfunktion als FHNW-Funktion

Als asymptotische Näherung nimmt die zu erwartende Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler weniger als umgekehrt proportional mit der Testsatzlänge ab:

$$E(\varphi_{\text{NErk}}, n) = E(\varphi_{\text{NErk}}, n_0) \cdot \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-k} \quad (19)$$

( $n_0$  – Bezugstestsatzlänge;  $E(\varphi_{\text{NErk}}, n_0)$  – zu erwartende Anzahl der Fehler, die mit der Testsatzlänge  $n_0$  nicht nachweisbar sind;  $k$  – Ordnung bzw. Exponent der Abnahme). Die dazu passende FHNW-Funktion ist:

$$H(p) = \frac{E(\varphi_{\text{NErk}}, n_0) \cdot p^{k-1}}{n_0^{-k} \cdot k} \cdot e^{-n_0 \cdot p} \quad (20)$$

Wobei die Bezugstestsatzlänge  $n_0$  so groß sein muss, dass  $H(p)$  für  $p > 1$  null ist.



## Probe

Anzahl der mit weiteren  $n - n_0$  Tests nicht nachweisbaren Fehler:

$$\begin{aligned} E(\varphi_{\text{NErk}}, n) &= \int_0^{\infty} H(p) \cdot e^{-(n-n_0) \cdot p} \cdot dp \\ &= \frac{E(\varphi_{\text{NErk}}, n_0)}{n_0^{-k} \cdot k} \cdot \int_0^{\infty} p^{k-1} \cdot e^{-n \cdot p} \cdot dp \end{aligned}$$

Die Substitution  $p = \frac{x}{n}$ ;  $dp = \frac{dx}{n}$  holt die Testdauer  $n$  aus dem Integral:

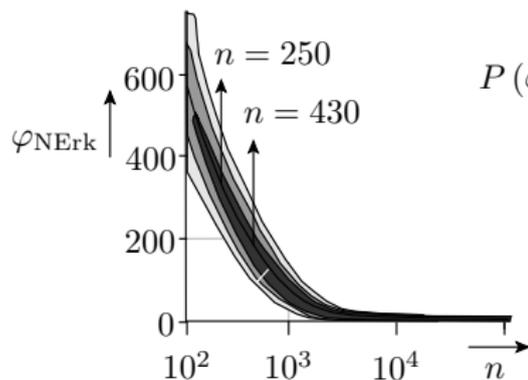
$$E(\varphi_{\text{NErk}}, n) = \frac{E(\varphi_{\text{NErk}}, n_0)}{k} \cdot \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-k} \underbrace{\int_0^{\infty} x^{k-1} \cdot e^{-x} \cdot dx}_{\Gamma(k)=k}$$

Das Restintegral ist die Gamma-Funktion  $\Gamma(k)$  und diese für  $0 < k \leq 1$  gleich  $k$ .

## Experiment zur Haftfehlerüberdeckung

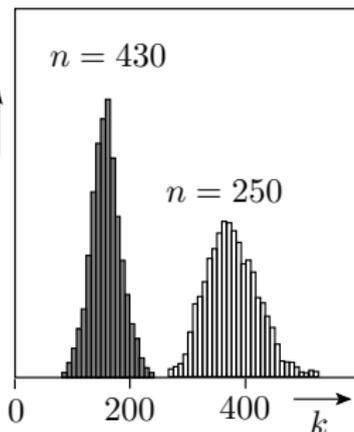
Kombinatorische Beispielschaltung (Benchmark c3540). Betrachtete Fehler sind 3606 simulierte, unterschiedlich nachweisbare Haftfehler. Bestimmung der Verteilung mit 1000 verschiedenen Zufallstestsätzen.

Verteilung der Anzahl der nicht erkannten Modellfehler als Funktion von  $n$  (Benchmark c3540, 3606 Haftfehler)



$P(\varphi_{NErk} = k)$

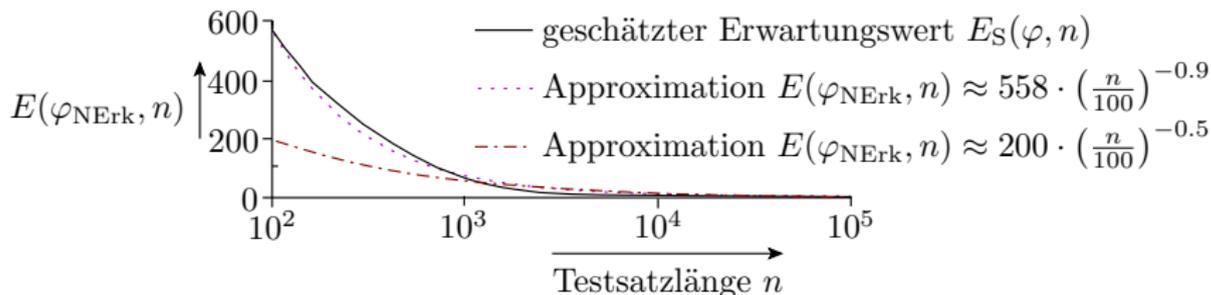
Verteilung für zwei Testsatzlängen



## Annäherung von $E(\varphi_{\text{NErk}}, n)$ durch eine Potenzfunktion

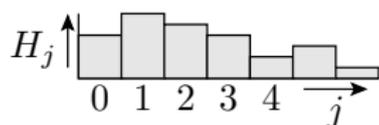
Annäherung der zu erwartenden Anzahl der nachweisbaren Fehler durch eine Potenzfunktion nach Gl. 19:

$$E(\varphi_{\text{NErk}}, n) = E(\varphi_{\text{NErk}}, n_0) \cdot \varphi_0 \cdot \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-k}$$



Die Approximation mit  $k = 0,9$  nähert den Bereich  $n < 1000$  und die mit  $k = 0,5$  den Bereich  $n > 1000$  Testschritte besser an.

## FHNW-Histogramm



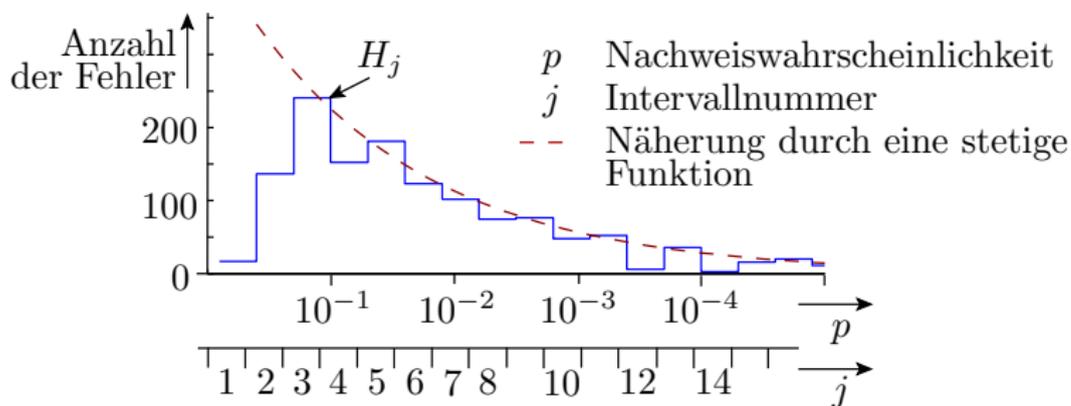
Ein FNHW-Histogramm  $H_j$  unterteilt die möglichen Werte der Nachweiswahrscheinlichkeitswerte  $[0, 1]$  in Intervalle  $w_j$ , z.B.  $w_0 = (\frac{1}{2}, 1]$ ,  $w_1 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ , ... und gibt für jedes Intervall die Anzahl der Fehler mit einer Nachweiswahrscheinlichkeit in diesem Bereich an.

Im weiteren verwendete Intervallaufteilung:

$$w_j = \left( v^{-(j+1)}, v^{-j} \right]$$

( $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$  – Intervallnummer;  $v > 1$  – relative Intervallbreite). Die relative Intervallbreite  $v$  ist so zu wählen, dass sich die Fehler auf mehrere Intervalle aufteilen und jedem Intervall eine signifikante Anzahl von Fehlern zugeordnet sind.

## FHNW-Histogramm mit 3 Intervallen pro Dekade



Drei Intervalle pro Dekade:

$$v^3 = 10$$

$$v = \sqrt[3]{10}$$

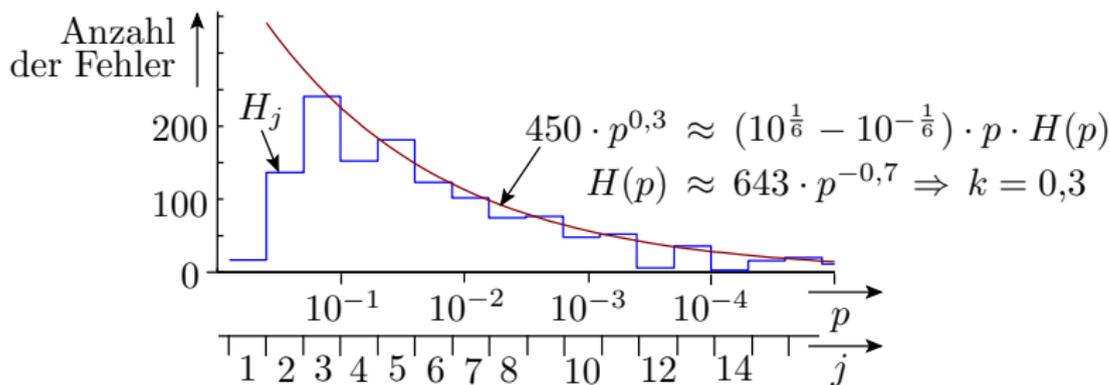
Die Säulenhöhe ist das Integral der FHNW-Funktion über die Intervallbreite.

$$H_j = \int_{v^{-(j+1)}}^{v^{-j}} H(p) \cdot dp$$

Für Überschläge ist die Säulenhöhe  $H_j$  proportional zu  $p \cdot H(p)$ :

$$\begin{aligned} H_j &\approx \left( v^{-j} - v^{-(j+1)} \right) \cdot H \left( v^{-(j+0,5)} \right) \\ &\approx p \cdot H(p) \cdot \left( \sqrt{v} - \frac{1}{\sqrt{v}} \right) \text{ für } p = v^{-(j+0,5)} \end{aligned}$$

Asymptotische Annäherung des FHNW-Histogramms durch eine Potenzfunktion:



## Beispielaufgabe



- 1 Erstellen Sie ein FHNW-Histogramm für die nachfolgenden von Folie 167 übernommenen Fehlernachweiswahrscheinlichkeiten:

$$p = [ \begin{array}{cccccccc} 0.9 & 0.8 & 0.8 & 0.7 & 0.6 & 0.5 & 0.3 & 0.2 & \dots \\ 8E-2 & 5E-2 & 2E-2 & 1E-2 & 7E-3 & 2E-3 & 8E-4 & 2E-4 & \dots \\ 9E-5 & 5E-5 & 7E-6 & 3E-7 \end{array} ] ;$$

mit der relativen Intervallbreite  $v = 10$ .

- 2 Schätzen Sie aus  $H_j$  für eine asymptotische FHNW-Funktion nach Gl. 20

$$H(p) \sim p^{k-1}$$

für  $p \ll \frac{1}{n_0}$  den Exponenten  $k$  ab.



## Lösung

- 1 Intervallgröße  $v = 10$ . Wahrscheinlichkeitswerte:

$$p = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.8 & 0.8 & 0.7 & 0.6 & 0.5 & 0.3 & 0.2 & \dots \\ 8E-2 & 5E-2 & 2E-2 & 1E-2 & 7E-3 & 2E-3 & 8E-4 & 2E-4 & \dots \\ 9E-5 & 5E-5 & 7E-6 & 3E-7 \end{bmatrix} ;$$

Intervalle:  $w_0 = (0,1, 1]$ ,  $w_2 = (0,01, 0,1]$ , ...; Zählwerte je Intervall:

$j$	0	1	2	3	4	5	6	7
$H_j$	8	4	2	2	2	2	1	1

- 2 Schätzen des Exponenten  $k$  aus  $H_j$ : Im Mittel alle zwei Dekaden Halbierung der Fehleranzahl :

$$0,01^k \approx 0,5$$

$$k \approx \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,01)} = 0,15$$

Wegen  $p \cdot H(p) \sim p^k$  ist das auch das  $k$  in Gl. 20.



## Effektive Fehleranzahl



## Varianz der nicht nachweisbaren Fehler

Für nicht nachweisbare Fehler gilt:

$$\varphi_{\text{NErk}.i} = \begin{cases} 0 & \text{nicht vorhanden. oder nachweisb.: } P(\varphi_i=0) = 1 - h_i \cdot e^{-n \cdot p_i} \\ 1 & \text{vorhanden und nicht nachweisbar: } P(\varphi_i=1) = h_i \cdot e^{-n \cdot p_i} \end{cases}$$

$$\varphi_{\text{NErk}} = \sum_{i=1}^{N_{\text{PF}}} \varphi_{\text{NErk}.i}$$

Erwartungswert:

$$E(\varphi_{\text{NErk}}) = \sum_{i=1}^{N_{\text{PF}}} h_i \cdot e^{-n \cdot p_i} = \int_0^{\infty} H(p) \cdot e^{-n \cdot p} \cdot dp$$

Varianz, wenn alle nicht nachweisbaren Fehler unabhängig voneinander nachweisbar sind:

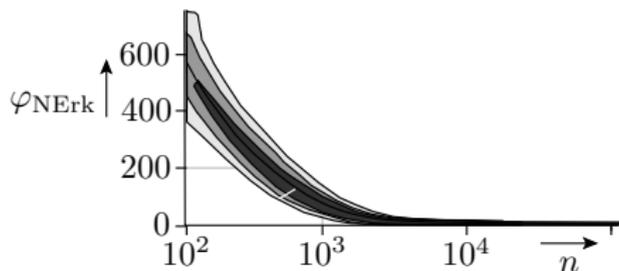
$$D^2(\varphi_{\text{NErk}}) = \sum_{i=1}^{N_{\text{PF}}} h_i \cdot e^{-n \cdot p_i} \cdot (1 - h_i \cdot e^{-n \cdot p_i}) \leq E(\varphi_{\text{NErk}}) \cdot \left(1 - \frac{E(\varphi_{\text{NErk}})}{N_{\text{PF}}}\right)$$

## Effektive Modellfehleranzahl $N_{MF,eff}$

Abhängigkeiten im Fehlernachweis führen zu einer Varianzerhöhung

$$\kappa \geq \frac{D^2(\varphi_{NErk})}{E(\varphi_{NErk}) \cdot \left(1 - \frac{E(\varphi_{NErk})}{N_{PF}}\right)}$$

Für den Versuch auf Folie 174 sind die Nachweisabhängigkeiten offenbar bei vielen nicht nachweisbaren Fehlern erheblich und bei wenigen nicht. (Identisch nachweisbare Fehler waren aus der Haftfehlermenge entfernt.)



$n$	$E(\varphi_{NErk})$	$\sqrt{D^2(\varphi_{NErk})}$	$D^2(\varphi_{NErk})$	$\kappa$	$N_{MF,eff}$
160	415	43,3	1875	5,1	706
320	234	30,7	943	4,3	837
800	90	17,3	299	3,4	1057
1600	29	7,2	52	1,8	2001
3200	11	2,9	8,4	1	3606



## Simulation mit Fehlerstichproben

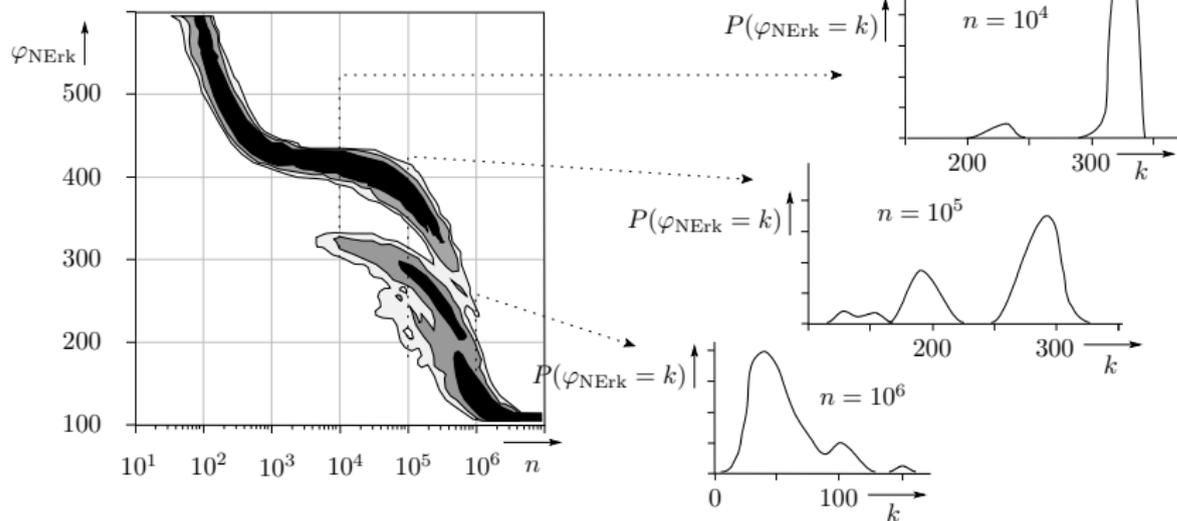
Im nachfolgenden Versuch wird eine zufällige Fehlerstichprobe von 1000 bzw. 300 der 3606 Haftfehler simuliert. Das naheliegende Ergebnis ist eine Verringerung der Abhängigkeiten im Fehlernachweis, erkennbar an einer effektiven Fehleranzahl, die näher an der tatsächlich simulierten Fehleranzahl liegt.

$n$	160	320	800	1600	3200
$N_{MF.eff}$ für $N_{MF} = 1000$	594	629	630	1000	1000
$N_{MF.eff}$ für $N_{MF} = 300$	297	268	277	231	300

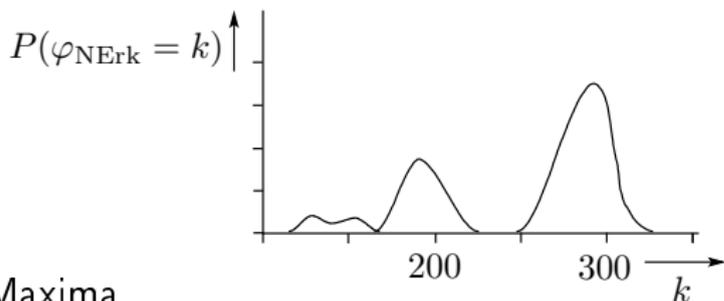
Bei der Stichprobe von 1000 Fehlern ist die effektive Fehleranzahl im ungünstigste Fall fast halb so groß und bei 300 Modellfehler 77% der Anzahl der simulierten Fehler.

## Ein zweites Experiment zur Haftfehlerüberdeckung

Dasselbe Experiment mit der kleineren Benchmark-Schaltung c2670 mit 2670 Haftfehlern:



Im Bereich von  $n = 10^4$  bis  $10^6$  multimodale Verteilung.



Verteilung mit mehreren Maxima

- Wie kann ein Zählprozess eine solche Verteilungen haben?

Gedankenexperiment:

- zehn Modellfehler, davon acht identisch nachweisbar.
- Wertebereich für die Anzahl der nachgewiesenen Fehler:

$$k \in \{0, 1, 2, 8, 9, 10\}$$

Die Verteilung zerfällt in zwei Teilkämme.

- Die Haftfehlermenge des c2670 enthält offenbar ca. 80 sehr ähnlich nachweisbare Fehler.



## Beispielaufgabe



Bei zehn Wiederholungen einer Fehlersimulation von  $N_{MF} = 500$  Modellfehlern mit  $n = 10^4$  unterschiedlichen zufällig gewählten Testbeispielen betrug die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler:

Versuch $i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varphi_{NErk.i}$	37	52	61	44	51	38	47	53	31	45

- 1 Wie groß ist die Varianzerhöhung  $\kappa$  gegenüber einer Menge unabhängig voneinander nachweisbarer Modellfehler?
- 2 Wie groß ist die effektive Modellfehleranzahl  $N_{MF,eff}$ ?



## Lösung

Versuch $i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varphi_{\text{NErk}.i}$	37	52	61	44	51	38	47	53	31	45

- Erwartungswert nach Gl. 5:

$$E_S(\varphi_{\text{NErk}}) = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} \varphi_{\text{NErk}.i} = 45$$

- Varianz der Datenstichprobe nach Gl. 6:

$$D_S^2(\varphi_{\text{NErk}}) = \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{10} (\varphi_{\text{NErk}.i} - 45)^2 = 80$$

- 1 Varianzerhöhung  $\kappa$  nach Gl. ??:

$$\kappa \approx \frac{D_S^2(\varphi_{\text{NErk}})}{E_S(\varphi_{\text{NErk}}) \cdot \left(1 - \frac{E_S(\varphi_{\text{NErk}})}{N_{\text{MF}}}\right)} = \frac{80}{45 \cdot \left(1 - \frac{45}{500}\right)} = 1,95$$

- 2 Effektive Fehleranzahl:

$$N_{\text{MF.eff}} = \frac{N_{\text{MF}}}{\kappa} = 256$$



## Fehlfunktionen durch Fehler



## Verteilung der Anzahl der Fehlfunktionen

Bei jedem der  $j = 1$  bis  $N_{SA}$  ( $N_{SA}$  – Anzahl der Service-Aufrufe) kommt es mit einer Wahrscheinlichkeit  $p_{FF}$  zu einer Fehlfunktion. Beschreibung durch Bernoulli-Versuche mit den Zufallsgrößen:

$$\zeta_j = \begin{cases} 0 & \text{FF nicht vorhanden: } P(\zeta_i = 0) = 1 - p_{FF} \\ 1 & \text{FF vorhanden: } P(\zeta_i = 1) = p_{FF} \end{cases}$$

( $\zeta$  – Zeta; FF – Fehlfunktion). Anzahl der auftretenden Fehlfunktionen:

$$\zeta = \sum_{i=1}^{N_{SA}} \zeta_i$$

Binomialverteilung:

$$E(\zeta) = N_{SA} \cdot p_{FF}$$

$$D^2(\zeta) = N_{SA} \cdot p_{FF} \cdot (1 - p_{FF})$$

$$P(\zeta = k) = \binom{N_{SA}}{k} \cdot p_{FF}^k \cdot (1 - p_{FF})^{N_{SA} - k}$$



## Durch Fehler verursachte Fehlfunktion

Wenn Test und Anwendung mit ähnlichem Operationsprofil erfolgen, ist die Auftretswahrscheinlichkeit einer Fehlfunktion etwa die Nachweiswahrscheinlichkeit  $p_i$  des Fehlers. Die Wahrscheinlichkeit, dass einer der  $N_{\text{PF}}$  potentiellen Fehler eine Fehlfunktionen verursacht

$$p_{\text{FFF}} = 1 - \prod_{i=1}^{N_{\text{PF}}} (1 - p_i)$$

ist für sehr kleine  $p_i$ 's deren Summe, darstellbar als Integral über  $p \cdot H(p)$ :

$$p_{\text{FFF}} = \sum_{i=1}^{N_{\text{PF}}} p_i = \int_0^{\infty} p \cdot H(p) \cdot dp$$

Die zu erwartende Anzahl der durch Fehler verursachten Fehlfunktionen ist das Produkt aus der Wahrscheinlichkeit  $p_{\text{FFF}}$  und der Anzahl  $N_{\text{SA}}$  der Service-Anforderungen:

$$E(\zeta_{\text{F}}) = N_{\text{SA}} \cdot \int_0^{\infty} p \cdot H(p) \cdot dp$$



## Zufallstest und Beseitigung erkannter Fehler

Bei einem Zufallstest und Beseitigung der erkennbaren Fehler nimmt die Auftrittshäufigkeit proportional zu  $e^{-n \cdot p}$  ab:

$$H(p, n) = H(p) \cdot e^{-n \cdot p}$$

( $H(p)$  – FHNW-Funktion vor der Fehlerbeseitigung,  $H(p, n)$  – FHNW-Funktion nach Beseitigung der mit  $n$  Testschritten nachweisbaren Fehler). Reduzierung der zu erwartenden Anzahl der Fehler auf die nicht erkannten (siehe Aufgabenlösung auf Folie 1):

$$E(\varphi, n) = E(\varphi_{\text{NErk}}, n) = \int_0^{\infty} H(p) \cdot e^{-n \cdot p} \cdot dp$$

Reduzierung der zu erwartenden Anzahl der Fehlfunktionen:

$$E(\zeta_F) = N_{\text{SA}} \cdot \int_0^{\infty} p \cdot H(p) \cdot e^{-n \cdot p} \cdot dp \quad (21)$$



## Potenz-FHNW-Funktion

Mit der Potenzfunktion Gl. 20 und  $E(\varphi_{\text{NErk}}, n_0) = E(\varphi, n_0)$

$$H(p) = \frac{E(\varphi, n_0) \cdot p^{k-1}}{n_0^{-k} \cdot k} \cdot e^{-n_0 \cdot p} \quad (22)$$

als FHNW-Funktion und Ersatz der Testsatzlänge durch die zusätzliche Testsatzlänge  $n - n_0$ :

$$E(\zeta_F, n) = \frac{N_{\text{SA}} \cdot E(\varphi, n_0)}{n_0^{-k} \cdot k} \cdot \int_0^\infty p \cdot p^{k-1} \cdot H(p) \cdot e^{-n \cdot p} \cdot dp$$

( $n_0$  – Bezugstestsatzlänge;  $E(\varphi, n_0)$  – zu erwartende Anzahl der Fehler, die mit  $n_0$  nicht nachgewiesen und beseitigt sind;  $k$  – Ordnung bzw. Exponent der Abnahme). Die Substitution  $p = \frac{x}{n}$ ;  $dp = \frac{dx}{n}$  holt die Testdauer  $n$  aus dem Integral:

$$E(\zeta_F, n) = \frac{N_{\text{SA}} \cdot E(\varphi, n_0)}{n_0 \cdot k} \cdot \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-(k+1)} \int_0^\infty x^k \cdot e^{-x} \cdot dx$$



$$E(\zeta_F, n) = \frac{N_{SA} \cdot E(\varphi, n_0)}{n_0 \cdot k} \cdot \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-(k+1)} \underbrace{\int_0^\infty x^k \cdot e^{-x} \cdot dx}_{\Gamma(k+1)=k!}$$

Das Restintegral ist  $\Gamma(k+1) = k!$  für  $0 < k < 1$ :

$$E(\zeta_F, n) = \frac{k \cdot N_{SA} \cdot E(\varphi, n_0)}{n_0} \cdot \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-(k+1)} \quad (23)$$

Einsetzen der zu erw. Anzahl der nicht erkannten Fehler nach Gl. 19

$$E(\varphi_{NErk}, n) = E(\varphi_{NErk}, n_0) \cdot \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-k}$$

als zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler  $E(\varphi, n)$  in Gl. 23:

$$E(\zeta_F, n) = \frac{k \cdot N_{SA} \cdot E(\varphi_{NErk}, n)}{n} \quad (24)$$

Werden bei einem Zufallstest alle erkennbaren Fehler beseitigt, nimmt die zu erwartende Anzahl der FF proportional zum Verhältnis aus der zu erwartenden Anzahl der verbleibenden Fehler und der Testsatzlänge ab.

## Beispielaufgabe



Nach einem Zufallstest mit  $n_0 = 10^5$  Testbeispielen und Beseitigung aller erkannten Fehler betrug die Häufigkeit der FF durch Fehler<sup>8</sup>:

$$\frac{E(\zeta_F, n_0)}{N_{SA}} = p_{FFF} \approx 10^{-4}$$

Als FHNW-Funktion sei eine Potenzfunktion mit einem Exponenten  $k$  zwischen 0,3 und 0,7 angenommen.

- 1 Auf welche Anzahl nicht beseitigter Fehler lässt das schließen?
- 2 Auf welchen Wert verringert sich die zu erwartende Anzahl der nicht beseitigten Fehler, bei der 10-fachen Testsatzlänge und Beseitigung aller erkennbaren Fehler?
- 3 Auf welchen Wert verringert sich die zu erwartende Anzahl der FFs durch Fehler bei 10-facher Testsatzlänge + Beseit.?

<sup>8</sup>Annahme, gleiches Operationsprofil im Einsatz wie beim Test.



## Lösung Aufgabenteil 1 und 2

Zufallstest Länge  $n_0 = 10^5$ . Beseitigung aller erkannten Fehler.  
 Häufigkeit FF durch Fehler  $\frac{E(\zeta_F, n_0)}{N_{SA}} \approx 10^{-4}$ .  $k \in (0,3, 0,5)$ .

- 1 Anzahl nicht beseitigter Fehler nach Gl. 24:

$$E(\zeta_F, n_0) = \frac{k \cdot N_{SA} \cdot E(\varphi_{Nerk}, n_0)}{n_0}$$

$$E(\varphi_{Nerk}, n_0) = \frac{n_0 \cdot E(\zeta_F, n_0)}{k \cdot N_{SA}} = \frac{10}{k}$$

$k$	$E(\varphi_{Nerk}, 10^5)$
0,3	33,3
0,4	25
0,5	20
0,6	16,7
0,7	14,3

- 2 Anzahl nicht beseitigter Fehler nach der 10-fachen Testsatzlänge:

$$E(\varphi_{Nerk}, n) = E(\varphi_{Nerk}, n_0) \cdot \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-k}$$

$$= \frac{10}{k} \cdot 10^{-k}$$

$k$	$E(\varphi_{Nerk}, 10^6)$
0,3	16,7
0,4	9,95
0,5	6,32
0,6	4,19
0,7	2,85



## Lösung Aufgabenteil 3

3 Häufigkeit der Fehlfunktionen nach der 10-facher Testsatzlänge:

$$\frac{E(\zeta_F, n)}{N_{SA}} = \frac{k \cdot E(\varphi_{Nerk}, n)}{n} = \frac{k \cdot \left(\frac{10}{k} \cdot 10^{-k}\right)}{10^6}$$

	$k=0,3$	$k=0,4$	$k=0,5$	$k=0,6$	$k=0,7$
$\frac{E(\zeta_F, 10^5)}{N_{SA}}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$
$E(\varphi_{Nerk}, 10^5)$	33,3	25	20	16,7	14,3
$\frac{E(\zeta_F, 10^6)}{N_{SA}}$	$5,01 \cdot 10^{-6}$	$3,98 \cdot 10^{-6}$	$3,16 \cdot 10^{-6}$	$2,51 \cdot 10^{-6}$	$2,00 \cdot 10^{-6}$
$E(\varphi_{Nerk}, 10^6)$	16,7	9,95	6,32	4,19	2,85

Die Häufigkeit der Fehlfunktionen verringert sich im Gegensatz zur Anzahl der nicht erkannten und beseitigten Fehler um mehr als Faktor 10 und hängt deutlich weniger von  $k$  ab.



## Fehler und Modellfehler

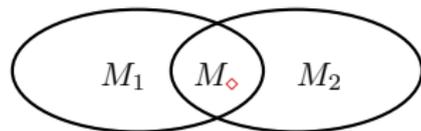
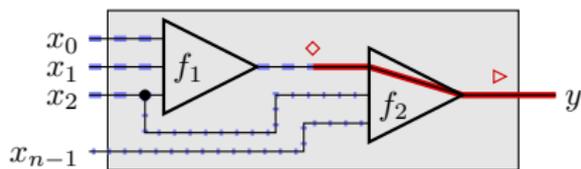


## Modellfehler, Nachweismengen und -bedingungen

- Modellfehler: Beispielfehler mit exakt vorgegebenem Fehlverhalten (siehe Foliensatz F2).
- Nachweismenge: Menge von Eingaben, mit denen ein Fehler nachweisbar ist.
- Nachweisbedingungen: Voraussetzungen für den Fehlernachweis, z.B. dass für den Nachweis eines Fehlers in einem Teil-Service, dieser ausgeführt und seine Ergebnisse beobachtbar sind.
- Ein Fehlermodell ist ein Algorithmus/Rezept/Regelwerk, mit dem für das Testobjekt eine Menge von Modellfehlern ausgewählt wird.
- Modellfehler dienen entweder zur Suche geeigneter Testeingaben oder zur Abschätzung der Fehlerüberdeckung für einen gegebenen (meist zufällig ausgewählten) Testsatz.

Der Nachweis eines lokalen Fehlers in einem System verlangt Testeingaben, die

- den Fehler anregen<sup>9</sup> und
- einen Beobachtungspfad erzeugen, entlang dem sich die Verfälschung zu einem beobachtbaren Ausgang fortplant.



- ◇ Fehler
- ▷ Fehlfunktion (Datenverfälschung)
- - - Eingaben zur Fehleranregung
- ⋯ Einstellen der Beobachtbarkeit
- Beobachtungspfad

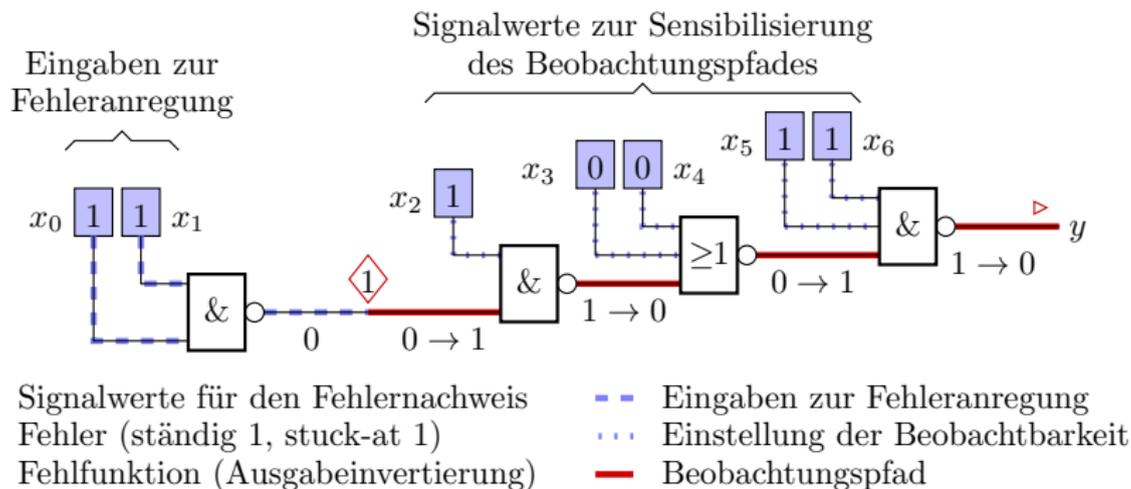
- $M_1$  Eingabemenge, mit der der Fehler angeregt wird
- $M_2$  Eingabemenge, bei der der Fehlerort beobachtbar ist
- $M_\diamond$  Nachweismenge des Fehlers

Die Nachweismenge eines (Modell-) Fehlers ist die Schnittmenge der Eingabemengen, die die einzelnen Nachweisbedingungen erfüllen.

<sup>9</sup>Eingaben, bei denen der Fehler eine lokale Datenverfälschung bewirkt.



# Nachweisbedingungen in einer Gatterschaltung



Eingabemenge Fehleranregung:  $M_1 = \{- - - - 11\}$

Eingabemenge Beobachtbarkeit:  $M_2 = \{11001- -\}$

Fehlernachweismenge:  $M_1 \cap M_2 = \{1100111\}$



## Verallgemeinerung

- Der Fehlernachweis kann auch von gespeicherten Zuständen abhängen. Anregung/Beobachtung über eine Eingabefolge.
- Der Fehlernachweis kann weiterhin von eingabeunabhängigen Bedingungen abhängen, z.B. Bereich der Versorgungsspannung, ...

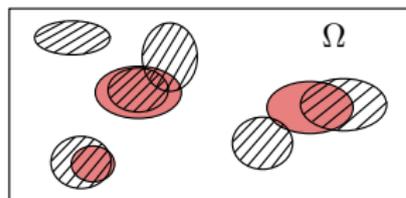
---

Aufspaltung des Fehlernachweises in mehrere Einzelbedingungen:

$$x \in (M_1 \cap M_2 \cap \dots \neq \emptyset) \wedge B_1 \wedge B_2 \wedge \dots$$

( $M_i$  – Eingabemenge einer notwendigen Anregungs- oder Beobachtungsbedingung;  $B_i$  – eingabeunabhängige Nachweisbedingung;  $\emptyset$  – leere Menge).

## Fehler- und Modellfehlerachweis



$\Omega$  Menge der Eingabewerte / Teilfolgen die einen Fehler nachweisen können

 Nachweismenge eines Modellfehlers

 Nachweismenge eines tatsächlichen Fehlers

- Ein Fehlermodell erzeugt viele Modellfehler.
- Alle potenziellen Fehler und alle Modellfehler haben Nachweismengen, die sich mehr oder weniger überschneiden.
- Gezielte Testauswahl sucht für jeden Modellfehler nach Tests und hofft mit den Tests auch die tatsächlichen Fehler zu treffen.
- Ein Zufallstest wählt die Tests, ohne die Nachweismengen der Modellfehler zu bevorzugen, sondern zählt nur die »Treffer« zur Abschätzung der Fehlerüberdeckung.



## Fehler- und Modellfehlerüberdeckung Zufallstest

Der Zusammenhang zwischen der Fehler- und der Modellfehlerüberdeckung basiert auf Ähnlichkeiten der FHNW-Funktionen. Idealerweise unterscheiden sich beide Funktionen nur in der Skalierung der Häufigkeits- und der Wahrscheinlichkeitsachse:

$$H_M(p) \approx b \cdot H(c \cdot p)$$

( $H(p)$  – FHNW-Funktion der Fehler;  $H_M(p)$  – der Modellfehler;  $b$  – Skalierung Häufigkeitsachse;  $c$  – Skalierung der Wahrscheinlichkeitsachse). Resultierende Beziehungen zwischen den zu erwartenden Fehlerüberdeckungen:

$$E(FC) \approx 1 - \frac{\int_0^\infty H(p) \cdot e^{-np} \cdot dp}{\int_0^1 H(p) \cdot dp}$$

$$E(FC_M) \approx 1 - \frac{\int_0^\infty b \cdot H(c \cdot p) \cdot e^{-np} \cdot dp}{\int_0^\infty b \cdot H(c \cdot p) \cdot dp}$$

$b$  kürzt ich heraus. Substitution  $q = c \cdot p$



$$E(FC_M) \approx 1 - \frac{\int_0^\infty H(c \cdot p) \cdot e^{-np} \cdot dp}{\int_0^\infty H(c \cdot p) \cdot dp}$$

Mit  $q = c \cdot p$  kürzt sich außer im Exponenten auch  $c$  heraus:

$$E(FC_M) \approx 1 - \frac{\int_0^\infty H(q) \cdot e^{-\frac{n}{c} \cdot q} \cdot \frac{dq}{c}}{\int_0^\infty H(q) \cdot \frac{dq}{c}} = 1 - \frac{\int_0^\infty H(q) \cdot e^{-\frac{n}{c} \cdot q} \cdot dq}{\int_0^\infty H(q) \cdot dq}$$

Voraussetzung ist  $H(p) = 0$  sowohl für  $p > 1$  als auch für  $q = c \cdot p > 1$ : Mit einem groben Vortest und Beseitigung der erkannten Fehler erfüllbar. Ergebnis:

$$E(FC_M(n)) \approx E\left(FC\left(\frac{n}{c}\right)\right)$$

## Fakt 7

*Die Modellfehlerüberdeckung ist tendenziell die Fehlerüberdeckung der  $c$ -fachen Testsatzlänge.*

( $c$  – Skalierungsfaktor des Fehlermodells).



## Erforderliche Testsatzlänge



## Erforderliche Testsatzlänge

Für Zufallstests beschränkt sich die Testauswahl auf die Festlegung der Testsatzlänge. Abschätzung der erforderlichen Testsatzlänge:

- Fehlersimulation bis zu einer hinreichenden Modellfehlerüberdeckung. Skalierung der so bestimmten Testsatzlänge.
- Schätzen der FHNW-Funktion. Festlegung einer minimal zu erwartenden Fehlerüberdeckung oder einer Obergrenze für die Auftrittswahrscheinlichkeit fehlerbedingter Fehlfunktionen  $p_{\text{FFF}}$ .

Berücksichtigung der Varianz:

- Mindest- (Modell-) Fehleranzahl Normalverteilung Abschn. 2.8 und beliebige Verteilungen Abschn. 2.9.
- Obergrenzen für seltene Ereignisse Abschn. 2.6.



## Fehlersimulation

Einbau der Fehler in die Systembeschreibung (Fehleremulation direkt in die Hardware) und zählen der nachweisbaren Fehler. Bestimmung der erforderlichen Testsatzlänge. Vorgehen:

- Festlegung der Modellfehlermenge inkl. Anzahl  $\varphi_{MF}$ .
- Festlegung der angestrebten Mindestanzahl der nachweisbaren Modellfehler  $\varphi_{\text{Erk.min}} = \varphi_{MF} \cdot FC_{\text{min}}$
- Rechenzeitaufwändige Simulation mit (beliebigen) Zufallseingaben:

Wiederhole für jeden Testschritt
Berechnung der Sollausgaben
Wiederhole für jeden Testschritt
Wiederhole für jeden nicht abgehakten Modellfehler
Soll-/Ist-Vergleich
Wenn nachweisbar: Modellfehler abhaken
Wenn $\varphi_{\text{Erk}} \geq \varphi_{\text{Erk.min}}$ : Simulation fertig



Die erforderliche Testsatzlänge ist

$$n \geq \frac{n_{\text{sim}}}{c}$$

( $n_{\text{sim}}$  – simulierte Testsatzlänge;  $c$  – Skalierungsfaktor des Fehlermodells).

Problematisch sind redundante, aber nicht als solche aussortierte Modellfehler, weil eine Fehlersimulation für diese nicht erkennt, dass sie weder bei  $\varphi_{\text{Erk}}$  noch bei  $\varphi_{\text{NErk}}$  mitzuzählen sind.

## Kontrollfragen und Aufgaben



- 1 Was sind redundante Fehler, äquivalente und implizit nachweisbare Fehler?
- 2 Wie wird mit ihnen idealerweise umgegangen?
- 3 Was ist die Folge, wenn der ideale Umgang nicht möglich ist.
- 4 Wie lange dauert eine Fehlersimulation mit  $\varphi_{MF} = 10^5$  Modellfehlern,  $n_{sim} = 10^6$  zufällig gewählten Testbeispielen, wenn die Simulation eines Testbeispiels 1 ms dauert.



## Antworten auf die Fragen 1 bis 3

- 1 Ein Modellfehler ist redundant, wenn er die Funktion nicht verändert. Äquivalente Fehler ändern die Funktion in derselben Weise und sind mit denselben Tests nachweisbar. Ein Fehler ist implizit durch die Tests eines anderen Fehlers nachweisbar, wenn er von allen Tests des anderen Fehlers nachgewiesen wird.
- 2 Redundante Fehler aus der Fehlermenge streichen. Äquivalente Fehler zu einem Modellfehler zusammenfassen. Implizit nachweisbare Fehler können, aber müssen nicht aus der Modellfehlermenge gestrichen werden.
- 3 Redundante Fehler erhöhen die ermittelte Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler. Die geforderte Fehlerüberdeckung wird erst mit einem (wesentlich) längeren Testsatz oder nicht erreicht. (Fortsetzung nächste Folie)



## Frage 3 Rest, Lösung Aufgabenteil 4

- 3 ... Äquivalente Fehler erhöhen die Nachweisabhängigkeiten (größeres  $\kappa$ ), multimodale Verteilungen.  
Wenn implizit nachweisbare Fehler mitsimuliert werden, ergibt sich bei gleicher Testsatzlänge eine höhere Modellfehlerüberdeckung bzw. ein kleinerer Skalierungsfaktor  $c$ .
- 

- 4 Ohne vorzeitigen Abbruch je Fehler beim ersten Fehlernachweis bzw. insgesamt, wenn genug Fehler nachgewiesen sind, dauert die Simulation etwa:

$$(1 + \varphi_{MF}) \cdot n_{\text{sim}} \cdot 1 \text{ ms} = 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1 \text{ ms} \approx 3.000 \text{ Jahre}$$

Vorzeitiger Abbruch erspart je nach FHNW-Funktion ein bis zwei Zehnerpotenzen. Erfordert trotzdem deutlich schnellere Rechner und/oder eine parallele Simulation auf vielen Rechnern.



## Bestimmung von $n$ über die FHNW-Funktion

Die allgemeine Beziehung zwischen zu erwartender Fehlerüberdeckung  $E(FC)$ , FHNW-Funktion  $H(p)$  und Testsatzlänge  $n$  wurde auf Folie 171 aufgestellt und beträgt:

$$E(FC) = \frac{\int_0^{\infty} H(p) \cdot (1 - e^{-n \cdot p}) \cdot dp}{\int_0^{\infty} H(p) \cdot dp} \quad \text{mit } H(p) = 0 \text{ für } p > 1$$

Für eine bekannte FHNW-Funktion  $H(p)$  ist  $n$  so zu wählen, das  $E(FC)$  ein geforderten Mindestwert  $E(FC)_{\min}$  hat:

- Für eine beliebige FHNW-Funktion numerisch.
- für eine FHNW-Potenzfunktion auch nach  $n$  auflösbar.



## FHNW-Potenzfunktion

Für eine FHNW-Potenzfunktion nimmt nach Gl. 19 die zu erwartende Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler mit Exponenten  $k$  ab:

$$E(\varphi_{\text{NErk}}, n) = E(\varphi_{\text{NErk}}, n_0) \cdot \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-k}$$

Fehlerüberdeckung als Anteil der nachweisbaren Fehler:

$$E(FC) = 1 - \frac{E(\varphi_{\text{NErk}}, n)}{E(\varphi_{\text{NErk}}, n_0)} = 1 - \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-k}$$

Erforderliche Testsatzlänge in Abhängigkeit von der Mindestfehlerüberdeckung  $E(FC)_{\min}$ :

$$n \geq n_0 \cdot (1 - E(FC)_{\min})^{-\frac{1}{k}} \quad (25)$$



Unter der Annahme, dass der Test mit dem Operationsprofil der Anwendung erfolgt und alle erkannten Fehler beseitigt werden, kann das Testziel auch eine maximal zu erwartende Anzahl von Fehlfunktionen  $E(\zeta_F)$  nach Gl. 21

$$E(\zeta_{F.\max}) \geq E(\zeta_F) = N_{SA} \cdot \int_0^{\infty} p \cdot H(p) \cdot e^{-n \cdot p} \cdot dp$$

oder die Wahrscheinlichkeit  $p_{FFF.\max}$  für durch Fehler verursachte Fehlfunktionen sein:

$$p_{FFF.\max} \geq \frac{E(\zeta_F)}{N_{SA}} = \int_0^{\infty} p \cdot H(p) \cdot e^{-n \cdot p} \cdot dp$$

Zur Bestimmung der hierfür mindestens erforderlichen Testsatzlänge  $n$  ist das Integral nach  $n$  aufzulösen. Für eine Potenzfunktionen nach Gl. 20

$$H(p) = \frac{E(\varphi_{NErk}, n_0) \cdot p^{k-1}}{n_0^{-k} \cdot k} \cdot e^{-n_0 \cdot p}$$

lösbar ( $n_0$  – Bezugstestsatzlänge;  $k$  – Ordnung bzw. Exponent der Abnahme).



$$\begin{aligned}
 p_{\text{FFF.max}}(n) &= \int_0^\infty p \cdot \frac{E(\varphi_{\text{Nerk}}, n_0) \cdot p^{k-1}}{n_0^{-k} \cdot k} \cdot e^{-n_0 \cdot p} \cdot e^{-n \cdot p} \cdot dp \\
 p_{\text{FFF.max}}(n) &= \underbrace{\frac{k \cdot E(\varphi_{\text{Nerk}}, n_0)}{n_0}}_{p_{\text{FFF}}(n_0)} \cdot \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-(k+1)} \\
 n &\geq n_0 \cdot \left(\frac{n_0 \cdot p_{\text{FFF.max}}(n)}{k \cdot E(\varphi_{\text{Nerk}}, n_0)}\right)^{-\frac{1}{(k+1)}} \\
 n &\geq n_0 \cdot \left(\frac{p_{\text{FFF.max}}(n)}{p_{\text{FFF}}(n_0)}\right)^{-\frac{1}{(k+1)}} \tag{26}
 \end{aligned}$$

Mit der fehlerbezogenen Teilzuverlässigkeit Zuverlässigkeit  
 $Z_F = 1/p_{\text{FFF}}$ :

$$n \geq n_0 \cdot \left(\frac{Z_F(n)}{Z_F(n_0)}\right)^{\frac{1}{(k+1)}}$$

Weniger als proportionale Zunahme der Testsatzlänge mit der geforderten Zuverlässigkeitserhöhung.

## Beispielaufgabe



Die FHNW-Funktion sei

$$H(p) = 50 \cdot p^{-0,7} \cdot e^{-100 \cdot p}$$

Welche Testsatzlänge erfordert

- 1 eine zu erwartende Fehlerüberdeckung von  $E(FC)_{\min} = 99\%$ ?
- 2 eine zu erwartende fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit von  $E(Z_F)_{\min} \geq 10^6$  korrekten Service-Leistungen je Fehlfunktion?

Vorüberlegung: Ein Koeffizientenvergleich mit:

$$H(p) = \frac{E(\varphi_{\text{NErk}}, n_0) \cdot p^{k-1}}{n_0^{-k} \cdot k} \cdot e^{-n_0 \cdot p}$$

liefert:  $k = 0,3$ ,  $n_0 = 100$ ,  $\frac{E(\varphi_{\text{NErk}}, n_0)}{n_0^{-k} \cdot k} = 50$ ,  $E(\varphi_{\text{NErk}}, n_0) = 3,77$



## Lösung Aufgabenteil 1

Welche Testsatzlänge erfordert eine zu erwartende Fehlerüberdeckung von  $E(FC)_{\min} = 99\%$ ?

In Gl. 25

$$n \geq n_0 \cdot (1 - E(FC)_{\min})^{-\frac{1}{k}}$$

sind  $k = 0,3$  und  $n_0 = 100$  einzusetzen:

$$n \geq 100 \cdot (1 - 99\%)^{-\frac{1}{0,3}} \approx 4,6 \cdot 10^8$$

Die erforderliche Testsatzlänge erhöht sich stark überproportional (Exponent  $\frac{1}{k}$ ) mit der Abnahme des zulässigen Anteils der nicht nachweisbaren Fehler.



## Lösung Aufgabenteil 2

Welche Testsatzlänge erfordert eine zu erwartende fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit von  $E(Z_F)_{\min} \geq 10^6$  korrekten Serviceleistungen je Fehlfunktion?

In Gl. 26

$$n \geq n_0 \cdot \left( \frac{n_0 \cdot p_{\text{FFF.max}}(n)}{k \cdot E(\varphi_{\text{NErk}}, n_0)} \right)^{-\frac{1}{(k+1)}}$$

sind einzusetzen  $k = 0,3$ ,  $n_0 = 100$ ,  $E(\varphi_{\text{NErk}}, n_0) = 3,77$  und  $p_{\text{FFF.max}}(n) = \frac{1}{E(Z)_{\min}}$  (Kehrwert der Mindestzuverlässigkeit):

$$100 \cdot \left( \frac{100 \cdot 10^{-6}}{0,3 \cdot 3,77} \right)^{-\frac{1}{1,3}} = 4,54 \cdot 10^6$$

Hohe Zuverlässigkeiten sind einfacher als hohe Fehlerüberdeckungen zu erreichen, weil die erforderliche Testsatzlänge nur mit dem Exponenten  $\frac{1}{1+k}$  statt  $\frac{1}{k}$  zunimmt.



## Mindest- (Modell-) Fehleranzahl

Um zu garantieren, dass eine geschätzte Eintrittswahrscheinlichkeit  $p_S = \frac{N_{ZW}}{N}$  ( $N$  – Anzahl der Versuche;  $N_{ZW}$  – Zählwert) mit einer Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$  ( $\alpha$  – Irrtumswahrscheinlichkeit) in einem Intervall mit dem relativen Radius  $\varepsilon_p$  liegt:

$$P(p_S \cdot (1 - \varepsilon_p) \leq X \leq p_S \cdot (1 + \varepsilon_p)) \geq 1 - \alpha$$

muss für eine normalverteilte Zufallsgröße  $X$  nach Gl. 18 der Zählwert  $N_{ZW}$  mindestens betragen:

$$N_{ZW} \geq \frac{\kappa \cdot (1 - p_S) \cdot \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^2}{\varepsilon_p^2} = N_{ZW.min}$$

Für die Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler  $N_{ZW} = \varphi_{NErk}$  eines langen Zufallstests ist die mittlere Eintrittswahrscheinlichkeit nahe null.

Vereinfachung für  $p_S \rightarrow 0$ :

$$\varphi_{NErk} \geq \frac{\kappa \cdot \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^2}{\varepsilon_p^2} = \varphi_{NErk.min}$$



Mindestwert der effektiven Anzahl der nicht erkennbaren Fehler  $\frac{\varphi_{\text{NErk.min}}}{\kappa}$  ( $\kappa$  – Varianzerhöhung durch Abhängigkeiten) als Funktion von

- $\varepsilon_p$  relativer Intervallradius, um den der Schätzwert vom Erwartungswert abweichen darf und
- $\alpha$  Irrtumswahrscheinlichkeit:

	$\varepsilon_p = 40\%$	20%	10%	5%	2%
$\alpha = 4\%$	26	105	420	1.681	10.506
$\alpha = 2\%$	34	136	543	2.172	13.572
$\alpha = 1\%$	41	165	660	2.642	16.512

Wenn für die Anzahl der nicht erkannten Fehler keine Normalverteilung unterstellt wird, ist die erforderliche Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler  $\varphi_{\text{NErk.min}}$  und damit auch der zu simulierenden Fehler um einiges größer.

## Beispielaufgabe



- 1 Wie groß muss die effektive Modellfehleranzahl sein und wie viele Fehler davon muss der Test nachweisen, um mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha \leq 2\%$  für eine zu erwartende Modellfehlerüberdeckung im Bereich von 98,6% bis 99,4% garantieren zu können?
- 2 Dasselbe nur für eine Mindestmodellfehlerüberdeckung von 99%.
- 3 Wie groß muss die tatsächliche Fehleranzahl mindestens sein, um bei einer zu erwartenden Fehlerüberdeckung von 99,5% mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha \leq 2\%$  für eine tatsächliche Fehlerüberdeckung von mindestens 99% zu garantieren?

## Lösung Aufgabenteil 1

Wie groß muss die effektive Modellfehleranzahl sein und wie viele Fehler davon muss der Test nachweisen, um mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha \leq 2\%$  für eine zu erwartende Modellfehlerüberdeckung im Bereich von 98,6% bis 99,4% garantieren zu können?

Die Wahrscheinlichkeit für das Nichterkennen eines Fehler soll im Bereich  $p_{\text{NErk}} \in 1\% \cdot (1 \pm 40\%)$  liegen. Daraus folgt  $p_{\text{NErkS}} = 1\%$  und  $\varepsilon_p = 40\%$ :

$$\frac{\varphi_{\text{NErk.min}}}{\kappa} = \left( \frac{\Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right)}{\varepsilon_p} \right)^2 = \left( \frac{\Phi^{-1} (99\%)}{0,4} \right)^2 = 34$$

Erforderliche effektive Modellfehleranzahl:

$$N_{\text{MF.eff}} \geq \frac{\varphi_{\text{NErk.min}}}{p_{\text{NErkS}} \cdot \kappa} = 3.400$$

Simulationsabbruch bei  $\varphi_{\text{NErk}} \leq 1\% \cdot N_{\text{MF}}$



## Lösung Aufgabenteil 2

Dasselbe nur für eine Mindestmodellfehlerüberdeckung von 99%.

---

Da kein Minimalwert vorgegeben ist, sind  $p_{\text{NErkS}}$  und  $\varepsilon_p$  frei wählbar, z.B.  $p_{\text{NErkS}} = 0,5\%$  und  $\varepsilon_p = 100\%$ . Einseitige Bereichsschätzung:

$$\frac{\varphi_{\text{NErk.min}}}{\kappa} = \left( \frac{\Phi^{-1}(1 - \alpha)}{\varepsilon_p} \right)^2 = \left( \frac{\Phi^{-1}(98\%)}{1} \right)^2 = 4,2$$

Erforderliche effektive Modellfehleranzahl:

$$N_{\text{MF.eff}} \geq \frac{\varphi_{\text{NErk.min}}}{p_{\text{NErkS}} \cdot \kappa} = 840$$

Simulationsabbruch bei  $\varphi_{\text{NErk}} \leq 0,5\% \cdot N_{\text{MF}}$



## Lösung Aufgabenteil 3

Wie groß muss die tatsächliche Fehleranzahl mindestens sein, um bei einer zu erwartenden Fehlerüberdeckung von 99,5% mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha \leq 2\%$  für eine tatsächliche Fehlerüberdeckung von mindestens 99% zu garantieren?

---

Hier sind  $p_{\text{NErkS}} = 0,5\%$  und  $\varepsilon_p = 100\%$  vorgegeben. Einseitige Bereichsschätzung wie in Aufgabenteil 2. Für eine Mindestfehlerüberdeckung von 99% kann mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 2\%$  erst ab einer effektiven tatsächlichen Fehleranzahl von 840 garantiert werden.

Bei Software rechnet man mit ca. 30 Fehlern auf 1.000 NLOC (Netto Lines of Code). Die geforderte Schätzgenauigkeit wird dann erst etwa ab 20.000 bis 30.000 NLOC erreicht.

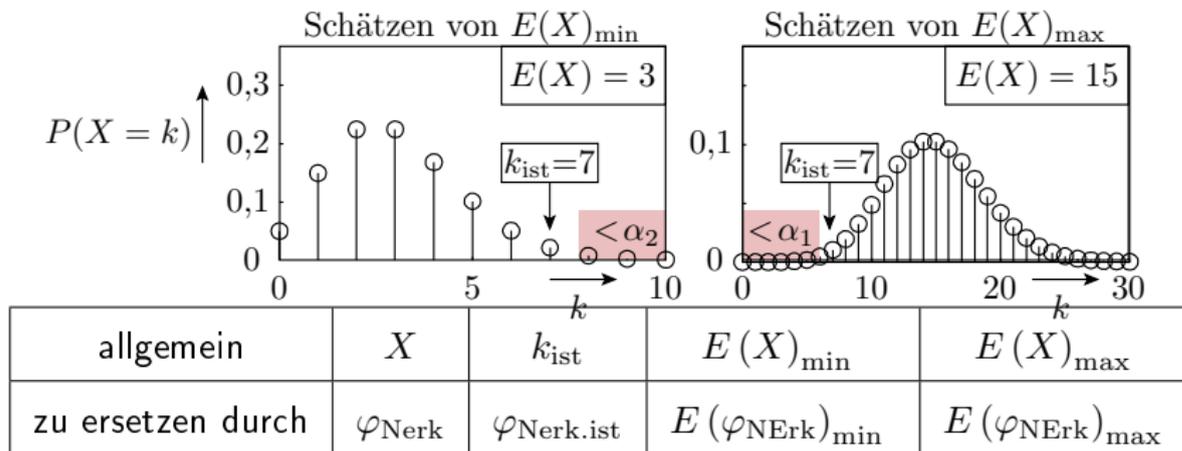


## Kleine Anzahl nicht nachweisbarer Fehler

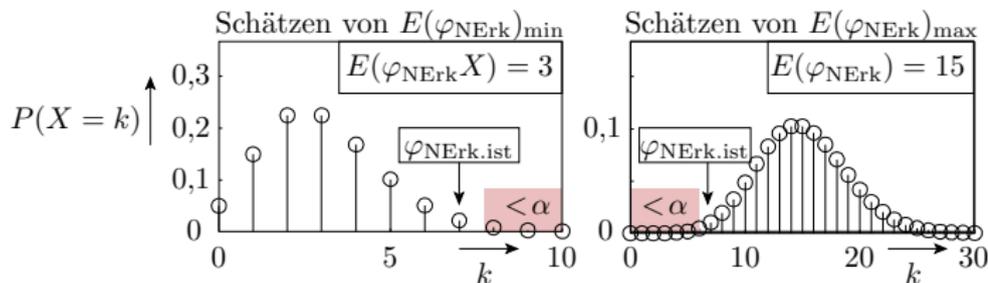
In der Praxis ist das Ziel oft, alle oder fast alle (Modell-) Fehler nachzuweisen. Poisson-Verteilung. Simulationsabbruch:

$$\varphi_{\text{Nerk.ist}} \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

Möglicher Bereich des Erwartungswertes (vergl. Folie 150):



## Bereich des Erwartungswertes



Bei Simulationsabbruch mit gegebenem  $\varphi_{\text{NERk.ist}}$ :

- $E(\varphi_{\text{NERk}})_{\min}$  mit  $\varphi_{\text{NERk.ist}}$  als Untergrenze:

$$P(\varphi_{\text{NERk}} > \varphi_{\text{NERk.ist}}) = 1 - \sum_{k=0}^{\varphi_{\text{NERk.ist}}} e^{-E(\varphi_{\text{NERk}})_{\min}} \cdot \frac{E(\varphi_{\text{NERk}})_{\min}^k}{k!} = \alpha$$

- $E(\varphi_{\text{NERk}})_{\max}$  mit  $\varphi_{\text{NERk.ist}}$  als Obergrenze:

$$P(\varphi_{\text{NERk}} < \varphi_{\text{NERk.ist}}) = \sum_{k=0}^{\varphi_{\text{NERk.ist}}-1} e^{-E(\varphi_{\text{NERk}})_{\max}} \cdot \frac{E(\varphi_{\text{NERk}})_{\max}^k}{k!} = \alpha$$

( $\alpha$ - Irrtumswahrscheinlichkeit).



## Erforderliche (Modell-) Fehleranzahl

Bestimmung der Bereichsgrenzen  $E(\varphi_{\text{NErk}})_{\min/\max}$

```
pois_E_min(alpha, k_ist); % Berechnung Untergrenze
pois_E_max(alpha, k_ist); % Berechnung Obergrenze
```

mit  $k_{\text{ist}} = \varphi_{\text{NErk.ist}}$  (siehe Folie 150 ff.).

Der zu erwartende Anteil der nicht nachweisbaren Fehler ist eins abzüglich der zu erwartenden Fehlerüberdeckung  $E(FC)$ :

$$\frac{E(\varphi_{\text{NErk}})}{E(\varphi)} = 1 - E(FC)$$

Bereich der zu erwartenden Fehleranzahl, bei dem die Simulationsabbruchbedingung  $\varphi_{\text{NErk.ist}}$  erreicht wird:

$$\frac{E(\varphi_{\text{NErk}})_{\min}}{1 - E(FC)} \leq E(\varphi) \leq \frac{E(\varphi_{\text{NErk}})_{\max}}{1 - E(FC)} \quad (27)$$

Bei einer Fehlersimulation ist die zu erwartende Gesamtfehleranzahl  $E(\varphi)$  die effektive Modellfehleranzahl  $N_{\text{MF.eff}}$ .

## Beispielaufgabe



Um für eine Modellfehlerüberdeckung von 99% mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha \leq 2\%$  zu garantieren, soll das Simulationsabbruchkriterium

$$\varphi_{\text{NErk.ist}} \in \{0, 1, 2\}$$

sein.

- 1 Wie groß darf der Erwartungswert  $E(\varphi_{\text{NErk}})$  maximal sein?
- 2 Wie groß muss die effektive Anzahl der Modellfehler  $N_{\text{MF.eff}}$  sein, damit die Simulationsabbruchbedingung im gesamten möglichen Bereich des Erwartungswerts erreicht wird?



## Lösung Aufgabenteil 1

Gesucht sind die Erwartungswerte  $E(\varphi_{\text{NErk}})_{\min}$  für  $\varphi_{\text{NErk.ist}} \in \{0, 1, 2\}$  in

$$P(\varphi_{\text{NErk}} > \varphi_{\text{NErk.ist}}) = 1 - \sum_{k=0}^{\varphi_{\text{NErk.ist}}} e^{-E(\varphi_{\text{NErk}})_{\min}} \cdot \frac{E(\varphi_{\text{NErk}})_{\min}^k}{k!} = \alpha$$

mit  $\alpha \leq 2\%$  und dem Programm auf Folie 151:

```
pois_E_min(0.02,0); % Ergebnis: 0,020  
pois_E_min(0.02,1); % Ergebnis: 0,214  
pois_E_min(0.02,2); % Ergebnis: 0,566
```



## Lösung Aufgabenteil 2

Wie groß muss die effektive Anzahl der Modellfehler  $N_{MF,eff}$  sein, damit die Simulationsabbruchbedingung im gesamten möglichen Bereich des Erwartungswerts erreicht wird?

Die größten Werte ergeben sich nach Gl. 27 mit den Obergrenzen der zu erwartenden Anzahl nicht nachweisbarer Fehler:

```
pois_E_max(0.02,0); % Ergebnis: 3,91
pois_E_max(0.02,1); % Ergebnis: 5,83
pois_E_max(0.02,2); % Ergebnis: 7,52
```

Effektive Modellfehleranzahl mit diesen Obergrenzen:

$$N_{MF,eff} = E(\varphi) = \frac{E(\varphi_{NErk})_{\max}}{1 - E(FC)} = \frac{E(\varphi_{NErk})_{\max}}{1 - 99\%}$$

$\varphi_{NErk,ist}$	0	1	2
$N_{MF,eff}$	391	583	752



## Zuverlässigkeitswachstum



## Zuverlässigkeit und versteckte Fehler

Ein Maß der Zuverlässigkeit ist die zu erwartende mittlere Anzahl von richtig ausgeführten Service-Leistungen  $Z$  je Fehlfunktionen als Kehrwert der Auftrittswahrscheinlichkeit  $p_{FF}$  einer Fehlfunktion je Service. Bei seltenem Versagen  $p_{FF} \ll 1$  summieren sich die Wahrscheinlichkeiten des Versagens bezogen auf Einzelursachen:

$$E(Z) = \frac{1}{p_{SF} = p_S + p_B + \dots + \underbrace{\sum_{i=1}^{N_{PF}} (p_{i.vorh}(n) \cdot p_{i.nachw})}_{p_{FFF}}}$$

( $p_S$  – Fehlfunktionen durch Störungen;  $p_B$  – Fehlfunktionen durch Bedienfehler;  $p_{FFF}$  – Fehlfunktionen durch nicht beseitigte Fehler). Im weiteren wird nur die Teilzuverlässigkeit  $Z_F = \frac{1}{p_{FFF}}$  durch nicht beseitigte Fehler betrachtet.



## Testaufwand und Fehlerhäufigkeit

Es sei angenommen, dass Betrieb und Test mit gleichem Operationsprofil erfolgen und ein Fehler  $a$ -mal beim Test beobachtbar sein muss, bevor er erfolgreich beseitigt wird<sup>10</sup>. Beseitigungswahrscheinlichkeit:

$$p_{i.\text{Beseit}}(n) = 1 - e^{-\frac{n \cdot p_{i.\text{nachw}}}{a}}$$

Abnahme seine Vorhandenseins:

$$p_{i.\text{vorh}}(n) = p_{i.\text{vorh}} \cdot (1 - p_{i.\text{Beseit}}(n)) = p_{i.\text{vorh}} \cdot e^{-\frac{n \cdot p_{i.\text{nachw}}}{a}}$$

Wahrscheinlichkeit einer Fehlfunktion durch alle versteckten Fehler, wenn das Systeme mit  $n$  Schritten getestet und erkennbare Fehler im Mittel nach dem  $a$ -ten Auftreten beseitigt werden:

$$p_{\text{FFF}} = \sum_{i=1}^{N_{\text{PF}}} \left( p_{i.\text{vorh}} \cdot e^{-\frac{n \cdot p_{i.\text{nachw}}}{a}} \cdot p_{i.\text{nachw}} \right)$$

---

<sup>10</sup>Tests beim Hersteller  $a \approx 1$ , Nutzerbetrieb als Test  $a \gg 1$ , abhängig wie häufig/gut der Feedback zum Hersteller ist.



## Mit der FHNW-Funktion

$$p_{\text{FFF}}(n) = \int_0^{\infty} p \cdot H(p) \cdot e^{-\frac{n \cdot p}{a}} \cdot dp$$

Mit der FHNW-Funktion nach Gl. 20:

$$H(p) = \frac{E(\varphi_{\text{NErk}}, n_0) \cdot p^{k-1}}{n_0^{-k} \cdot k} \cdot e^{-n_0 \cdot p}$$

für eine Fortsetzung mit einer Reifedauer von  $n$  Service-Aufrufen:

$$p_{\text{FFF}}(n) = \frac{E(\varphi_{\text{NErk}}, n_0)}{n_0^{-k} \cdot k} \cdot \int_0^{\infty} p \cdot p^{k-1} \cdot e^{-(\frac{n}{a} + n_0) \cdot p} \cdot dp$$

Die Substitution  $p = \frac{a \cdot x}{n}$ ;  $dp = \frac{a \cdot dx}{n}$  holt die Testdauer  $n$  aus dem Integral:

$$p_{\text{FFF}}(n) = \frac{E(\varphi_{\text{NErk}}, n_0)}{n_0 \cdot k} \cdot \left( \frac{\frac{n}{a} + n_0}{n_0} \right)^{-(k+1)} \underbrace{\int_0^n x^k \cdot e^{-x} \cdot dx}_{\Gamma(k+1)=k^2}$$

Das Restintegral ist  $\Gamma(k+1) = k^2$  für  $0 < k < 1$ .



## Zuverlässigkeitswachstum

Die Wahrscheinlichkeit einer durch Fehler verursachten Fehlfunktion nimmt mit dem Exponenten  $-(k + 1)$  mit der Reifedauer  $n$  ab:

$$p_{\text{FFF}}(n) = \underbrace{\frac{k \cdot E(\varphi_{\text{NErk}}, n_0)}{n_0}}_{p_{\text{FFF}}(n_0)} \cdot \left( \frac{n}{a \cdot n_0} + 1 \right)^{-(k+1)}$$

Die fehlerbezogene Zuverlässigkeit als der Kehrwert der Wahrscheinlichkeit für eine Fehlfunktion nimmt mit dem Exponenten  $k + 1$  mit der Reifedauer zu

$$Z_{\text{F}}(n) = Z_{\text{F}}(n_0) \cdot \left( \frac{n}{a \cdot n_0} + 1 \right)^{k+1} \quad (28)$$



## Beispielaufgabe



Ein System wurde vor dem Einsatz mit  $n_0 = 10^6$  Zufallswerten mit vergleichbarem Operationsprofil wie im Einsatz getestet und erkannte Fehler beseitigt.

Zum Nutzungsbeginn betrug die fehlerbezogene Teilzuverlässigkeit  $Z_F = 10^3$  korrekte Service-Leistungen je Fehlfunktion. Das System wird bei 10 Nutzern eingesetzt, die je im Mittel pro Tag  $10^4$  Service-Leistungen abarbeiten und im Mittel bei jeder 10.

Fehlfunktion ein »Change-Request« an den Hersteller schicken.

Der Hersteller beseitigt im Mittel 0,5 Fehler je Change-Request.

Wie lange dauert es abschätzungsweise, bis sich die fehlerbezogene Zuverlässigkeit des Systems verzehnfacht hat? Der Exponent der FHNW-Funktion sei mindestens  $k \geq 0,3$ .



## Lösung

Für Gl. 28

$$Z_F(n) = Z_F(n_0) \cdot \left( \frac{n}{a \cdot n_0} + 1 \right)^{k+1}$$

sind  $n_0 = 10^6$ ,  $Z_F(n_0) = 10^3$ ,  $Z_F(n) = 10^4$  und  $k \geq 0,3$  gegeben.  
Pro Tag werden  $10 \cdot 10^4$  Service-Leistungen abgearbeitet

$$n = \frac{10^4}{\text{Tag}} \cdot t$$

( $t$  – Reifedauer) und die Fehler werden im Mittel beseitigt, nach dem  $a = 20$  durch sie verursachte Fehlfunktionen beobachtet wurden:

$$Z_F(n) = 10^4 = 10^3 \cdot \left( \frac{\frac{10^4}{\text{Tag}} \cdot t}{20 \cdot 10^6} + 1 \right)^{0,3+1}$$

$$10 = \left( \frac{t}{2.000 \text{ Tage}} + 1 \right)^{1,3}$$

$$t = 2.000 \text{ Tage} \cdot \left( 10^{\frac{1}{1,3}} - 1 \right) = 1.176 \text{ Tage}$$



## Modell von Musa bzw. Goel-Okumoto<sup>11</sup>

Am häufigsten zitiertes Zuverlässigkeitswachstumsmodell.  
 Unterstellter Zusammenhang für die Anzahl der nachweisbaren  
 Fehler in Abhängigkeit von der Test- oder Reifezeit  $t$ :

$$\varphi_{\text{NErk}}(t) = a(1 - e^{-bt})$$

( $a, b$  – experimentell zu bestimmende Parameter). Was für eine  
 Fehlernachweisdichte müsste das IT-System haben?

$$\varphi_{\text{NErk}}(t) = a(1 - e^{-bt}) \Rightarrow E(\varphi_{\text{Erk}}(n)) = \int_0^{\infty} H(p) \cdot (1 - e^{-n \cdot p}) \cdot dp$$

Das Modell unterstellt offenbar, dass alle Fehler mit gleicher  
 Wahrscheinlichkeit nachweisbar sind:

$$H(p) = \begin{cases} a & \text{für } p = \frac{b}{t_{\text{Serv}}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

( $t_{\text{Serv}}$  – Dauer einer Service-Leistung). Untypisch für IT-Systeme!

<sup>11</sup>Benedikte Elbel, Zuverlässigkeitsorientiertes Testmanagement (2003)