Test und Verlässlichkeit
Grosse Übung 2

Prof. G. Kemnitz

Institut für Informatik, Technische Universität Clausthal

11. Mai 2015

Problembeseitigungsiteration

Aufgabe F1-2.10: Erkennungswahrsch. Kontrolle

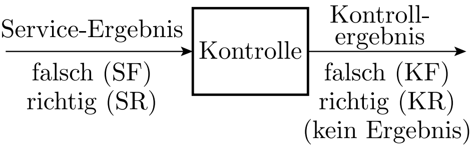
Es seien 1000 Anforderungen zu überprüfen. Bei 20% treten Probleme auf. Die Problembeseitigung erfordert im Mittel 3 Versuche. Wie groß muss die Erkennungswahrscheinlichkeit der Kontrolle mindestens sein, damit nach der Problembeseitigungsiteration im Mittel nicht mehr als zehn Anforderung problembehaftet sind?

Gegebene Größe sortieren:

- Probleme vor der Beseitigungsiteration: 200 von 1000
- Probleme nach der Beseitigungsiteration: 10 von 1000
- Erforderliche Erfolgswahrscheinlichkeit, dass das betrachtete Problem nach einer Beseitigungsiteration nicht mehr existiert: $\geq 95\%$
- 3 Beseitigungsiterationen

Kontrolle und Erkennungswahrscheinlichkeit

Foliensatz F1 »Zählexperimente, Kontrolle der Kontrolle«:



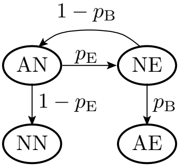
Ergebnis	Kontroll-ergebnis	Kontroll-aussage
falsch	falsch	FF
falsch	richtig	FR
richtig	falsch	RF
richtig	richtig	RR

Erkennungswahrscheinlichkeit:

$$p_{\mathrm{E}} = \lim_{\mathrm{Anz(SF)}\to\infty} \left(\frac{\mathrm{Anz}\,(\mathrm{FF})}{\mathrm{Anz}\,(\mathrm{SF})} \right)$$

Hilft nicht weiter, weil Beseitigungsprozess nicht enthalten ist.

Problembeseitigung[2]



AN	Anforderung nicht erfüllt, hier Service-Ergebnis fehlerhaft (SF)
NE	nicht erfüllte Anforderung erkannt
NN	nicht erfüllte Anforderung nicht erkannt
AE	Anforderung erfüllt, hier Service-Ergebnis korrigiert (SK)

Wahrscheinlichkeit der Beseitigung als Kehrwert der zu erwartenden Anzahl der Beseitigungsiterationen:

$$1-p_\mathrm{E}\cdot(1-p_\mathrm{B})=\frac{1}{3}$$

Anteil der beseitigten Fehler nach jedem »Doppelschritt«[1]:

$$\frac{p_\mathrm{AE}}{p_\mathrm{NN}+p_\mathrm{AE}}=\frac{p_\mathrm{E}\cdot p_\mathrm{B}}{(1-p_\mathrm{E})+p_\mathrm{E}\cdot p_\mathrm{B}}\geq 95\%$$

[1] Während der Iteration konstant, zu fordernde Erfolgswahrsch. von 95%.
[2] Foliensatz F1 »Wahrscheinlichkeit, Problembeseitigung«

- zwei Unbekannte und zwei (Un-)Gleichungen:

$$p_{\mathrm{E}} \cdot (1 - p_{\mathrm{B}}) = \frac{2}{3}$$

$$\frac{p_{\mathrm{AE}}}{p_{\mathrm{NN}} + p_{\mathrm{AE}}} = \frac{p_{\mathrm{E}} \cdot p_{\mathrm{B}}}{(1 - p_{\mathrm{E}}) + p_{\mathrm{E}} \cdot p_{\mathrm{B}}} \geq 95\%$$

Aus der ersten Gl. folgt für p_{E} nahe 100% $p_{\mathrm{B}} \approx \frac{1}{3}$ und damit ist die zweite (Un-)Gleichung nach p_{E} auflösbar:

$$\begin{aligned} \frac{p_{\mathrm{E}}}{(3 - 3 \cdot p_{\mathrm{E}}) + p_{\mathrm{E}}} &\geq 95\% \\ p_{\mathrm{E}} &\geq 95\% \cdot (3 - 2 \cdot p_{\mathrm{E}}) \\ p_{\mathrm{E}} &\geq \frac{3 \cdot 95\%}{1 + 2 \cdot 95\%} = 98,27\% \end{aligned}$$

Aufgabe F1-2.11: Fehlerentstehung bei Beseitigung

Bei einer praktischen Fehlerbeseitigung, z.B. bei der Beseitigung von Programmfehlern, ist es nicht untypisch, dass neu Probleme in Form neuer Fehler entstehen. Es sei angenommen, dass bei jedem Beseitigungsversuch für einen Fehler mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% ein neuer Fehler entsteht.

1. Wie viele Fehler entstehen im Mittel unter Beibehaltung aller anderen Werte aus der Aufgabenstellung zuvor zusätzlich durch Beseitigungsversuche?
2. Auf welchen Erwartungswert erhöht sich die Anzahl der Fehler, die nach der Beseitigungsiteration noch vorhanden sind, ohne von den Kontrollen erkannt zu werden?

Lösung

- Probleme vor der Beseitigungsiteration: 200 von 1000
- Im Mittel drei Beseitigungsversuche je Problem sind 600 Beseitigungsversuche.
- Bei jedem entsteht mit 10% ein neuer Fehler: 60 neue Fehler.
- Gesamtanzahl der zu beseitigenden Fehler: 260
- Davon werden 95% beseitigt. Es verbleiben im Mittel 13 statt 10 Fehler im System, d.h. 30% mehr.

Service-Versagen und Kontrolle

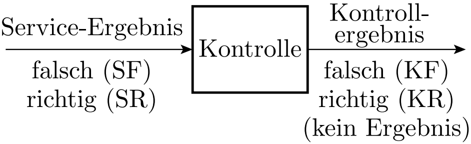
Aufgabe F1-3.1: Service-Versagen und Kontrolle 1

Für einen Service mit Ergebniskontrolle seien die Ergebnisse und Kontrollergebnisse immer verfügbar. Die Wahrscheinlichkeit für Kontrollergebnis »richtig« sei $p_{\mathrm{KR}} = 95\%$
und die Wahrscheinlichkeiten für die beiden korrekten Klassifikationen seinen $p_{\mathrm{FF}} = 90\%$ und $p_{\mathrm{RR}} = 97\%$. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten

1. p_{SF} dass ein Service-Ergebnis korrekt ist,
2. p_{RF} dass richtige Service-Ergebnis als falsch klassifiziert und
3. p_{FR} dass falsche Service-Ergebnis als richtig klassifiziert werden?

Lösung:

Foliensatz F1 »Zählexperimente, Kontrolle der Kontrolle«:



Ergebnis	Kontroll-ergebnis	Kontroll-aussage
falsch	falsch	FF
falsch	richtig	FR
richtig	falsch	RF
richtig	richtig	RR

Direkt gegeben: $p_{\mathrm{KR}} = 95\%$, $p_{\mathrm{FF}} = 90\%$ und $p_{\mathrm{RR}} = 97\%$
Über Wahrsch. + Gegenwahrsch. =1 ergibt sich weiterhin:

- $p_{\mathrm{KF}} = 1 - p_{\mathrm{KR}} = 5\%$
- $p_{\mathrm{FR}} = 1 - p_{\mathrm{FF}} = 10\%$ (1. gesuchte Größe) und
- $p_{\mathrm{RF}} = 1 - p_{\mathrm{RR}} = 3\%$ (2. gesuchte Größe)

- Die Wahrscheinlichkeiten für ein korrektes/falsches Kontrollergebnis:

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{KR}} &= p_{\mathrm{SR}} \cdot p_{\mathrm{RR}} + p_{\mathrm{SF}} \cdot p_{\mathrm{FR}} \\ p_{\mathrm{KF}} &= p_{\mathrm{SR}} \cdot p_{\mathrm{RF}} + p_{\mathrm{SF}} \cdot p_{\mathrm{FF}} \end{aligned}$$

  Mit den gegebenen Größen und ihren Gegenwahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} 95\% &= p_{\mathrm{SR}} \cdot 97\% + p_{\mathrm{SF}} \cdot 10\% \\ 5\% &= p_{\mathrm{SR}} \cdot 3\% + p_{\mathrm{SF}} \cdot 90\% \end{aligned}$$

- Lösung mit Octave/Matlab:

```
M=[0.97 0.1; 0.03 0.9];
V=[0.95; 0.05];
X=M**(-1)*V
```

- Ergebnis:

$$p_{\mathrm{SR}} = 97{,}7\%;\ p_{\mathrm{SF}} = 2{,}3\%$$

Aufgabe F1-3.1: Service-Versagen und Kontrolle 2

Ein Service und seine Kontrolle seien mit 100%-iger Wahrscheinlichkeit verfügbar. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Service fehlerhaft ausgeführt wird, wenn 99% der Kontrollen keinen Fehler erkennen und die Kontrollerkennungswahrscheinlichkeit 80% beträgt und keine Phantomfehler auftreten?

Lösung

- Erkennungswahrscheinlichkeit: $p_{\mathrm{E}} = p_{\mathrm{FF}} = 80\%$
- Warsch. Kontrollergebnis »richtig«: $p_{\mathrm{KR}} = 99\%$
- Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit »Service-Ergebnis falsch« p_{SF}.

Ohne Phantomfehler ist das Kontrollergebnis nur dann falsch, wenn das Service–Ergebnis falsch ist und das falsch Ergebnis erkannt wird:

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{SF}} \cdot p_{\mathrm{E}} &= 1 - p_{\mathrm{KR}} \\ p_{\mathrm{SF}} &= \frac{1 - p_{\mathrm{KR}}}{p_{\mathrm{E}}} = \frac{1 - 99\%}{80\%} = 1{,}25\% \end{aligned}$$

Fehleranteil

Aufgabe F1-3.3: Schätzen des Fehleranteils

In einem Experiment zur Abschätzung des Fehleranteils wurden 31 Objekte als fehlerhaft und 712.981 Objekte als fehlerfrei klassifiziert. Für den Testsatz sei anzunehmen, dass er mindesten 80% der Fehler nachweisen kann. Schätzen Sie ab, in welchem Bereich der Fehleranteil liegt.

Lösung

Der Fehleranteil einer Objektstichprobe ist nach Foliensatz F1, Abschnitt »Zählexperimente, Entstehungsprozess und Fehleranteil«

$$DL == \frac{\mathrm{Anz}(F)}{FC \cdot n}$$

(F – erkannte fehlerhafte Objekte; n – Größe der Objektstichprobe; FC – Fehlerüberdeckung). Gegeben sind:

- $\mathrm{Anz}(F) = 31$
- $n = 712.981 + 31$
- $80\% \le FC \le 100\%$

Bereich des Fehleranteils:

$$\frac{31}{713\,012} = 34{,}5\,\mathrm{dpm} \le DC \le \frac{31}{80\% \cdot 713\,012} = 54{,}3\,\mathrm{dpm}$$

Aufgabe F1-3.4: Fehleranteil Rechner

Ein Rechner besteht aus Leiterplatten, Schaltkreisen, diskreten Bauteilen (Widerstände, Kondensatoren, …) und Lötstellen.

Typ	Anzahl	$E\left(DL_{\mathrm{BT}}\right)$
Leiterplatten	10	10 dpm
Schaltkreise	100	200 dpm
diskrete Bauteile	200	10 dpm
Lötstellen	10000	1 dpm

Was für einen Fehleranteil hat ein solcher Rechner, wenn alle anderen Arten von Fehlern anzahlmäßig vernachlässigt werden können?

Lösung

Der Fehleranteil des gesamten Rechners ist, wenn viel kleiner eins, etwa die Summe der Fehleranteile aller Komponenten:

$$
\begin{aligned}
DL_{\text{Rechner}} &= 10 \cdot 10\,\text{dpm} + 100 \cdot 200\,\text{dpm} \\
&+ 200 \cdot 10\,\text{dpm} + 10\,000 \cdot 1\,\text{dpm} \\
&= 32\,100\,\text{dpm} \\
&= 0{,}0321\,\text{dpu}
\end{aligned}
$$

(dpu – defects per unit). Etwa jeder 30. Rechner hat ein Hardware-Fehler.

Fehlerentstehung

Aufgabe F1-3.4: Fehlerentstehung

Wie viele Fehler sind in einem großen Software-System mit 10^5 Programmzeilen zu erwarten, wenn beim Entwurf 3% der Programmzeilen falsch sind und der Test 60% der Fehler erkennt?

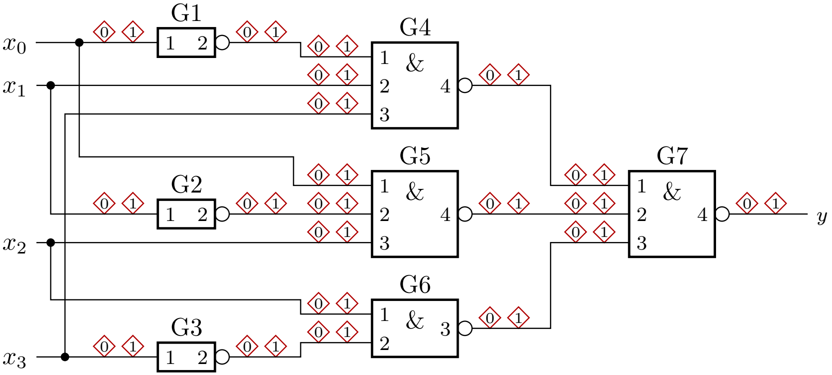
Lösung

Wenn alle erkannten Fehler beseitigt werden, bleiben von den 3% fehlerhafter Programmzeilen nur noch 40% übrig. Zu erwartenden Fehleranzahl:

$$3\% \cdot 40\% \cdot 10^5 = 1200$$

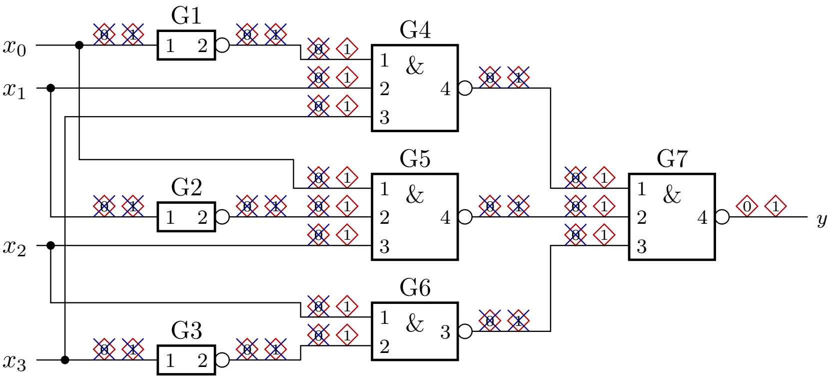
Haftfehler

Aufgabe: Vereinfachung Haftfehlermenge



1. Streichen Sie alle identisch nachweisbaren Haftfehler.
2. Steichen Sie anschließend alle implizit nachweisbaren Haftfehler.

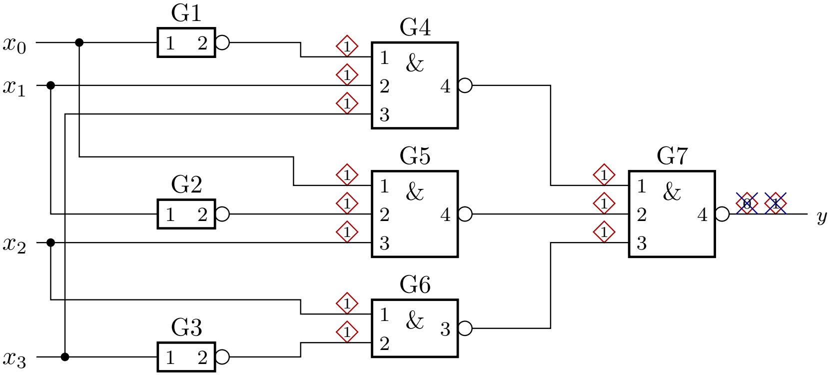
Identisch nachweisbare Haftfehler



Identisch nachweisbare Fehler:

- sa0(G1-1), sa1(G1-2), sa1(G4-1)
- ss1(G1-1), sa0(G1-2), sa0(G4-1), sa1(G4-4), sa1(G7-1)
- ...

Implizit nachweisbare Haftfehler

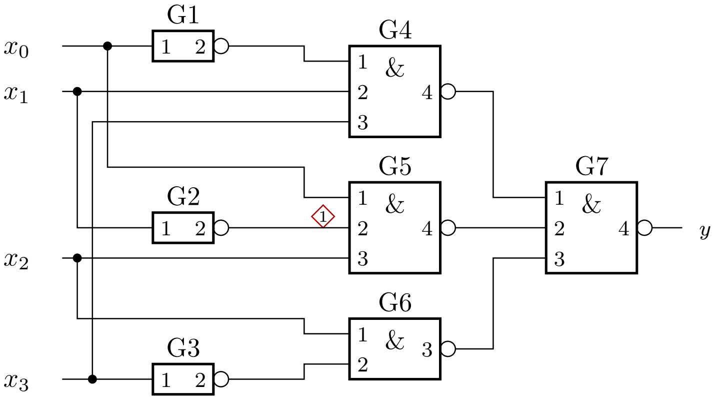


Impliziter Nachweis:

- sa0(G7-4): sa1(G7-1), sa1(G7-2), sa1(G7-3)
- sa1(G7-4): sa1(G4-1), sa1(G4-2), sa1(G4-3), sa1(G5-1), ...

Nachweiswahrscheinlichkeit

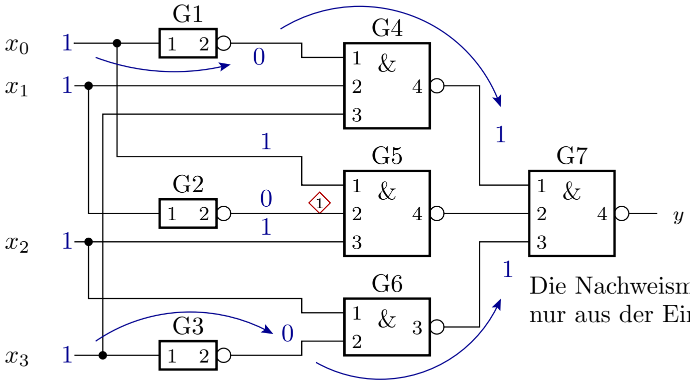
Aufgabe: Gatterschaltung



Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sa1(G3-2) nachwisbar?

1. mit einer Eingabewichtung $g(x_i) = 0{,}5$
2. mit einer Eingabewichtung $g(x_i) = 0{,}8$?

Suche der Nachweismenge für den Fehler



Die Nachweismenge besteht nur aus der Eingabe "1111"

1. Eingabewichtung $g(x_i) = 0{,}5 \Rightarrow p_{\mathrm{sa1(G3–2)}} = 0{,}5^4 = 6{,}25\%$
2. Eingabewichtung $g(x_i) = 0{,}8 \Rightarrow p_{\mathrm{sa1(G3–2)}} = 0{,}8^4 = 40{,}96\%$

Aufgabe: Speicher

Für einen RAM mit $A = 2^{16}$ Speicherplätzen sei die Fehlernachweiswahrscheinlichkeit für Fehler je Speicherzugriff mindestens

$$p \geq \frac{1}{10 \cdot A}$$

Wie viele Speicherzugriffe muss ein Zufallstestsatz umfassen, damit alle Fehler mindestens mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% nachgewiesen werden.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
p(n) &= 1 - e^{-\frac{n}{10\cdot 2^{16}}} \\
n &= \underbrace{-\ln\left(1 - p(n)\right)}_{4{,}6\,\text{für}\,p(n)=99\%} \cdot 10 \cdot 2^{16} \\
&\approx 3 \cdot 10^{6}
\end{aligned}
$$

Zählverteilung

Aufgaben: Varianzobergrenze

Zeigen Sie, dass die Varianz einer allgemeinen Zählverteilung unabhängiger Zufallsgrößen

$$D^2\left(X\right)_{\mathrm{ZV}} = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot (1 - p_i)$$

bei gleichem Erwartungswert

$$N \cdot p = \sum_{i=1}^{N} p_i$$

nicht größer als die einer Binomialverteilung ist:

$$\sum_{i=1}^{N} p_i \cdot (1 - p_i) \leq D^2\left(X\right)_{\mathrm{Bin}} = N \cdot p \cdot (1 - p)$$

Lösung

Ersatz der individuellen Auftrittswahrscheinlichkeiten der zu zählenden Ereignisse durch die mittlere Wahrscheinlichkeit und eine Differenz, die im Mittel null ist:

$$p_i = p + \delta_i \text{ mit } \sum_{i=1}^{N} \delta_i = 0$$

Varianz der Zählverteilung:

$$\begin{aligned} D^2(X)_{\mathrm{ZV}} &= \sum_{i=1}^{N} (p+\delta_i) \cdot (1-p-\delta_i) \\ &= \underbrace{N \cdot p \cdot (1-p)}_{D^2(X)_{\mathrm{Bin}}} - (1-2p) \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \delta_i}_{0} - \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \delta_i^2}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Aufgaben: Verteilung berechnen

Gegeben seien folgende Auftrittswahrscheinlichkeiten für vier Fehler $p_1 = 2\%$, $p_2 = 1{,}5\%$, $p_3 =$0,3 % und $p_4 = 4\%$.

1. Bestimmen Sie die Verteilung der Fehleranzahl, d.h. die Wahrscheinlichkeiten, dass 0, 1, 2, 3 und 4 Fehler auftreten.
2. Bestimmen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung der Fehleranzahl.

- Matlab-Programm zur Bestimmung der Verteilung

```
p=[0.02 0.015 0.003 0.04];
P(1,1)=1-p(1);
P(1,2)=p(1);
for i=2:4
  P(i,1)=P(i-1,1) * (1-p(i));
  P(i,i+1)=P(i-1,i)*p(i);
  for j=2:i
    P(i,j) =P(i-1,j)*(1-p(i)) + P(i-1,j-1)*p(i);
  end;
end;
```

i	p_i	$P(X=0)$	$P(X=1)$	$P(X=2)$	$P(X=3)$	$P(X=4)$
1	2%	98%	2%			
2	1,5%	96,53%	3,44%	0,03%		
3	0,3%	96,24%	3,72%	0,04%	$9{\cdot}10^{-7}$	
4	4%	92,391%	7,420%	0,187%	0,002%	$3.6{\cdot}10^{-8}$

Erwartungswert und Varianz

```
p=[0.02 0.015 0.003 0.04];
EX  = p(1);
D2X = p(1)*(1-p(1));
for i=2:4
  EX = EX +  p(i);
  D2X= D2X + p(i)*(1-p(i));
end
```

- Erwartungswert: 0,078
- Varianz: 0,0758 (fast poison-verteilt)
- Standardabweichung: 0,275