Test und Verlässlichkeit (F2) Kapitel 2: Zufallstest, Verteilungen

Prof. G. Kemnitz

Institut für Informatik, Technische Universität Clausthal

13. Juni 2014

Inhalt Foliensatz F2: Zufallstest, Verteilungen

Zufallstest

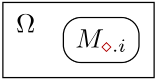
Zufälliger Fehlernachweis

Ein IT-System enthält nach Entwurf und Fertigung statistisch gesehen Fehler. Für die Anzahl ist eine Bereichsangabe möglich (siehe später Abschn. 7), aber welche Fehler vorhanden und wie diese genau nachweisbar sein werden, ist nicht vorhersagbar. Auch wenn es Techniken gibt, gezielt Tests zu suchen, ist der Fehlernachweis immer zu einem gewissen Grad Zufall.

Die zu erwartende Fehleranzahl nimmt mit der Systemgröße zu. Ein Test erkennt nur einen gewissen Anteil der Fehler und nur erkannte Fehler werden beseitigt. Große Systeme enthalten auch im Einsatz noch unerkannte Fehler, die mit gewisser Häufigkeit Fehlfunktionen verursachen.

Nachweiswahrscheinlichkeit

Nachweiswahrscheinlichkeit



Ein permanenter (ständig nachweisbarer) Fehler ist nach Definition Foliensatz F1, Abschn. 3.1 der unterste lokalisierbare Service, der mit mindestens einer Bedatung falsch ausgeführt wird. Eine Service-Anforderung hat einen Eingaberaum Ω von Bedatungsmöglichkeiten und jeder permanente Fehler i wird mit einer Teilmenge $M_i \in \Omega$ nachgewiesen. Die Nachweiswahrscheinlichkeit je Service-Anforderung ist die Wahrscheinlichkeit, dass der fehlerhafte Service mit einer Bedatung $\mathbf{x}$ aus der Nachweismenge M_i angefordert wird:

$$p_i = P\left(\mathbf{x} \in M_i\right)$$

Wenn alle Eingabewerte mit gleicher Häufigkeit auftreten, ist die Nachweiswahrscheinlichkeit das Verhältnis aus der Größe der Nachweismenge und der Eingabemenge

$$p_i = \frac{|M_i|}{|\Omega|}$$

($|\ldots|$– Anzahl der Elemente der Menge).

Unbeständige Fehler haben auch eine Nachweismenge, werden aber bei einer Service-Anforderung mit einer Bedatung $M_i \in \Omega$ nur mit einer Wahrscheinlichkeit kleiner eins nachgewiesen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer von n Service-Anforderungen den Fehler i nachgeweist, beträgt, wenn jede Anforderung ihn unabhängig voneinander mit p_i nachweist:

$$p_i\left(n\right) = 1 - \left(1 - p_i\right)^n$$

- Übergang zur e-Funktion:

  $$p_i\left(n\right) = 1 - e^{n \cdot \ln(1 - p_i)}$$

  mit der Taylor-Reihe

  $$\ln\left(1 - p_i\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_i^k}{k} = p_i + \frac{p_i^2}{2} + \ldots$$

  und $p_i \ll 1$ (für die Testauswahl interessierender Bereich):

  $$\boxed{p_i\left(n\right) = 1 - e^{-n \cdot p_i}} \qquad (1)$$

Erforderliche Testsatzlänge

Erforderliche Testsatzlänge

$n \cdot p_i$	0,5	1	2	4	8
$p_i(n) = 1 - e^{-n \cdot p_i}$	39%	63%	86%	98%	99,97%

Der nahezu sichere Nachweis eines Fehlers verlangt einen Testsatz mit

$$n \geq \frac{4...8}{p_i}$$

zufällig bedateten Service-Anforderungen. Für die Festlegung der erforderlichen Testsatzlänge genügt es, eine Untergrenze der Fehlernachweiswahrscheinlichkeit $p_{\min}$ zu kennen.

Fakt 1

Jeder zufällig bedatete Testsatz der Länge $n \approx 4...8 \cdot p_{\min}^{-1}$ weist praktisch jeden Fehler nach.

Anzahl der Care-Bits

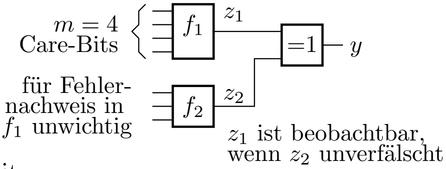
Ein Möglichkeit zur Abschätzung der Untergrenze der Fehlernachweiswahrscheinlichkeit ist das Zählen der Bits, von denen der Fehlernachweis abhängt (Care-Bits[1]). Bei einem Service ohne Gedächtnis mit m Eingabebits beträgt die Größe des Eingaberaums $|\Omega| = 2^2$ und die Größe der Nachweismenge eines Fehlers mindestens $|M_i| \geq 1$. Untergrenze der Fehlernachweiswahrscheinlichkeit bei gleicher Häufigkeit aller Bedatungen:

$$p_{\min} \geq 2^{-m}$$

Ausreichende Testsatzlänge, um nahezu alle Fehler zu erkennen:

$$n \geq 2^{m+3}$$

Die Anzahl der Care-Bits kann deutlich kleiner als die Anzahl der Eingabebits sein.

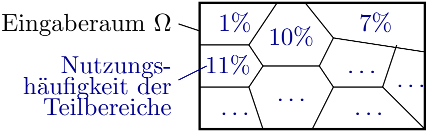


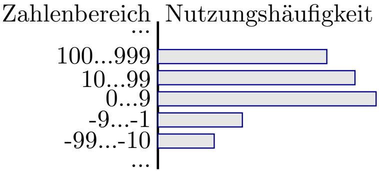
[1] Als Gegenteil von Don't-Care-Bit.

Operationsprofil

Operationsprofil

Der Eingaberaum für einen Service ist in der Regel in Teilbereiche unterteilt, die unterschiedlich häufig genutzt werden. Beispielsweise werden kleine Zahlenwerte häufiger als große und positive häufiger als negative genutzt.



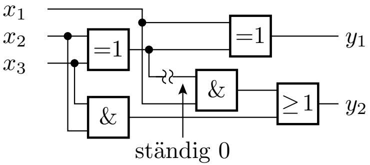


Bei einem menügesteuerten Programm werden die einzelnen Menüeinträge unterschiedlich oft ausgewählt.

Operation	Nutzungshäufigkeit
editieren	35%
löschen	12%
browse	46%
drucken	7%

Operationsprofils und Fehlernachweis

Das Operationsprofil hat erheblichen Einfluss auf die Fehlernachweiswahrscheinlichkeiten. In der Beispielschaltung ist die Verbindung zu einem Gattereingang unterbrochen, der dadurch ständig null führt. Nachweis mit zwei der acht Bedatungsmöglichkeiten. Nachweiswahrscheinlichkeit gleich Summe der Auftrittshäufigkeiten beider Bedatungen aus M_i:



Eingaben aus der Nachweismenge

Eingabe x_3	x_2	x_1	Ausgabe y_2	y_1	Auftrittshäufigkeit	
0	0	0	0	0	0,1	0,1
0	0	1	0	1	0,05	0,1
0	1	0	0	1	0,15	0,2
0	1	1	1	0	0,2	0,05
1	0	0	0	1	0,05	0,2
1	0	1	1	0	0,2	0,05
1	1	0	1	0	0,05	0,2
1	1	1	1	1	0,2	0,1

Nachweiswahrscheinlichkeit: 0,4 0,1

Gewichteter Zufallstest

Ein einfach zu beschreibendes/erzeugendes Operationsprofil für digitale Schaltungen ist die bitweise Wichtung:

- Auftrittswahrscheinlichkeit für Bitwert »1«

$$P(x_i = 1) = g(x_i)$$

- Auftrittswahrscheinlichkeit für Bitwert »0«

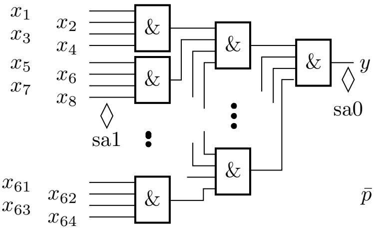
$$P(x_i = 0) = 1 - g(x_i)$$

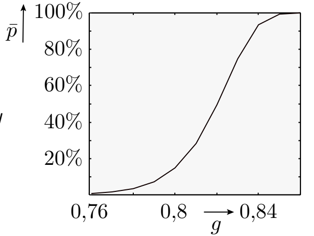
  (g_i – Wichtung).
- Auftrittswahrscheinlichkeit Eingabewert $\mathbf{x}$

$$P(\mathbf{x}) = \prod_{i=0}^{m-1} \begin{cases} g(x_i) & \text{wenn} \quad x_i = 1 \\ 1 - g(x_i) & \text{wenn} \quad x_i = 0 \end{cases}$$

  (m – Bitanzahl).

Beispielschaltung:





$\bar{p}$ mittlere Nachweiswahrscheinlichkeit für $n = 10^6$ Testschritte

Angenommene Fehler: Für je einen der 64 Eingänge ständig 1:

$$p_{\mathrm{sa1}} = g^{63} \cdot (1 - g)$$

Für den Ausgang ständig 0:

$$p_{\mathrm{sa0}} = g^{64}$$

Eine Wichtung von 86% verringert die erforderliche Testsatzlänge für den Nachweis der angenommenen Fehler von $n \approx 2^{67}$ (64 Care-Bits) auf $n \approx 10^6$.

Fakt 2

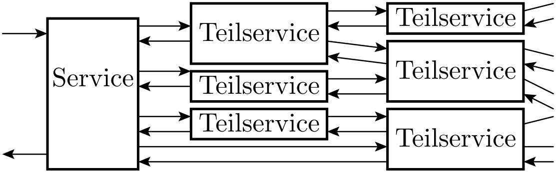
Bei gleichem Operationsprofil ist die Fehlernachweiswahrscheinlichkeit eines Fehlers je Service-Anforderung gleich der Wahrscheinlichkeit, dass der Service wegen diesem Fehler versagt.

Über diesen Zusammenhang korreliert die Testdauer und auch die bisherige Betriebsdauer, in der die erkannten Fehler beseitigt wurden, mit der fehlerfreien Betriebsdauer während des weiteren Einsatzes.

Der Test sollte idealerweise mit unterschiedlichen Operationsprofilen erfolgen. Dazu gehört auch ein Test durch einen »inkompetenten Nutzer«, der ganz andere Eingaben bevorzugt als ein normaler oder gar erfahrender Nutzer und dabei andere Fehler aufdeckt.

Steuer- und Beobachtbarkeit

Hierarchie



In einem hierarchischen System verursacht ein Fehler in einem Teilservice nur dann ein Versagen der übergeordneten Service-Leistung, wenn

- die übergeordnete Service-Leistung den Teilservice nutzt,
- der Teil-Service mit einer Bedatung aus der Nachweismenge angefordert wird und
- das Ergebnis der Teilleistung das Gesamtergebnis verfälscht.

Der Nachweis lokaler Fehler kann entsprechend in drei Teilaspekte aufgeteilt werden:

- Nutzungshäufigkeit bzw. -wahrscheinlichkeit (Steuerbarkeit),
- Nachweiswahrscheinlichkeit bei seperatem Test und
- Beobachtbarkeit.

Die Mindestnachweiswahrscheinlichkeit $p_{\mathrm{MTS}.i}$ für Fehler in einem Teilservice i bei Anforderung der übergeordneten Service-Leistung ist abschätzungsweise:

$$p_{\mathrm{MTS}.i} \approx 1 - e^{-h \cdot p_{\mathrm{MTS}} \cdot b} \qquad (2)$$

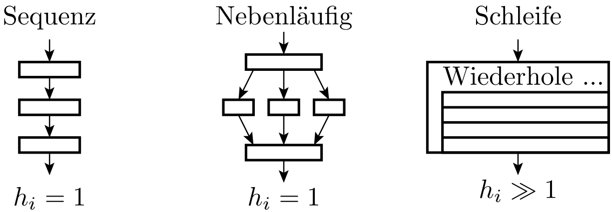
(h – Nutzungshäufigkeit von Teilservice i; $p_{\min.i}$ – minimale Nachweiswahrscheinlichkeit bei seperatem Test von Service i; b_i – Wahrscheinlichkeit, dass verfälsche Ergebnisse von Service i die Ergebnisse der übergeordneten Service-Leistung verfälschen). Fehler von Anweisungen in Schleifenkörpern, deren Ergebnisse direkt beobachtbar sind $(h_i \cdot p_{\mathrm{MTS}.i} \cdot b_i \gg 1)$, sind im übergeordneten Service fast sicher nachweisbar. Für schlecht nachweisbare Fehler $(h_i \cdot p_{\mathrm{MTS}.i} \cdot b_i \ll 1$ in selten genutzten und schlecht beobachtbaren Systembestandteilen vereinfacht sich Gl. 2 zu:

$$p_{\mathrm{MTS}.i} \approx h_i \cdot p_{\min.i} \cdot b_i$$

Verarbeitungsfluss Nutzungshäufigkeit

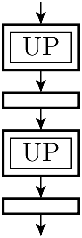
Nutzungshäufigkeit h_i einer Teilleistung i im übergeordneten Service hängt vom Verarbeitungsfluss ab. Für Programm wird unterschieden zwischen:

- Sequenz: Eine Teil-Service-Leistung nach der anderen.
- Nebenläufig: Zeitlich unabhängige Abarbeitung mehrerer Service-Leistung und Zusammfassung der Ergebnisse.
- Schleife: Mehrfache Abarbeitung der Teil-Service-Leistungen im Schleifenkörper.



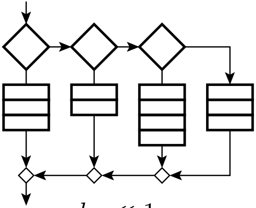
- Unterprogramme, Makros: Mehrfache Nutzung derselben Service-Leistung an unterschiedlichen Programmstellen[2].
- Fallunterscheidung: Auswahl zwischen unterschiedlichen Teilleistungen[3].

Nutzung von Unterprogrammen Makros und Inline-Funktionen



$h_i \gg 1$

Fallunterscheidung



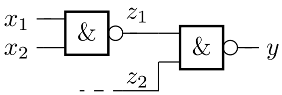
$h_i \ll 1$

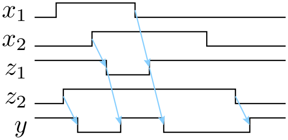
[2] Bei Makros und Include-Funktionen hat jede Instanz eigenen Code, aber der Code jeder Instanz hat dieselben Fehler, so dass es aus Sicht des Fehlernachweises egal ist, ob eine Code-Folge mehrfach aufgerufen oder mehrfach eingefügt wird.

[3] Schlecht nachweisbare Fehler sind vorrangig in Fallunterscheidungen zu erwarten.

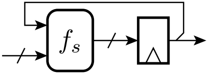
Der Verarbeitungsfluss in Schaltungen:

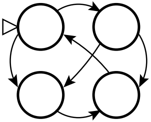
- In einer kombinatorischen Schaltung arbeiten alle Teilbausteine nebenläufig. Jede Eingabeänderung bildet sich mit einer gewissen Verzögerung auf eine Ausgabeänderung ab. Nutzungshäufigkeit der Teilschaltungen: $h_i = 1$.



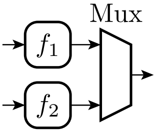


- Das Äquivalent zu eine Schleife ist ein Automat. Eine Service-Anforderung an einen Automaten erfordert i.Allg. mehrere Zustandsübergänge, für die Service-Leistungen der Übergangsfunktion und des Zustandsregisters angefordert werden. Nutzungshäufigkeit f_s: $h_i \gg 1$.



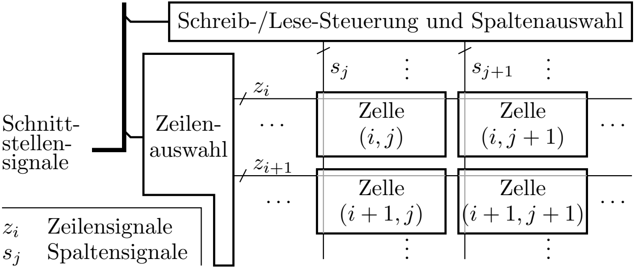


- Die Auswahl in einem Berechungsschritt erfolgt über Multiplexer. Nebenläufige Berechnung mehrer Ergebnisse und Weiterleitung nur von einem. Nutzungshäufigkeit f_i: $h_i \ll 1$.



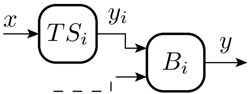
- Die geringste Nutzungshäufigkeit haben die Teil-Service-Leistungen in Speichern Lesen von und Schreiben auf eine Adresse (A – Anzahl der Adressen; $^{(*)}$ – Nur-Lese-Speicher):

$$h_i \approx \frac{1}{1^{(*)} \ldots 2 \cdot A}$$



Beobachtbarkeit

Die Ergebnisse einer genutzten Teil-Service-Leistung y_i werden im Allg. mit einer Funktion B_i auf die Ergebnisse y der Gesamt-Service-Leistung abgebildet. Die Beobachtbarkeit b_i, das Verfälschungen von y_i das Gesamtergebnis y verfälschen, hängt von der Art der Verfälschung und der Funktion B_i ab.



TS_i	Teil-Service i
y_i	Ergebnisse von Teil-Service i
B_i	Beobachterfunktion für y_i

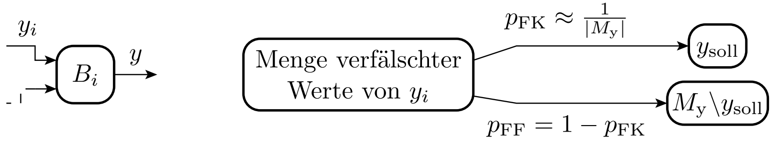
Fehlerhafte Ergebnisse einer Teil-Service-Leistung i sind immer beobachtbar ($b_i = 1$), wenn sie

- gleichzeitig Ergebnisse der Gesamt-Service-Leistung sind,
- linear oder
- mit einer umkehrbaren Funktion auf das Gesamtergebnis abgebildet werden.

Bei nicht umkehrbaren Beobachterfunktion liefert eine Mengenbetrachtung einen ersten Richtwert für die Beobachtbarkeit. Angenommen, der richtige Wert von y_i und alle Verfälschungen werden gleichwahrscheinlich auf Werte von y abgebildet. Dann ist die Beobachtbarkeit die Wahrscheinlichkeit, das ein verfälschtes y_i auf ein falsches y abgebildet wird:

$$b_i \approx p_{\mathrm{FK}} \approx 1 - \frac{1}{|M_{\mathrm{y}}|}$$

($|M_{\mathrm{y}}|$ – Anzahl der unterschiedlichen mit y darstellbaren Werte).



p_{FK} Wahrscheinlichkeit der Klassifizierung fehlerhafter Werte als korrekt
p_{FF} Wahrscheinlichkeit der Klassifizierung fehlerhafter Werte als fehlerhaft
M_{y} Menge der mit y darstellbaren Werte

Am schlechtesten sind tendentiell Verfälschungen bei Beobachterfunktionen mit zweiwertiger Ausgabe $|M_{\mathrm{y}}| = 2$ beobachtbar.

Für die Testauswahl und die vom Test nicht gefundenen Fehler, die die Verlässlichkeit im Einsatz beeinträchtigen, ist vor allem Kenntnis über die schwer nachzuweisenden und damit die schwer zu beobachtenden Fehler wichtig[4].

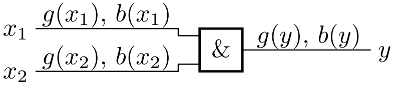
Am schlechtesten beobachtbar sind Fehler, deren Verfälschungen binär weiterverarbeitet werden:

- Fehler in digitalen Schaltungen und
- Fehler bei der Berechnung von Verzweigungsbedingungen.

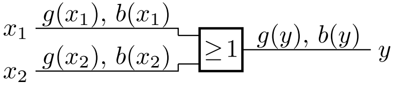
[4] Die einfacher nachzuweisenden Fehler werden automatisch mit gefunden.

Beobachtbarkeit in logischen Funktionen

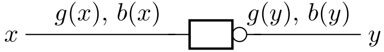
Die Eingabe einer UND-Operation ist beobachtbar, wenn die andere Eingabe eins, bei einer ODER-Operation, wenn die andere Eingabe null ist. Die Auftrittshäufigkeit einer Eins ist die Wichtung g und einer Null Gegenwahrscheinlichkeit $1 - g$.



$$b(x_2) = b(y) \cdot g(x_1)$$
$$b(x_1) = b(y) \cdot g(x_2)$$
$$g(y) = g(x_1) \cdot g(x_2)$$



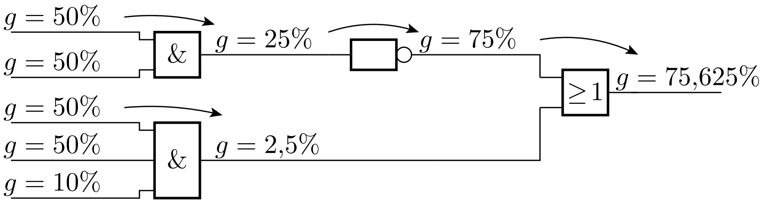
$$b(x_1) = b(y) \cdot (1 - g(x_2))$$
$$b(x_2) = b(y) \cdot (1 - g(x_1))$$
$$g(y) = 1 - (1 - g(x_1)) \cdot (1 - g(x_2))$$



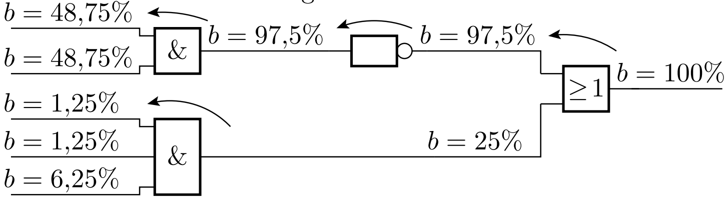
$$b(x) = b(y)$$
$$g(y) = (1 - g(x))$$

Die Wichtungen werden in und die Beobachtbarkeiten entgegen dem Berechnungsfluss bestimmt.

Berechnung der Wichtungen



Berechnung der Beobachtbarkeiten



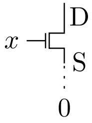
Die Beobachtbarkeit kann selbst bei wenigen logischen Operationen lokal sehr kleine Werte annehmen. Probleme bereiten rekonvergente Auffächerung (siehe Foliensatz F1, Abschn. 2.2).

Transistor- und Gatterfehler

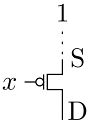
Transistorfehler

Die kleinsten in der Vorlesung betrachteten Teilsysteme sind Transistorschalter. NMOS-Transistoren können bei einer Eins am Gate eine Verbindung nach Masse[5]. PMOS-Transistoren bei einer Null am Gate eine Verbindung nach U_{V} schalten.

NMOS-Transistor



PMOS-Transistor



x	D→S
0	0 (aus)
1	1 (ein)

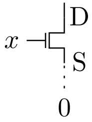
x	D→S
1	0 (aus)
0	1 (ein)

permanente Fehler:
- ständig ein (stuck-at 1)
- ständig aus (stuck-at 0)

unbeständige Fehler:
- verzögertes Einschalten
- verzögertes ausschalten

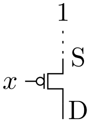
[5]Eins ist in der Vorlesung »groß« und Null »klein. Das niedrigste Potential hat Masse und das höchste U_{V}.

NMOS-Transistor



x	D→S
0	0 (aus)
1	1 (ein)

PMOS-Transistor



x	D→S
1	0 (aus)
0	1 (ein)

permanente Fehler:
- ständig ein (stuck-at 1)
- ständig aus (stuck-at 0)

unbeständige Fehler:
- verzögertes Einschalten
- verzögertes ausschalten

Mögliche permanente Fehlverhalten sind, dass der Transistor ständig ein- oder ausgeschaltet (Haftfehler). Mögliche unbeständige Fehlverhalten sind, das diese Fehlverhalten nur kurz nach Schaltvorgängen zu beobachten ist (Verzögerungsfehler). Unterbrechungen und Kurzschlüsse der Transistoranschlussleitungen sind ähnlich nachweisbar.

Nachweiswahrscheinlichkeiten bei einem seperaten Test mit gleichwahrscheinlicher Bedatung ist $p_i \approx 25 \ldots 50\%$.

Speicherzellen und Speicher

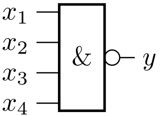
Eine Speicherzelle stellt die Service-Leitungen Schreiben, Speichern und Lesen bereit. Fehlernachweis ist nur beim Lesen möglich und erfordert allgemein eine vorherige Schreiboperation mit einem bestimmten Wert und Speichern, während andere Zellen beschrieben oder gelesen werden.
Nachweiswahrscheinlichkeit je Leseoperation $p_i = 1 \ldots 50\%$, bei Fehlern in Festwertspeichern bis 100%.

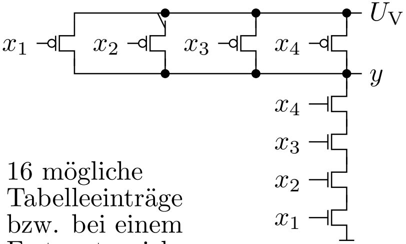
Der Service »Lesen von einem Speicherplatz« nutzt den Lese-Service der einzelnen Zellen im Mittel mit der Häufigkeit $h_i \approx 1/A$ (A – Anzahl der Adressen). Gelesene Werte sind immer beobachtbar. Nachweiswahrscheinlichkeit von Speicherfehlern je Blockspeicherzugriff:

$$p_i = \frac{1}{1 \ldots 100 \cdot A}$$

Gatterfehler

Eine logische Funktion kann unterschiedlich realisiert sein, z.B. mit Transistorschaltern oder als Blockspeicher mit einprogrammierter Wertetabelle.

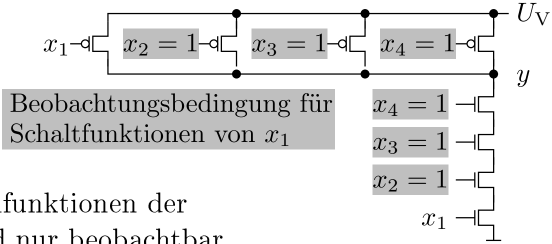




x_4	x_3	x_2	x_1	y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
...	...	...	...	...
1	1	1	1	0

16 mögliche Tabelleeinträge bzw. bei einem Festwertspeicher Speicherplätze

Als Blockspeicher mit einer defekten Zelle: $p_i \approx \frac{1}{1\ldots100\cdot16}$



Bei Realisierung mit Transistorschaltern wird jeder Schalter bei jeder Gatter-Service-Leistung genutzt. Fehlfunktionen der Transistorschalter sind nur beobachtbar, wenn die parallelen Transistoren sperren und die Transistoren in Reihe leiten.

Verlangt im Beispiel drei definierte Bitwerte (Care-Bits), bei gleichwahrscheinlicher Bedatung: $b_i \approx 2^{-3}$.

Nachweiswahrscheinlichkeit eines Transistorfehlern bei einem seperaten Gattertest:

$$p_i \approx 2^{-4\ldots5}$$

Die Realisierung mit Transistorschaltern hat deutlich weniger und besser im Verbund testbare Teilsysteme als die Realisierung als Blockspeicher.

Das Haftfehlermodell

Das Haftfehlermodell

Ein Fehlermodell ist ein Algorithmus, um für eine Systembeschreibung eine Menge möglicher Fehler für die Bewertung von Testsätzen zu berechnen. Das Haftfehlermodell ist das wichtigste und in der Praxis verbreitetste Fehlermodell, ursprünglich entwickelt für die Bewertung und Berechnung von Tests für Gatterschaltungen, gleichfalls geeignet für logische Berechnungen, adaptierbar auf alle Arten der Testbewertung und -suche, die Testanforderungen als logische Bedingungen formulieren.

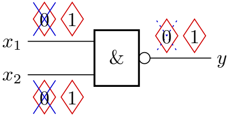
Für das Haftfehlermodell gibt es Fehlersimulatoren und Programme zur Berechnung von Tests für Systeme, die bis zu vielen tausend logische Operationen enthalten dürfen.

Im Weiteren werden Haftfehlermengen in Beispielrechungen als Ersatz für Mengen echter Fehler verwendet, weil sie sehr einfach zusammenstellbar sind.

Haftfehler für Logikgatter

Für jeden Gatteranschluss wird unterstellt:

- ein sa0 (stuck-at-0) Fehler
- ein sa1 (stuck-at-1) Fehler



x_2	x_1	$\overline{x_2 \wedge x_1}$	sa0(x_1)	sa1(x_1)	sa0(x_2)	sa1(x_2)	sa0(y)	sa1(y)
0	0	1	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1	0	0	1

Nachweisidentität (gleiche Nachweismenge)

0 sa0-Modellfehler

1 sa1-Modellfehler

× identisch nachweisbar

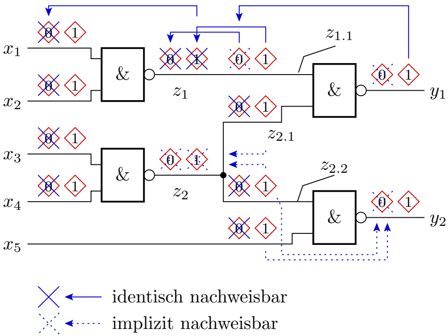
⁙ implizit nachweisbar

⇢ Nachweisimplikation

▒ zugehörige Eingabe ist Element der Nachweismenge

Zusammenfassung identisch nachweisbarer Fehler. Optionale Streichung redundanter und implizit nachweisbarer Modellfehler. Modellierte Fehler sind ähnlich wie Transistorfehler in Gattern nachweisbar. Nicht für Gatter aus Blockspeichern geeignet.

Streichen identisch implizit nachweisbarer Fehler

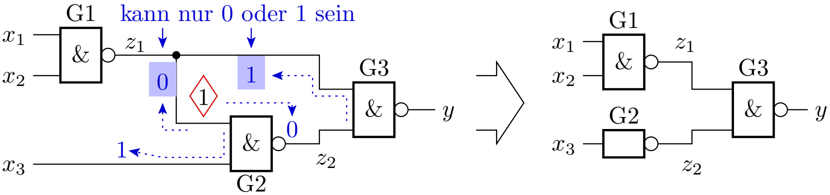


Größe der Anfangsfehlermenge:	24
Anzahl der nicht identisch nachweisbaren Fehler:	14
ohne implizit nachgewiesene Fehler:	10

	Mengen von identisch nachweisbaren Fehlern	Nachweis impliziert durch
1	sa0(x_1), sa0(x_2), sa1(z_1), sa1($z_{1.1}$)	
2	sa1(x_1)	
3	sa1(x_2)	
4	sa0(x_3), sa0(x_4), sa1(z_2)	9, 12
5	sa1(x_3)	
6	sa1(x_4)	
7	sa0(z_2)	5, 6, 8, 11
8	sa0(z_1), sa0($z_{1.1}$), sa0($z_{2.1}$), sa1(y_1)	2, 3
9	sa1($z_{2.1}$)	
10	sa0(y_1)	1, 9
11	sa0($z_{2.2}$), sa0(x_5), sa1(y_2)	
12	sa1($z_{2.2}$)	
13	sa1(x_5)	
14	sa0(y_2)	12, 13

Redundante Fehler

Die berechnete Fehlermenge kann Modellfehler enthalten, die die Funktion nicht beeinträchtigen, weil sie nicht nachweisbar sind.



- Der Gatteranschluss kann mit »0« (sa0 Fehler nicht nachweisbar) bzw. »1« (sa1-Fehler nicht nachweisbar) verbunden sein, ohne dass sich die Funktion ändert.
- Umformungen zur Beseitigung redundanter Modellfehler dient auch zur Systemoptimierung. Kann auch zur Eliminierung von »totem Code« bei Software eingesetzt werden.

Komplexe Funktionen

Test mit alle Bedatungsvarianten

Die nachfolgende Tabelle zeigt, dass komplexe Funktionen mit vielen Eingabebits selbst ohne Gedächtnis nur mit einer winzigen Stichprobe von Bedatungsvarianten getestet werden können.

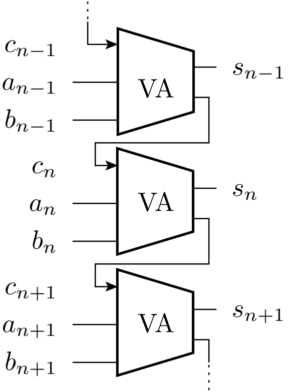
	m	2^m	t^*	$p_{\min}$
Gatter mit 4 Eingängen	4	16	16 µs	$10^{1\ldots2}$
ALU mit 68 Eingängen	68	$3\cdot10^{20}$	10^7 Jahre	$10^{-21\ldots22}$
vier Eingabevariablen vom Typ int32_t	128	$3\cdot10^{38}$	10^{25} Jahre	$10^{-39\ldots40}$

(m – Anzahl der Eingabebits; 2^m – Anzahl der Bedatungsmöglichkeiten; t^* Testdauer bei einer Service-Ausführungszeit von 1µs; $p_{\min}$ – minimale Nachweiswahrscheinlichkeit bei Realisierung mit einem Blockspeicher oder einer Tabellenfunktion).

Komplexe Funktionen sind so realisiert, dass fast alle Fehler mit sehr vielen unterschiedlichen Bedatungen nachweisbar sind.

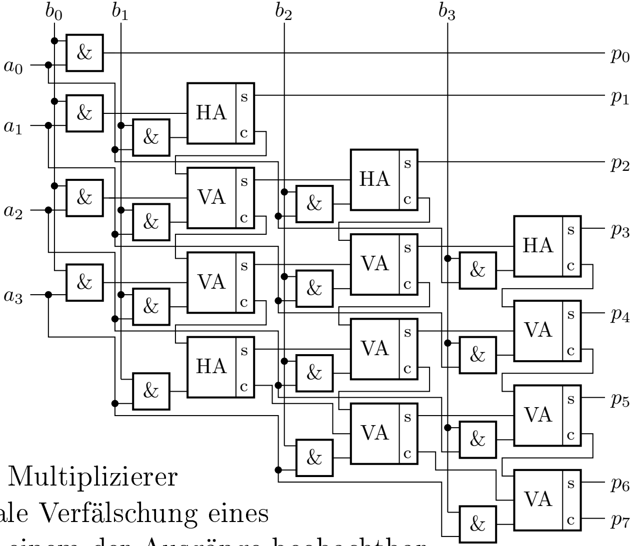
Beispiel Ripple-Addierer

- Jede Addition von zwei Datenworten nutzt jeden der Volladdierer.
- Fehlerhafte Ausgaben am Summenbit sind direkt beobachtbar.
- fehlerhafte Überträge invertieren das nächst höhere Summenbit.



Beobachtbarkeit der Service-Leistungen der einzelnen Volladdierer ist eins, die Nachweiswahrscheinlichkeit von Haftfehlern auf den Verbindungen ist etwa 50%, ein Volladdierer hat drei Care-Bits, ... $p_{\min} \approx 2^{-4\ldots6}$ und nicht wie bei einer Tabellenrealisierung mit $p_{\min} \approx 2^{2\cdot n+1\ldots2}$.

Multiplizierer

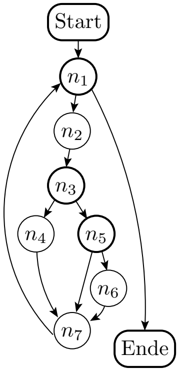


Auch bei einem Multiplizierer
ist fast jede lokale Verfälschung eines
Signalwertes an einem der Ausgänge beobachtbar.

Ein Beispielprogramm und sein Kontrollflussgraph

```
type tCounter is record A, B, N: natural; end record;
function ZZ(Ct_max: natural) return tCounter is
 variable z: character;
 variable Ct: tCounter:=(0,0,0);
begin
n1: for Ct.N<Ct_max loop
n2:  LeseZeichen(z);
n3:  if is_TypA(z) then
n4:   Ct.A := Ct.A + 1;
n5:  elsif is_TypB(z) then
n6:   Ct.B := Ct.B + 1;
     end if;
n7:  Ct.N := Ct.N +1;
    end loop;
 return Ct;
end function;
```

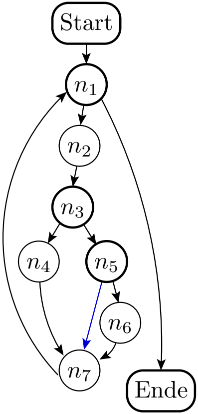
Testauswahlgrundlage Kontrollflussgraph



Kontrollflussorientierte Testauswahl

Die in der Industrie verbreiteten Auswahlregeln auf Basis des Kontrollflussgraphen:

- 100% Anweisungsüberdeckung
  - jede Anweisung muss mindestens einmal ausgeführt werden;
  - Beispiel: Start n_1, n_2, n_3, n_4, n_7, n_1, n_2, n_3, n_5, n_6, n_7, n_1, Ende
- 100% Zweigüberdeckung[6]
  - jede Kante muss mindestens einmal durchlaufen werden;
  - Beispiel: Start n_1, n_2, n_3, n_4, n_7, n_1, n_2, n_3, n_5, n_6, n_7, n_1, n_2, n_3, n_5, n_7, n_1, Ende



bei 100% Anweisungsüberdeckung möglicherweise ungetestete Kante

[6] vom Standard RTCA DO-178 B ab Level C (Software, die bedeutende Ausfälle verursachen kann) gefordert.

Die etablierten Auswahlregeln »100% Überdeckung« statt jeder Zweig ist mindesten $n > 1$ mal abzuarbeiten, deuten darauf hin, dass Anweisungsfehler in der Regel lokale Nachweiswahrscheinlichkeiten und Beobachtbakeiten nahe eins haben. Es ist aber fraglich, ob das immer gilt. Die aktuellen Standards und Werkzeuge sollten in Zukunft so geändert werden, dass jede Anweisung mit einer Bedatungsstichprobe größer eins zu testen ist.

Die Zweigüberdeckung besagt, dass für binäre Zwischenergebnisse ein Test mit beiden Werten zu fordern ist. Das ist dieselbe Idee wie die des Haftfehlermodells, allerdings nur für die Ergebnisse logischer Berechnungen.

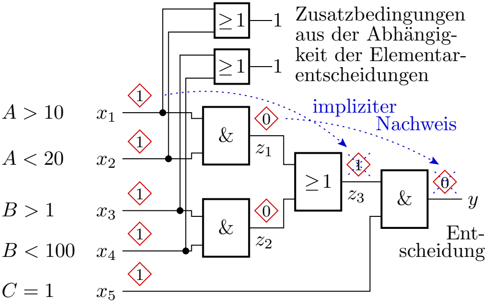
Die nachfolgend beschriebene Bedingungsüberdeckung[7] wird die Menge der zu überprüfenden Bedingungen in einer Weise erweitern, das auch Eingabehaftfehler an logischen Operationen mit berücksichtigt werden.

[7] In der Literatur »modified condition/decision coverage«. Standard RTCA DO-178 B fordert für flugkritische Software (Level A) 100% Überdeckung.

Komplexe Programmentscheidung

```
n1: if (((A>10) and (A<20)) or ((B>1) and (B<100)))
        and (C=1) then
n2:   ...
    else
n3: ...
```

Kontrolle, dass die Entscheidung mindestens einmal von jeder Bedingung abhängt. Identisch mit dem Nachweis aller Haftfehler in der äquivalenten Schaltung.



	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	y
sa1(x_1)	1	1	0	1	0	0
sa1(x_2)	1	0	1	0	1	0
sa1(x_3)	~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~
sa1(x_4)	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~
sa1(x_5)	0	–	–	1	1	0
sa0(z_1)	1	1	1	1	0	1
sa0(z_2)	1	1	0	1	1	1

Entwurfsfehler

Entwurfsfehler

Für Entwürfe gibt es in der Regel keine korrekte Beschreibung, weder für die Soll-Funktion noch für die Realisierung. Für den Entwurf von Testfällen, die Zusammenstellung möglicher Fehler zur Bewertung der Tests und die Spezifikation einzubauender Kontrollfunktionen werden deshalb zum Teil gesonderte, vom eigentlichen Entwurf unabhängige Beschreibungen entwickelt. Diese haben den Vorteil, dass sie mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht dieselben Fehler wie der eigentliche Entwurf enthalten. Aus dem Programmfluss eines Programms lassen sich z.B. schlecht Testbedingungen oder Fehlerannahmen extrahieren für fehlende Verzweigungen, vergessene Funktionen, falsche Algorithmen, ...

Dieser Abschnitt stellt zwei weitere in der Praxis verbreitete binarisierende Beschreibungsformen vor

- Ursache-Wirkungs-Analyse und
- Automaten

für die der Testauswahl und Bewertung auch in gewisser Weise auf das Haftfehlermodell zurückgeführt werden kann.

Ursache-Wirkungs-Analyse

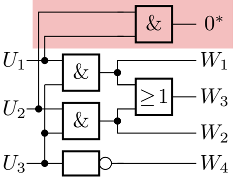
Grundlage einer UW-Analyse ist die Spezifikation des Systems, in der die Zielfunktion umrissen ist. Für die Zielfunktion wird eine neue Beschreibung entwickelt aus

- Auslösern für Aktionen (Ursachen) und
- ausgelösten Aktionen (Wirkungen).

Auslöser (Ursachen) sind im Kontext der Vorlesung Service-Anforderungen mit Bedatungen, die bestimmte Soll-Reaktionen zur Folge haben sollen. Wirkungen sind einzeln spezifizierte Zielfunktionen, ergänzte selbstverständliche Funktionen und Fehlerbehandlungen. Jede Ursache und Wirkung wird durch eine binäre Variable (nicht eingetreten/eingetreten) beschrieben. Anschließend werden die logische Bedingungen und Verknüpfungen zwischen den einzelnen Ursachen und Wirkungen mit logischen Operationen beschrieben.

Beispiel: Zähle Zeichen

- Wirkungen:
  W_1: Anzahl_TypA +1
  W_2: Anzahl_TypB +1
  W_3: Gesamtzahl +1
  W_4: Programm beenden
- Ursachen:
  U_1: Zeichen ist vom Typ A
  U_2: Zeichen ist vom Typ B
  U_3: Zeichenanzahl < Maximalwert
- Sich ausschließende Ursachen:
  UND-Verknüpfung muss »0« sein.



* Eingabezeichen kann nur Typ A oder B sein

Test mit allen einstellbaren Ursachen

U_1	0	1	0	1	0	1	0	1
U_2	0	0	1	1	0	0	1	1
U_3	0	0	0	0	1	1	1	1
W_1	0	0	0		0	1	0	
W_2	0	0	0		0	0	1	
W_3	0	0	0		0	1	1	
W_4	1	1	1		0	0	0	

- Eine Ursache-Wirkungs-Analyse deckt Mehrdeutigkeiten und Widersprüche in der Spezifikation auf

Testobjekt als VHDL- bzw. Ada-Funktion

```
type tCounter is record A, B, N: natural; end record;
function ZZ(Ct_max: natural) return tCounter is
 variable z: character;
 variable Ct: tCounter:=(0, 0, 0);
begin
 for Ct.N<Ct_max loop
  LeseZeichen(z);
  ct.N := Ct.N +1;
  if   is_TypA(z) then Ct.A := Ct.A +1;
  elsif is_TypB(z) then Ct.B := Ct.B +1;
  end if;
  write(" z=" & str(z)    & " A=" & str(Ct.A)   (TA)
      & " B=" & str(Ct.B) & " N=" & str(Ct.N)); (TA)
 end loop;
 write("Ende"); return Ct;
end function;
```

$^{(TA)}$ Testausgabe

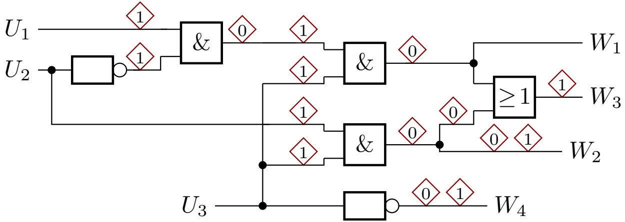
Funktionsaufrufe	Ausgaben	U_1	U_2	U_3	W_1	W_2	W_3	W_4
`ZZ(3)`	`z=0 A=1 B=0 N=1`	1	0	1	1	0	1	0
	`z=A A=1 B=1 N=2`	0	1	1	0	1	1	0
	`z=x A=1 B=1 N=3`	0	0	1	0	0	1	0
	`Ende`	–	–	0	0	0	0	1
`ZZ(1)`	`z=1 A=1 B=0 N=1`	1	0	1	1	0	1	0
	`Ende`	–	–	0	0	0	0	1
`ZZ(1)`	`z=B A=0 B=1 N=1`	0	1	1	0	1	1	0
	`Ende`	–	–	0	0	0	0	1
`ZZ(0)`	`Ende`	–	–	0	0	0	0	1

U_1 Zeichen ist eine Ziffer
U_2 Zeichen ist ein Großbuchstabe
U_3 max. Zählwert erreicht
– es wird kein Zeichen gelesen

W_1 A weiterzählen
W_2 B weiterzählen
W_3 N weiterzählen
W_4 Funktion beenden

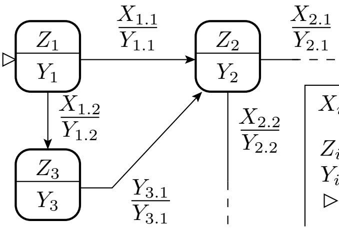
Enkennbare Ungereimtheiten: Im UW-Graph gibt es keine Ursache für »anderes Zeichen gelesen«. Programm und Test berücksichtigen diesen Fall. Ist das so richtig?

Zurückführung auf das Haftfehlermodell



Ein Ursache-Wirkungs-Graph kann wie eine logische Schaltung dargestellt werden. Für die Auswahl der Testfälle ist in der Regel zu fordern, dass bei jeder logischen Verknüpfung überprüft wird, dass jede Eingabeverfälschung in mindestens einem Test nachweisbar ist. Über das Haftfehlermodell gewonne Tests sind gleichzeitig zu aktivierende Ursachen, die bestimme Wirkungskombinationen verursachen. Das sind nur Rahmenvorschriften für die Konstruktion der eigentlichen Testbeispiele.

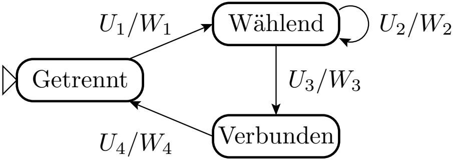
Zielfunktion als Automat



- X_i Eingabewerte, bei denen der Zustandsübergang erfolgt
- Z_i Zustand
- Y_i Ausgabewert
- $\triangleright$ Kennzeichen für den Anfangszustand nach der Initialisierung

Das Automatenmodell beschreibt die Zielfunktion eines Systems durch einen Menge von Eingaben, Ausgaben, Zuständen und Zustandsübergänge. Zustandsübergänge werden durch Eingaben ausgelöst. Bei den Übergängen und in den Zuständen werden Aktionen gesteuert. Wie im UW-Modell werden bei Automaten für die Testauswahl die Ursachen (Bedingungen für Zustandsübergänge) und die Wirkungen (gesteuerte Aktionen) binarisiert.

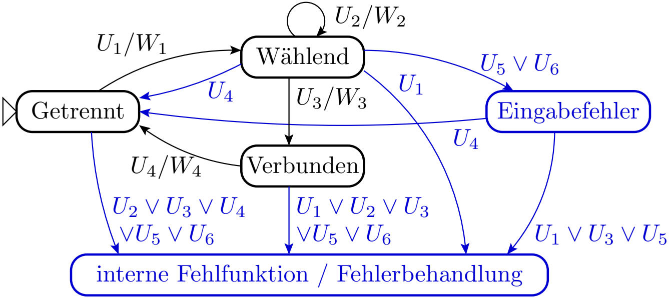
Verbindungsaufbau und -abbau beim Telefonieren



U_1	Abnehmen
U_2	Ziffer wählen
U_3	Rufnummer gültig
U_4	Auflegen
W_1	Rufnummer zurücksetzen
W_2	Ziffer zur Rufnummer hinzufügen
W_3	Verbindung aufbauen
W_4	Verbindung trennen

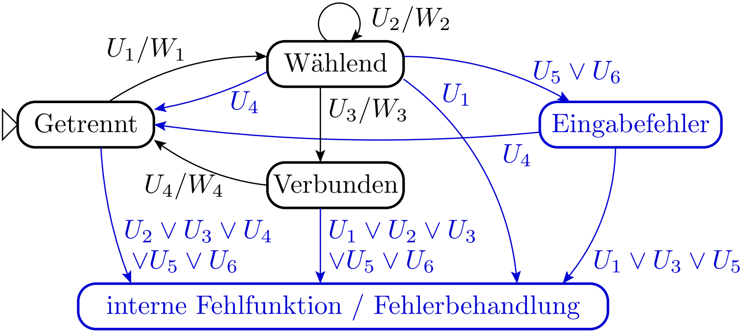
- Test der Soll-Funktion: $U_1 \to U_2 \to \ldots \to U_2 \to U_3 \to U_4$
- Verhalten für andere Eingabefolgen?
  - Abnehmen, Wählen, Auflegen ($U_1 \to U_2 \to U_4$)
  - Abnehmen, Wählen, Wählen, falsche Nummer)
  - ...

$\Rightarrow$ Ablaufgraph ist noch unvollständig



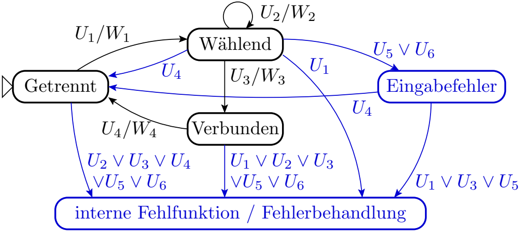
U_1	Abnehmen	W_1	Rufnummer zurücksetzen
U_2	Ziffer wählen	W_2	Ziffer zur Rufnummer hinzufügen
U_3	Rufnummer gültig	W_3	Verbindung aufbauen
U_4	Auflegen	W_4	Verbindung trennen
U_5	Rufnummer ungültig		
U_6	Timeout		

- Ergänzung um Knoten und Kanten für alle denkbaren Ursachen und Wirkungen. Präzisierung der Spezifikation.



Test aller Zustandsübergänge, Wirkungen, ...

- Abheben,Wählen, Wählen, Rufnummer gültig, Auflegen.
- Abheben, Wählen, Auflegen.
- Abheben, Wählen, Wählen, Timeout, Auflegen.
- Abheben, Wählen, Rufnummer ungültig, Auflegen.



Test der Reaktion auf interne Fehlfunktionen

- Initialisieren, Auflegen.
- Initialisieren, Rufnummer gültig, ...

Auswahlregeln sind wie bei der kontrollflussorientierten Auswahl:

- Ausprobieren aller Kanten (in Analogie zu 100% Zweigüberdeckung) oder
- jeder Übergang muss mindestens einmal von jeder Bedingung abhängen (Analogie Bedingungsüberdeckung, zurückführbar auf das Haftfehlermodell).

Aus einem Automatengraphen sind wie bei der UW-Analyse nur Rahmenvorschriften für die Konstruktion der eigentlichen Testbeispiele ableitbar, nämlich Folgen von auszulösenden Ursachen für die Kantenübergänge und erwartete Wirkungen in Form der den Kanten und Zuständen zugeordneten Aktionen.

Der zufällige Fehlernachweis für Automaten wird durch Markov-Kette beschrieben (vergl. Foliensatz F1, Abschn. 2.1).

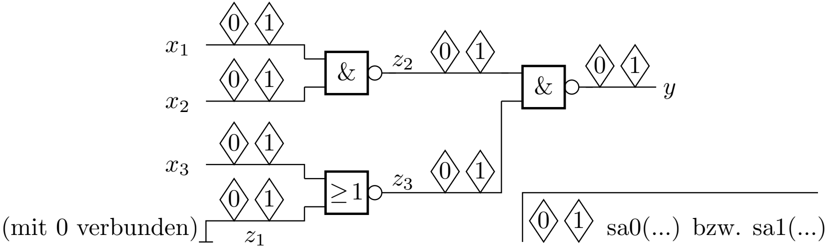
Zusammenfassung

- Die Häufigkeiten, mit dem Teil-Service-Leistungen von einem übergeordneten Service genutzt werden schwankt von sehr oft (Schleifen, Makros, Unterprogramme) bis sehr selten (Fallunterscheidungen).
- Die Beobachtbarkeit schwankt von nahe eins (normale Anweisungen) bis sehr gering bei binärer Verarbeitung.
- Viele der beim Entwurf und der Fertigung entstehenden Fehler werden große Nachweiswahrscheinlichkeiten haben, weil die fehlerhaften Teilsysteme praktisch bei jeder Service-Anforderung genutzt werden.
- Mit abnehmender Nachweiswahrscheinlichkeit nimmt die Fehleranzahl ab, aber es kann immer schlecht nachweisbare Fehler geben, die über Jahre unentdeckt bleiben (vergl. Fehlernachweisdicht, Foliensatz F1, Abschn. 3.3).

Aufgaben

Aufgabe 1.1: Haftfehlermenge

Gegeben ist die nachfolgende Schaltung mit 12 eingezeichneten Haftfehlern.



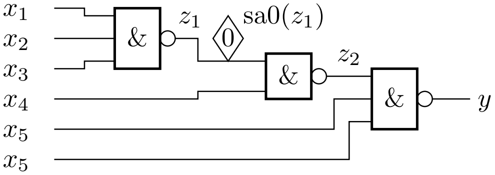
Welche der Haftfehler sind

1. redundant, d.h. mit keiner Eingabebelegung nachweisbar,
2. identisch nachweisbar,
3. implizit durch die Tests anderer Haftfehler nachweisbar?

Aufgabe 1.2: Nachweiswahrscheinlichkeit

Berechnen Sie für den in der nachfolgenden Abbildung eingezeichneten Haftfehler sa0(z_1) die Nachweiswahrscheinlichkeit

1. für gleichwahrscheinliche Eingaben und
2. mit Eingabefolgen mit Auftrittshäufigkeit für Einsen als Bitwerte von $g(x_i) = 60\%$.



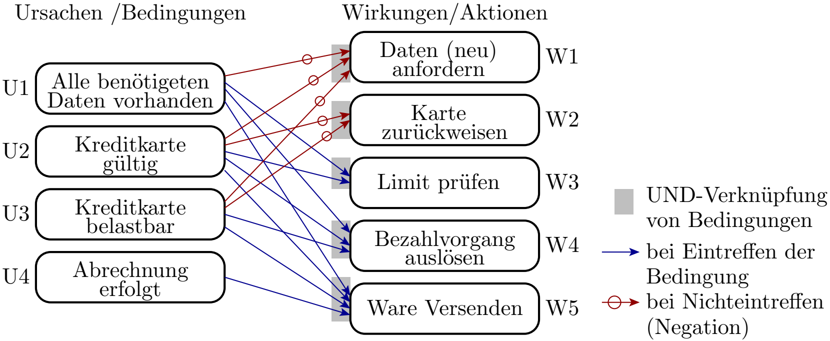
Aufgabe 1.3: Kontrollflussgraph

Stellen Sie für das nachfolgende Programm den Kontrollflussgraph und für diesen eine Zustandsfolge mit 100% Verzweigungsüberdeckung auf.

```
void Steuerschrittfunktion(uint16_t VAbst){
    SSF_Ct ++;
    if (SSF_Ct>=28){ // etwa alle 2 Sekunden
        SSF_Ct = 0;
        // Steuerzustand_A zirkular erhöhen: a,b,..,z,a,..
        zustand = getState(Steuerzustand_A);
        if (zustand<='z') zustand++;
        else zustand = 'a';
        setState(zustand, Steuerzustand_A);
        if (VAbst>2000) // Wenn Abstandsspannung größer 2V
        incErr(2);      // Fehlerzähler 2 erhöhen
    }
    startLCD();
}
```

Aufgabe 1.4: Ursache-Wirkungs-Analyse

Gegeben ist das Ergebnis einer Ursache-Wirkungs-Analyse in einer anderen Darstellung aus [http://test.silke-wingens.de/].



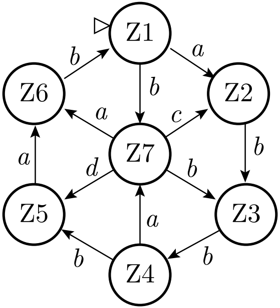
1. Stellen Sie die dargestellte Ursache-Wirkungs-Beziehung durch logische Verknüfungen dar.
2. Bestimmen Sie in dieser Darstellung eine Menge unterschiedlich nachweisbarer Haftfehler[8].
3. Bestimmen Sie für alle diese Haftfehler die Nachweiswahrscheinlichkeiten für nachfolgende Auftrittshäufigkeiten der Ursachen: $h(U1) = 20\%$, $h(U2) = 80\%$, $h(U3) = 40\%$ und $h(U4) = 30\%$.

---

[8] Ausgehend von der Anfangsfehlermenge mit je zwei Haftfehlern an jedem Gatteranschluss sollen redundante Fehler gesucht und ausgeschlossen und identisch nachweisbare Fehler zu einem Modellfehler zusammengefasst werden.

Aufgabe 1.5: Automatentest

Gegeben Sie der nachfolgende Automat mit symbolischen Zuständen und Eingaben:



Zustände: Z1, Z2, ...
Eingabewerte: a, b, c, d
Anfangszustand: Z1

Für jeden Zustand soll gelten, dass der Automat solange darin bleibt, bis er eine Eingabe zu seinem Verlassen bekommt.

1. Einwickeln Sie eine Ablauffolge, mit der alle Zustandsübergänge mindestens einmal ausprobiert werden.
2. Stellen Sie eine Markow-Kette in Matrix-Form auf, mit der sich die Wahrscheinlichkeit bestimmen lässt, das der mit d beschriftete Kantenübergang mindestens einmal getestet wurde. Zu Beginn sei der Automat im Anfangszustand $Z1$. Die Auftrittshäufigkeiten der symbolischen Eingabewerte seien $P(a) = 10\%$, $P(b) = 40\%$, $P(c) = 3\%$ und $P(d) = 5\%$.
3. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Kante d mindesteens einmal getestet wird als Funktion der Anzahl der Automatenschritte.

Verteilungen

Eine Verteilung weist möglichen Werten einer Zufallsvariablen Wahrscheinlichkeiten zu. Es wird unterschieden zwischen

- Häufigkeitsverteilungen, die empirisch durch Zählen, Messen oder aus Umfragedaten erstellt und als Tabelle, Grafiken oder modellhaft durch eine Funktion dargestellt werden, und
- Wahrscheinlichkeitsverteilungen als mathematisches Gegenstück und als Vorhersage für Häufigkeitsverteilungen.

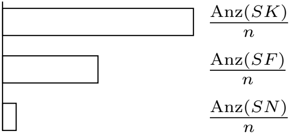
Bereits behandelte Verteilungen

Es wurden bereits einige für die Bewertung und Sicherung der Verlässlichkeit relevante Häufigkeitsverteilungen eingeführt:

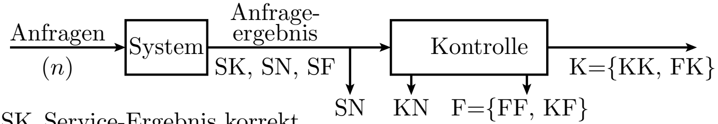
- Einteilung von Service-Ergebnissen in korrekt, fehlerhaft und kein Ergebnis.

SK	Service-Ergebnis korrekt
SF	Service-Ergebnis fehlerhaft
SN	kein Service-Ergebnis
n	Anzahl der Service-Anfragen

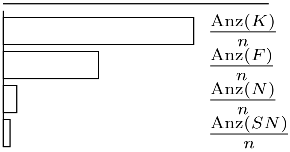
empirisch schätzbare Häufigkeitsverteilung



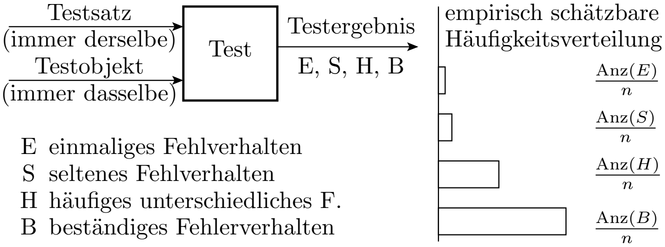
- Die Einteilung der Kombinationen von Service- und Kontrollergebnissen in kein Ergebnis, Ergebnis, aber kein Kontrollergebnis, Ergebnis als korrekt und Ergebnis als fehlerhaft bewertet.

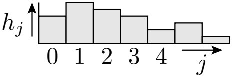


SK	Service-Ergebnis korrekt
SF	Service-Ergebnis fehlerhaft
SN	kein Service- Ergebnis
N	kein Kontrollergebnis
K	Ergebnis als korrekt bewertet
F	Ergebnis als fehlerhaft bewertet



- Klassifizierung der Art der Fehlfunktion nach der zu vermutenden Ursache in einmalige Fehlerhalten (E), die vermutlich Störungen, seltenem Fehlverhalten (S), die Schwachstellen im System, die die Störanfälligkeit erhöhen, vermuten lassen, häufige unterschiedliche Fehlverhalten (H), die auf unbeständige Fehler (B) und gleiche Fehlverhalten, die auf beständige Fehler als Ursache deuten.





- Die Fehlernachweisdichte, die die relative Häufigkeit der Fehler in einem System in Abhängigkeit von ihrer Nachweiswahrscheinlichkeit beschreibt. Die Fehlernachweisdichte wird im Weiteren noch eine wichtige Rolle spielen. Zu ihrer empirischen Abschätzung wurden die Nachweiswahrscheinlichkeiten in Intervalle
$$I_j = \left[v^{-j}, v^{-(j+1)}\right)$$
($j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ – Intervallnummer; v – Parameter für die Intervallgröße) unterteilt, z.B. für $v = 2$ in $\left[1, \frac{1}{2}\right)$, $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, ... und für jedes Intervall der Anteil der erkannten Fehler mit einen Nachweiswahrscheinlichkeit in diesem Bereich gezählt.

Gemeinsam haben alle diese Verteilungen, dass sie sich empirisch bestimmen lassen, aber nur indirekte Hinweise darauf erlauben, wie groß die Zuverlässigkeit, die Verfügbarkeit oder die Sicherheit eines Systems ist und wie Kontrollen, Tests, Entstehungs- und Reparaturprozesse, ... diese Größen beeinflussen.

Erwartungswert und Varianz

Erwartungswert und Varianz

Bei einer Wahrscheinlichkeitsverteilung sind die möglichen Ergebnisse ein Zahlenbereich (abzählbar oder stetig). Jedem Wert dieses Bereiches ist eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet.

mögliche Ergebnisse x_i	2	3	4	5	...
Wahrscheinlichkeit p_i	3%	5%	2%	3%	...

Der Erwartungswert μ, $E(X)$ (X – Zufallsgröße) ist der Mittelwert der zu erwartenden Realisierungen:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i \qquad (3)$$

Die Varianz σ^2, $D^2(X)$ ist die mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert:

$$D^2(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (x_i - E(X))^2 \qquad (4)$$

Verschiebungssatz

Vereinfachung der Berechnung der Varianz[9]:

$$D^2(X) = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2 \tag{5}$$

Herleitung:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \left(x_i^2 - 2 \cdot x_i \cdot E(X) + E(X)^2\right)$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i^2}_{E(X^2)} + E(X) \cdot \left(E(X) \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i}_{1} - 2 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i}_{E(X)} \right)$$

Die Standardabweichung σ, $\sqrt{D^2(X)}$ ist die Wurzel aus der Varianz und ein Maß dafür, wie stark die Ergebnisse eines Zufallsexperiments um ihren Erwartungswert streuen.

[9] Bei begrenzter Rechengenauigkeit numerisch problematisch.

Beispielrechnung für Erwartungswert und Varianz

Gegeben ist die Verteilung in der nachfolgenden Tabelle:

Wert	5	6	8	11	22
Wahrscheinlichkeit	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Wie groß sind der Erwartungswert μ, die Varianz σ^2 und die Standardabweichung σ?

- Erwartungswert:

$$\mu = 0{,}1 \cdot 5 + 0{,}2 \cdot 6 + 0{,}4 \cdot 8 + 0{,}2 \cdot 11 + 0{,}1 \cdot 22 = 9{,}3$$

- Varianz nach Gleichung 4:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= 0{,}1 \cdot (5 - 9{,}3)^2 + 0{,}2 \cdot (6 - 9{,}3)^2 + 0{,}4 \cdot (8 - 9{,}3)^2 \\ &+ 0{,}2 \cdot (11 - 9{,}3)^2 + 0{,}1 \cdot (22 - 9{,}3)^2 = 21{,}4\end{aligned}$$

Wert	5	6	8	11	22
Wahrscheinlichkeit	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

- Varianz nach dem Verschiebungssatz:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= 0{,}1\cdot 5^2+0{,}2\cdot 6^2+0{,}4\cdot 8^2+0{,}2\cdot 11^2\\ &+ 0{,}1\cdot 22^2-9{,}3^2=21{,}4\end{aligned}$$

- Standardabweichung:

$$\sigma=\sqrt{21{,}4}=4{,}63$$

Lineare Transformation

Lineare Transformationen sind die Multiplikation und Addition einer Zufallsgröße mit reellen Zahlen. Der Erwartungswert vergrößert und verschiebt sich um dieselben Werte:

$$E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$$

Bei der Varianz entfällt die Verschiebung und der Skalierungsfaktor geht im Quadrat ein[10]:

$$D^2(a \cdot X + b) = a^2 \cdot D^2(X) \tag{6}$$

Die Varianz ist insbesondere verschiebungsinvariant und bleibt bei einer Spiegelung der Verteilung gleich:

$$D^2(-X) = D^2(X)$$

[10] Kontrolle der Gleichung siehe Aufgabe 2.1

Summe von Zufallsgrößen

Für die Summe von Zufallsgrößen ist der Erwartungswert gleich der Summe der Erwartungswerte:

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Die Varianz ist die Summe der Varianzen abzüglich der doppelten Kovarianz:

$$D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y) + 2 \cdot \mathrm{Cov}(X,Y) \tag{7}$$

mit der Kovarianz[11]:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))) \tag{8}$$

Für unabhängige Zufallsgrößen ist die Kovarianz null und die Varianz die Summe der Varianzen der Summanden:

$$D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y)$$

[11] Kontrolle der Gleichungen siehe Aufgabe 2.1

Anwendung auf die Messung eines Widerstands

Der Wert eines (zufällig ausgewählten) Widerstands habe einen Erwartungswert von $E(R) = 1\,\mathrm{k}\Omega$ und einer Standardabweichung von $\sqrt{D^2(R)} = 10\,\Omega$. Das Messgerät habe einen systematischen Fehler von $E(M) = 2\,\mathrm{Ohm}$ und eine Standardabweichung von $\sqrt{D^2(M)} = 5\,\Omega$. Welchen Erwartungswert und welche Standardabweichung hat das Messergebnis?

Ein Messergebnis ist die Summe aus zu messendem Wert und Messfehler. Der Erwartungswert beträgt im Beispiel:

$$E(R+M) = 1010\,\Omega$$

Unter Annahme der Unabhängigkeit zwischen Widerstandsauswahl und Messdurchführung addieren sich auch die Varianzen nur:

$$D^2(R+M) = D^2(R) + D^2(M) = (10\,\Omega)^2 + (5\,\Omega)^2 = 125\,\Omega^2$$

Die Standardabweichung ist $\sqrt{D^2(R+M)} \approx 11,2\,\Omega$.

Verteilung von Zählwerten

Verteilung von Zählwerten

Zählwerte sind eine Summe von Einzelereignissen (z.B. Anzahl der korrekt ausgeführten oder fehlerhaft ausgeführten Service-Leistungen). Die Einzelereignisse können null oder eins sein und haben die Verteilung:

k	0	1
$P(X_i = k)$	$1 - p_i$	p_i

(X_i – Zufallsgröße Einzelereignis i; p_i – Eintrittswahrscheinlichkeit $X_i = 1$). Für N Versuche ist die Anzahl der eingetretenen Ereignisse die Summe der Zufallsgrößen X_i:

$$X = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

k	0	1
$P(X_i = k)$	$1 - p_i$	p_i

Der Erwartungswert der Einzelereignisse ist

$$E(X_i) = (1 - p_i) \cdot 0 + p_i \cdot 1 = p_i$$

und die Varianz der Einzelereignisse beträgt:

$$D^2(X_i) = (1 - p_i) \cdot (0 - p_i)^2 + p_i \cdot (1 - p_i)^2 = p_i \cdot (1 - p_i)$$

Der Erwartungswert der Summe ist die Summe der Erwartungswerte

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} p_i \tag{9}$$

Für die Varianz wird unterstellt, das die zu zählenden Ereignisse, wie das Auftreten einer Fehlfunktion, nicht voneinander abhängen, so dass die Varianz der Summe gleich der Summe der Varianzen der Summanden ist (Kovarianz null):

$$D^2(X) = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot (1 - p_i) \tag{10}$$

Für die Verteilung gilt, dass bei Hinzunahme eines weiteren Experiments i sich mit Wahrscheinlichkeit p_i der Zählwert um eins erhöht und mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p_i$ gleich bleibt:

$$P_i (X = k) = p_i \cdot P_{i-1} (X = k - 1) + (1 - pi_j) \cdot P_{i-1} (X = k)$$

Berechnung der Verteilung:

i	p_i	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$
1	30%	70%	30%			
2	50%	35%	50%	15%		
3	40%	21%	44%	29%	6%	
4	10%	18,9%	41,7%	30,5%	8,3%	0,6%

$$P_1 (X = 0) = 1 - p_1$$
$$P_1 (X = 1) = p_1$$

`Wiederhole für` $j = 2$ `bis` N

$$P_i (X = 0) = P_{i-1} (X = 0) \cdot (1 - p_i)$$
$$P_i (X = k) = P_{i-1} (X = k - 1) \cdot p_i$$

`Wiederhole für` $i = 1$ `bis` $j - 1$

$$\begin{aligned} P_i (X = k) \quad &= P_{i-1} (X = k) \cdot (1 - p_i) \\ &+ P_{i-1} (X = k - 1) \cdot p_i \end{aligned}$$

(i – Anzahl der berücksichtigten Summanden; k – Zählwert).

Erwartungswert und Varianz für das Beispiel

i	p_i	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$
1	30%	70%	30%			
2	50%	35%	50%	15%		
3	40%	21%	44%	29%	6%	
4	10%	18,9%	41,7%	30,5%	8,3%	0,6%

Nach Gl. 3 beträgt der Erwartungswert der Summe aller $N = 4$ Summanden:

$$\mu = 18{,}9\% \cdot 0 + 41{,}7\% \cdot 1 + 30{,}5\% \cdot 2 + 8{,}3\% \cdot 3 + 0{,}6\% \cdot 4 = 1,3$$

Als Summe aller p_i nach Gl. 9 ist die Berechung kürzer:

$$\mu = 30\% + 50\% + 40\% + 10\% = 1{,}3$$

Die Varianz beträgt nach dem Verschiebesatz Gl. 5:

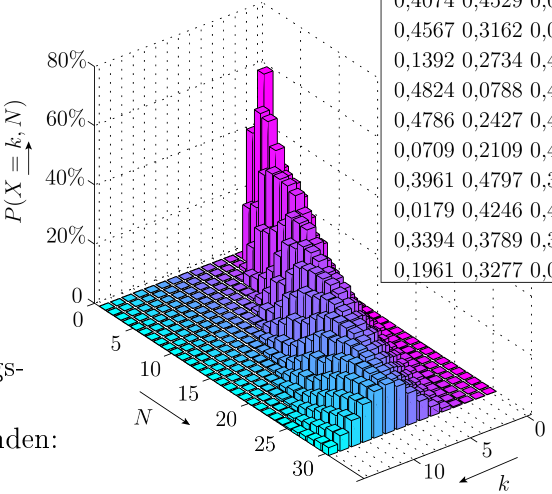
$$18{,}9\% \cdot 0^2 + 41{,}7\% \cdot 1^2 + 30{,}5\% \cdot 2^2 + 8{,}3\% \cdot 3^2 + 0{,}6\% \cdot 4^2 - 1{,}3^2 = 0{,}79$$

Die vereinfachte Berechnung nach Gl. 10 lautet:

$$\sigma^2 = 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}79$$

Mit Matlab berechnete Zählverteilung

Das nachfolgende Säulendiagramm zeigt eine mit Matlab schrittweise berechnete Zählverteilung. Die Eintrittswahrscheinlichkeiten der Zählereignisse siehe Kasten im Bild. Erwartungswert und Varianz für alle 30 Summanden: μ=7,05, $\sigma^2 = 2,19$



p_i für i=1 bis 30		
0,4074	0,4529	0,0635
0,4567	0,3162	0,0488
0,1392	0,2734	0,4788
0,4824	0,0788	0,4853
0,4786	0,2427	0,4001
0,0709	0,2109	0,4579
0,3961	0,4797	0,3279
0,0179	0,4246	0,4670
0,3394	0,3789	0,3716
0,1961	0,3277	0,0856

Binomialverteilung

Binomialverteilung

Für den Sonderfall, dass gleichwahrscheinliche Ereignisse gezählt werden (alle $p_i = \bar{p} = p$) ist die Summe der gezählten Ereignisse binomialverteilt

$$P\left(X=k\right)=\left(\begin{array}{c} N \\ k \end{array}\right)\cdot p^{k}\cdot\left(1-p\right)^{N-k}$$

mit dem Erwartungswert

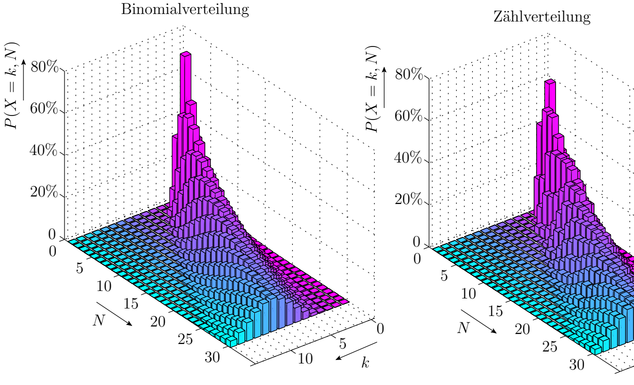
$$\mu=E\left(X\right)=N\cdot p$$

und der Varianz

$$\sigma^{2}=D^{2}\left(X\right)=N\cdot p\cdot\left(1-p\right)$$

(N – Anzahl der gezählten Ereignisse, die 1 oder 0 sein können).

Binomialverteilung vs. allgemeine Zählverteilung



p_i für i=1 bis 30		
0,4074	0,4529	0,0635
0,4567	0,3162	0,0488
0,1392	0,2734	0,4788
0,4824	0,0788	0,4853
0,4786	0,2427	0,4001
0,0709	0,2109	0,4579
0,3961	0,4797	0,3279
0,0179	0,4246	0,4670
0,3394	0,3789	0,3716
0,1961	0,3277	0,0856

Eine Binomialverteilung nähert eine allgemeine Zählverteilung gut an und hat den Vorteil, dass sie sich aus nur zwei Parametern N und p, statt aus N Parametern p_i berechnet.

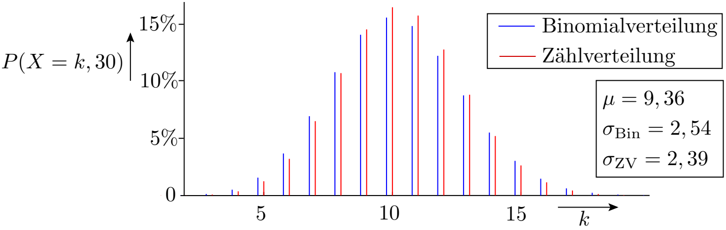
Bei gleichem Erwartungswert

$$\mu_{\text{Bin}} = N \cdot p = \mu_{\text{ZV}} = \sum_{i=1}^{N} \cdot p_i$$

ist die Varianz einer Binomialverteilung mindestens so groß wie die Varianz einer beliebigen Zählverteilung[12]:

$$\sigma^2_{\text{Bin}} = N \cdot p \cdot (1-p) \geq \sigma^2_{\text{ZV}} = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot (1-p_i) \qquad (11)$$

Die beiden Verteilungen mit allen N Summanden der Folie zuvor:



[12] Beweis von Gl. 11 siehe Aufgabe 2.1

Poisson-Verteilung

Poisson-Verteilung

Beim Zählen sehr vieler selten eintretender Ereignisse, z.B. der Fehlfunktionen bei Millionen von Service-Anforderungen eines zuverlässigen Systems, ist die Eintrittswahrscheinlichkeit der Einzelereignisse (im Bsp. fehlerhafter Service-Ergebnisse) nahe null. Die Varianz der zu zählenden Ereignisse strebt gegen den Erwartungswert

$$D^2(X_i) = \lim_{p_i \to 0} (p_i \cdot (1 - p_i)) = p_i$$

und die Varianz der Summe als die Summe der Varianzen auch. Die Verteilung der Zählwerte, im Beispiel die Anzahl der Fehlfunktionen, strebt gegen die Poisson-Verteilung:

$$P(X = k) = \mathrm{Poi}(k,\, E(X)) = e^{-E(X)} \cdot \frac{E(X)^k}{k!}$$

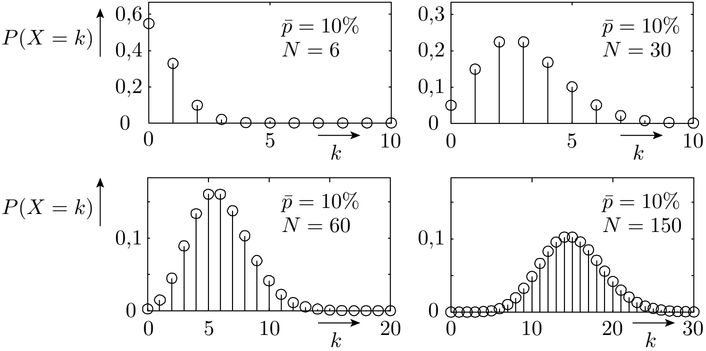
Das ist eine einparametrige Verteilung, die sich allein aus dem Erwartungswert berechnet.

Für Zählprozesse ist der Erwartungswert

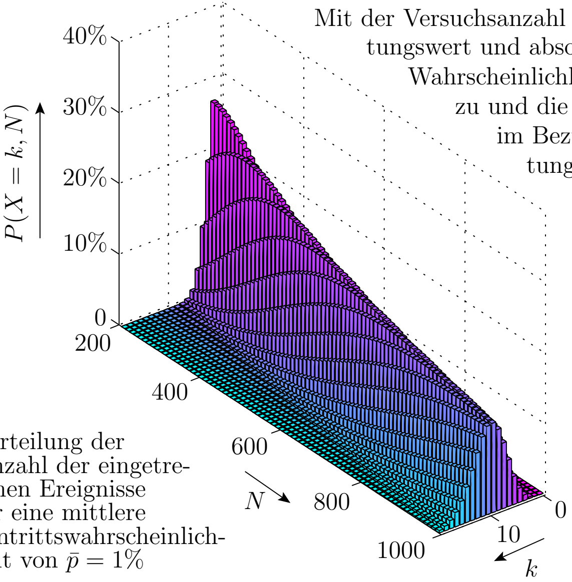
$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} p_i = N \cdot \bar{p}$$

die mittlere Eintrittswahrscheinlichkeit $\bar{p}$ mal der Versuchsanzahl N:

$$P(X = k) = e^{-\bar{p}\cdot N} \cdot \frac{(\bar{p} \cdot N)^k}{k!}$$



Mit der Versuchsanzahl nehmen Erwartungswert und absolute Breite des Wahrscheinlichkeitsgebirges zu und die relativ Breite im Bezug zum Erwartungswert ab.



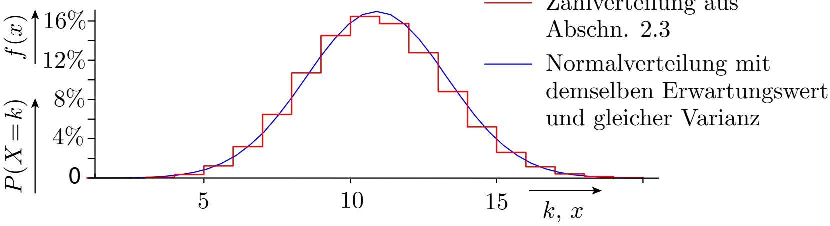
Verteilung der Anzahl der eingetretenen Ereignisse für eine mittlere Eintrittswahrscheinlichkeit von $\bar{p} = 1\%$

Normalverteilung

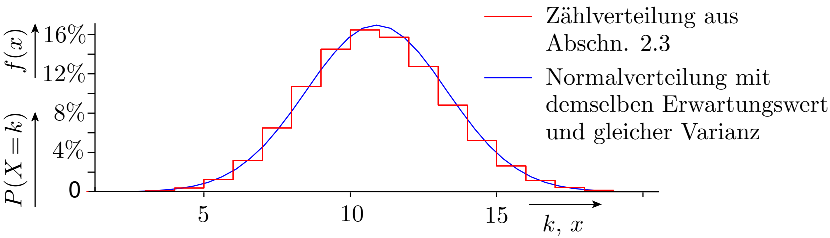
Normalverteilung

Die Summe sehr vieler unabhängiger Zufallsgrößen strebt unter sehr allgemeinen Bedingungen gegen eine Normalverteilung:

- kein Summand hat dominanten Einfluss und
- Erwartungswert deutlich größer als Standardabweichung[13].



[13] Schließt die behandelten Zählverteilungen ein.



Ein Normalverteilung berechnet sich aus den zwei Parametern Erwartungswert μ und Varianz σ^2:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}$$

Die Summe unabhängiger normalverteilter Zufallsgrößen ist wieder normalverteilt. Normalverteilte Zufallsgrößen liegen

- mit 95,45% Wahrscheinlichkeit im Bereich $\mu \pm 2\sigma$
- mit 99,73% Wahrscheinlichkeit im Bereich $\mu \pm 3\sigma$
- praktisch 100% im Bereich $\mu \pm 4\sigma$

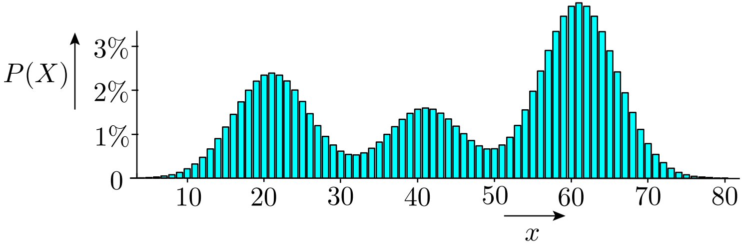
Multimodale Verteilungen

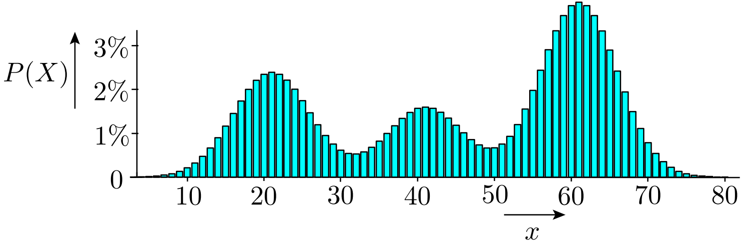
Multimodale (mehrgipflige) Verteilung

Eine multimodale Verteilung ist eine Häufigkeitsverteilung mit mehreren Gipfeln. Sie entsteht durch Mischung unterschiedlich verteilter Grundgesamtheiten, z.B. Normalverteilungen mit unterschiedlichen Erwartungswerten

$$P(X=k) = f(k) = 0,3 \cdot f_1(k) + 0,2 \cdot f_2(k) + 0,5 \cdot f_3(k)$$

$(f_i(k)$– diskrete Näherungen einer Normalverteilungen mit Erwartungswerten μ_i und Standardabweichung $\sigma_i = 5)$.



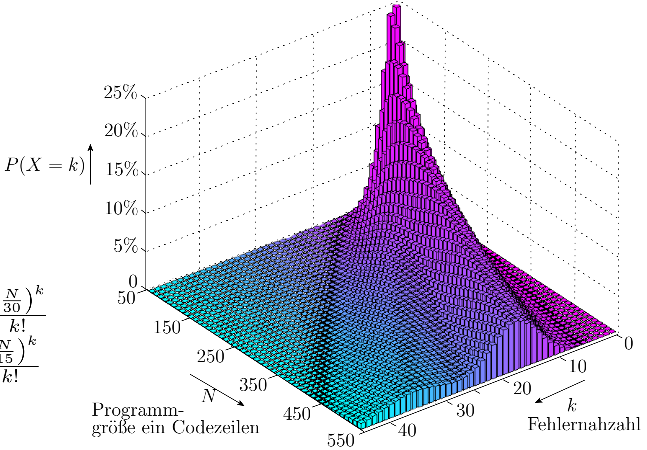


Die Multimodalität deutet auf Polarisierungen der Beobachtungswerte (Zugehörigkeit zu unterschiedlichen Verteilungen). Polarisierungen können wichtige Informationen über die Natur der untersuchten Variablen liefern:

- Abhängigkeiten bei der Fehlerentstehung, bei Ausfällen beim Fehlernachweis, und beim Versagen von Service-Leistungen,
- Vorliebe oder Neigung befragter Experten, z.B. bei der Einschätzung von Gefährdungen und Risiken und
- Probleme beim Messverfahren.

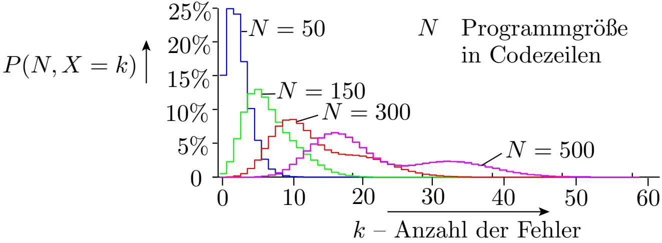
Beispiel sein ein Software-Entstehungsprozess, in dem ein Anfänger und ein Profi Software-Bausteine aus N Code-Zeilen entwickeln, der Profi 66% der Bausteine mit ca. einem Fehler je 30 Codezeilen und der Anfänger 33% der Bausteine mit einem Fehler je 15 Codezeilen.

$$P\left(N, X=k\right) = \frac{2}{3}\cdot e^{-\frac{N}{30}}\cdot\frac{\left(\frac{N}{30}\right)^k}{k!} + \frac{1}{3}\cdot e^{-\frac{N}{15}}\cdot\frac{\left(\frac{N}{15}\right)^k}{k!}$$



Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Modul genau k Fehler enthält, ist $2/3$ mal der Wahrscheinlichkeit, das es k Fehler enthält und vom Profi stammt plus $1/3$ mal der Wahrscheinlichkeit, dass es vom Anfänger stammt:

$$P\left(N, X=k\right) = \frac{2}{3} \cdot e^{-\frac{N}{30}} \cdot \frac{\left(\frac{N}{30}\right)^k}{k!} + \frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{N}{10}} \cdot \frac{\left(\frac{N}{15}\right)^k}{k!} \qquad (12)$$



Die Polarisierung nimmt mit der Größe der Software-Bausteine, die vom Profi und vom Anfänger getrennt entwickelt werden, zu.

Aufgaben

Aufgabe 2.1: Kontrolle von Gl. 6, 7 und 11

1. Überprüfen Sie Gl. 6, indem Sie in Gl. 5 als Zufallsgröße $a \cdot X + b$ einsetzen.
2. Überprüfen Sie Gl. 7, indem Sie in Gl. 5 als Zufallsgröße $X + Y$ einsetzen und unter Nutzung der Definition der Kovarianz Gl. 8.
3. Zeigen Sie für Gl. 11 durch Einsetzen von $p_i = p + \delta_i$ mit $\sum_{i=1}^{N} \delta_i = 0$, dass eine Binomialverteilung von allen Zählverteilungen mit derselben Ereignisanzahl N und demselben Erwartungswert die größte Varianz hat. (Nach Vereinfachung muss herauskommen $\sum_{i=1}^{N} \delta_i^2 \geq 0$, was immer erfüllt ist).

Aufgabe 2.2: Berechnung einer Zählverteilung

Schreiben Sie ein Matlab-Programm zur Berechnung einer Zählverteilung nach dem Algorithmus auf Folie 88. Das Ergebnis soll in einem 2D Feld $P(i,k)$ stehen ($i = 1, 2, ..., N$ – Anzahl der berücksichtigten Summanden; k – Zählwert). Stellen Sie das Ergebnis mit

```
bar3(P);
xlabel('k');
ylabel('i');
zlabel('P(i,X=k)');
```

als 3D-Säulendiagramm graphisch dar. Testen Sie das Programm mit den Eintrittswahrscheinlichkeiten der zu zählenden Ereignisse $p_1 = 39\%$, $p_2 = 51\%$, $p_3 = 23\%$, $p_4 = 88\%$ und $p_5 = 36\%$.

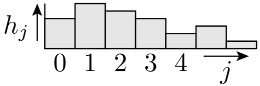
Aufgabe 2.3: Multimodale Verteilung

Entsteht die auf den Folien 105 und 106 gezeigte Polarisierung in der zu erwartenden Fehleranzahl auch dann, wenn Profi und Anfänger die Software-Bausteine gemeinsam entwickeln? Stellen Sie in Analogie zu Gl. 12 die Berechnungsvorschrift $P(N, X = k)$ für diesen Fall auf.

Spezielle Verteilungen

Fehlernachweisdichte

Fehlernachweisdichte



Die Fehlernachweisdichte beschreibt die relative Auftrittshäufigkeit von Fehlern in Abhängigkeit von deren Nachweiswahrscheinlichkeit. Die Zufallsvariable »Nachweiswahrscheinlichkeit« ist stetig. Die Abbildung auf diskrete, zählbare Ereignisse verlangt die Aufteilung des Wertebereichs von p in Intervalle j. Über die Fehlernachweisdichte sind die Größenordnungen der erforderlichen Testsätzlänge abzuschätzen, um ausreichend viele Fehler zu erkennen oder für eine mittlere fehlerfreie Betriebsdauer garantieren zu können. Dafür ist es zweckmäßig, die Intervallgrenzen umgekehrt proportional zum Logarithmus von p zu wählen:

$$I_j = \left[v^{-j}, v^{-(j+1)}\right)$$

($j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ – Intervallnummer; v – Parameter für die Intervallgröße, z.B. 2 für $\left[1, \frac{1}{2}\right)$, $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, ...).

Potenzfunktion als Fehlernachweisdichte

Bei dieser Intervallaufteilung nimmt die Häufigkeit der den Intervallen zugeordneten Fehler mit der Intervallnummer ab. Ein Klasse von Funktionen zur Annäherung dieses Verhaltens, mit der es sich gut rechnen lässt, sind Exponentialfunktion:

$$h(p) = k \cdot p^{k-1} \tag{13}$$

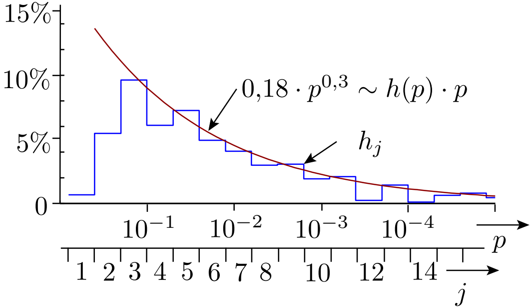
mit $0 < k \leq 1$ als Parameter. Das Integral über alle Häufigkeitswerte ist, wie von einer Dichtefunktion gefordert:

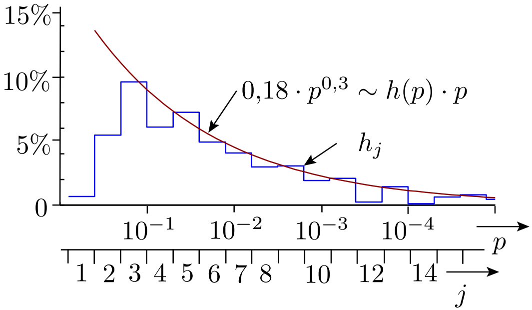
$$k \cdot \int_0^1 p^{k-1} \cdot dp = 1^k - 0^k = 1$$

Die Häufigkeit der Fehler je Wahrscheinlichkeitsintervall beträgt:

$$h_j = k \cdot \int_{v^{-(j+1)}}^{v^{-j}} p^{k-1} \cdot dp = v^{-j \cdot k} \cdot \left(1 - v^{-k}\right)$$

In der Darstellung des Säulendiagramms h_i verhält sich die Intervallbreite proportional zu p. Für den Vergleich der Näherungsfunktion mit den Säulenwerten ist es zweckmäßiger, statt $h(p)$, die zu den Säulenhöhen proportionale Funktion $h(p) \cdot p \sim p^k$ darzustellen, um den Exponenten k abzuschätzen.





Erkannte Fehler werden beseitigt. Bei einer Testdauer n gilt, dass für alle Fehler mit $p \ll n^{-1}$ und für viele Fehler mit $p \approx n^{-1}$. Die Approximation muss nur für die noch nicht beseitigten Fehler mit $p < n^{-1}$ brauchbar sein, d.h. ab Intervallnummer:

$$j \geq \frac{\ln(n)}{\ln(v)}$$

(v – Parameter für die Intervallgröße).

Fehlernachweisdichte nach Fehlerbeseitigung

Beim Test mit $n \gg 1$ Testschritten beträgt die Fehlernachweiswahrscheinlichkeit nach Gl. 1

$$p(n) = 1 - e^{-n \cdot p}$$

(p – Nachweiswahrscheinlichkeit je Testschritt). Unter der Annahme, dass die erkannten Fehler beseitigt werden, verringert sich die zu erwartende Fehleranzahl $E(\varphi, n)$:

$$\begin{aligned}
E(\varphi, n) &= E(\varphi_{\mathrm{E}}) \cdot \left(1 - \underbrace{k \cdot \int_0^1 p^{k-1} \cdot \left(1 - e^{-n \cdot p}\right) \cdot dp}_{\text{Anteil der beseitigten Fehler}}\right) \\
&= E(\varphi_{\mathrm{E}}) \cdot k \cdot \int_0^1 p^{k-1} \cdot e^{-n \cdot p} \cdot dp \\
E(\varphi, n) &\approx E(\varphi_{\mathrm{E}}) \cdot n^{-k}
\end{aligned}$$

Der letzter Näherungs schritt wird auf der folgenden Folie erkärt.

Das Integral

$$k \cdot \int_0^1 p^k \cdot e^{-n \cdot p} \cdot dp$$

lässt sich durch Substitution $p = \frac{x}{n}$; $dp = \frac{dx}{n}$

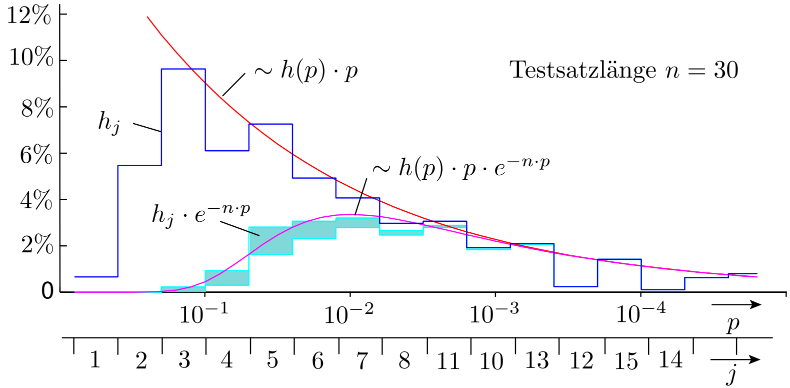
$$\frac{k}{n^k} \cdot \underbrace{\int_0^n x^{k-1} \cdot e^{-x} \cdot dx}_{\approx \Gamma(k)}$$

und die Näherung $\int_0^n x^{k-1} \cdot e^{-x} \cdot dx$ durch die Gammafunktion $\Gamma(k) = \int_0^\infty x^k \cdot e^{-x} \cdot dx$ gut abschätzen. Im interessierenden Bereich von $0 < k \leq 1$ beträgt die Gammafunktion und damit auch das angenäherte Integral $\Gamma(k) \approx k^{-1}$.

$$\begin{aligned} E(\varphi, n) &= E(\varphi_{\mathrm{E}}) \cdot k \cdot \int_0^1 p^{k-1} \cdot e^{-n \cdot p} \cdot dp \\ &\approx E(\varphi_{\mathrm{E}}) \cdot n^{-k} \end{aligned} \tag{14}$$

Die Nachweisdichte der verbleibenden Fehler erhöht sich umgekehrt proportional zur zu erwartenden Fehleranzahl (in der nachfolgenden Abbildung nicht gezeigt) und das Maximum verschiebt sich zum Kehrwert der Testsatzlänge (im Beispiel $n = 30$):

$$h(p,n) = \frac{k \cdot E(\varphi_{\mathrm{E}})}{E(\varphi, n)} \cdot p^{k-1} \cdot e^{-n \cdot p} \approx n^k \cdot p^{k-1} \cdot e^{-n \cdot p}$$

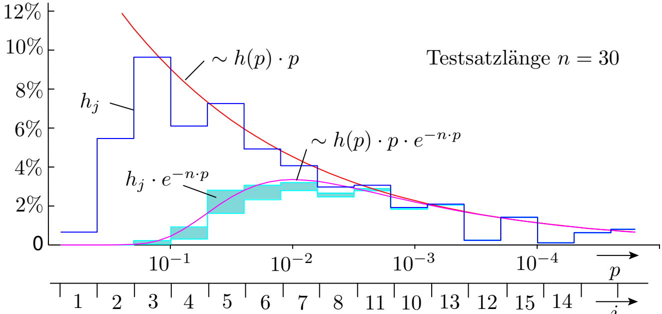


In der Näherung Gl. 14

$$E(\varphi, n) \approx E(\varphi_{\mathrm{E}}) \cdot n^{-k}$$

ist die zu erwartende Fehleranzahl vor dem Test $E(\varphi_{\mathrm{E}})$ nur eine fiktive Rechengröße. Anschaulicher ist oft der Bezug auf die zu erwartende Anzahl nach einer Fehlerbeseitigungsiteration mit n_0 Testschritten:

$$E(\varphi, n) \approx E(\varphi, n_0) \cdot \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-k} \tag{15}$$



Vert. Fehleranzahl

Die Verteilung der Fehleranzahl

Ein Fehler ist nach Foliensatz F1, Abschn. 1.3 der unterste lokalisierbare Service, der falsch ausgeführt wird. Jeder Fehler i hat eine Ausftrittshäufigkeit, mit der er nach der Entstehung des Systems vorhanden ist, und eine Nachweiswahrscheinlichkeit, mit der er bei Abarbeitung einer Service-Anforderung eine Fehlfunktion verursacht, anhand der er nachweisbar ist.

Vereinbarungen:

- h_i – Fehlerauftrittshäufigkeit.
- p_i – Nachweiswahrscheinlichkeit je Service-Anforderung.
- φ_i (phi) – fehlerbezogener Zählwert:

$$\varphi_i = \begin{cases} 0 & \text{Fehler } i \text{nicht vorhanden} \\ 1 & \text{Fehler } i \text{vorhanden} \end{cases}$$

- N_φ – Anzahl der potentiellen Fehler, nach Definition die Anzahl der lokalisierbaren Fehlermöglichkeiten.

Verteilung, Erwartungswert und Varianz der fehlerbezogenen Zählwerte:

	Verteilung	μ	σ^2
vor dem Test	$P(\varphi_i=0) = 1-h_i$ $P(\varphi_i=1) = h_i$	h_i	$h_i \cdot (1-h_i)$
nachweisbare Fehler	$P(\varphi_i=0)=1-h_i \cdot p_i$ $P(\varphi_i=1)=h_i \cdot p_i$	$h_i \cdot p_i$	$h_i \cdot p_i \cdot$ $(1-h_i \cdot p_i)$
Restfehler	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Die Anzahl der vorhanden Fehler ist jeweils die Summe der den potentiellen Fehler zugeordneten Zufallsgrößen:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N_\varphi} \varphi_i$$

Die Summe ist wie bei allen (unabhängigen) Zählwerten näherungsweise binomial-, poisson- oder normalverteilt.

Für die Abschätzung der Verteilungen der Anzahl der Fehler genügen die Erwartungswerte.

Zu erwartende Fehleranzahl vor dem Test

$$E(\varphi_{\mathrm{E}}) = \sum_{i=1}^{N_\varphi} h_i = N_\varphi \cdot \bar{h}$$

(N_φ – Anzahl der potentiellen Fehler; $\bar{h}$ – mittlere Fehlerauftrittshäufigkeit, Güteparameter des Entstehungsprozesses).

Zu erwartende Anzahl der vom Test nachweisbaren Fehler:

$$E(\varphi_{\mathrm{N}}) = \sum_{i=1}^{N_\varphi} h_i \cdot p_i$$

Wenn es zwischen dem Auftreten und dem Nachweis der Fehler keinen statistischen Zusammenhang gibt, ist die Nachweiswahrscheinlichkeit aller Fehler gleich dem zu erwartenden Anteil der nachweisbaren Fehler $p_i = E(FC)$:

$$E(\varphi_{\mathrm{N}}) = E(FC) \cdot N_\varphi \cdot \bar{h} = E(FC) \cdot E(\varphi_{\mathrm{E}})$$

Die zu erwartende Anzahl der Restfehler, die nicht gefunden werden und im System verbleiben, ist unter dieser Annahme:

$$E(\varphi) = (1 - E(FC)) \cdot E(\varphi_{\mathrm{E}})$$

Für die meisten Tests haben die einzelnen potenziellen Fehler sehr unterschiedliche Nachweiswahrscheinlichkeiten, beschreibbar durch die Fehlernachweisdichte $h(p)$ (Dichtefunktion der Fehlerauftrittshäufigkeit in Abhängigkeit von der Nachweiswahrscheinlichkeit[14]). Mit der Fehlernachweisdichte ist die zu erwartende Anzahl der nachweisbaren Fehler

$$E(\varphi_{\mathrm{N}}) = \sum_{i=1}^{N_\varphi} h_i \cdot p_i = E(\varphi_{\mathrm{E}}) \cdot \int_0^1 h(p) \cdot p \cdot dp$$

und die zu erwartenden Anzahl der Restfehler:

$$E(\varphi) = E(\varphi_{\mathrm{E}}) - E(\varphi_{\mathrm{N}}) = E(\varphi_{\mathrm{E}}) \cdot \left(1 - \int_0^1 h(p) \cdot p \cdot dp\right)$$

[14] Die Fehlernachweisdichte ist testspezifisch und hängt z.B. erheblich vom Operationsprofil des Tests ab.

Zufallstest

Für eine zufällige Auswahl der Bedatungen der Testfälle und den Test in der Anwendungsumgebung ist die Nachweiswahrscheinlichkeit eine Funktion der Testsatzlänge bzw. der Anzahl der Service-Aufrufe n (Gl. 1):

$$p(n) = 1 - e^{-n \cdot p}$$

(p – Nachweiswahrscheinlichkeit für einen Testfall bzw. Service-Aufruf). Wenn die erkennbaren Fehler beseitigt werden, ist die zu erwartende Anzahl der verbleibenden Fehler:

$$\begin{aligned} E(\varphi, n) &= E(\varphi_{\mathrm{E}}) \cdot \left(1 - \int_0^1 h(p) \cdot p(n) \cdot dp\right) \\ &= E(\varphi_{\mathrm{E}}) \cdot \int_0^1 h(p) \cdot e^{-n \cdot p} \cdot dp \end{aligned}$$

($E(\varphi_{\mathrm{E}})$, $h(p)$ – zu erwartende Fehleranzahl und Fehlernachweisdichte vor Beseitigung der vom Zufallstest nachweisbaren Fehler).

Potenzfunktion als Fehlernachweisdichte

Mit einer Potenzfunktion nach Gl. 13

$$h(p) = k \cdot p^{k-1}$$

als Fehlernachweisdichte gilt in Analogie zu Gl. 15:

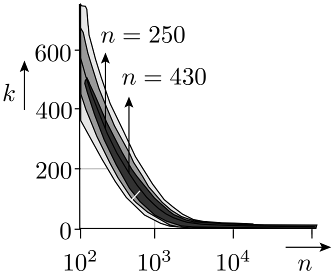
$$E(\varphi, n) \approx E(\varphi, n_0) \cdot \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-k}$$

($0 < k \leq 1$ – empirisch abzuschätzender Parameter; $E(\varphi, n_0)$ – geschätzte Anzahl der nach n_0 Testschritten noch nicht entdeckten Fehler.

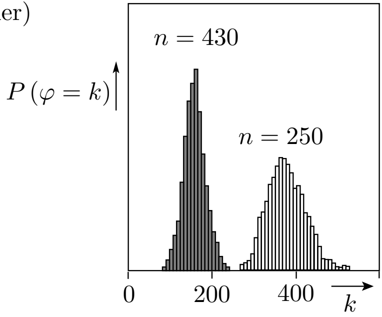
Experimente zur Haftfehlerüberdeckung

Kombinatorische Beispielschaltung (Benchmark c3540). Betrachtete Fehler sind 3606 simulierte, unterschiedlich nachweisbare Haftfehler. Bestimmung der Verteilung mit 1000 verschiedenen Zufallstestsätzen.

Verteilung der Fehleranzahl als Funktion der Testsatzlänge n (Benchmark c3540, 3606 Haftfehler)



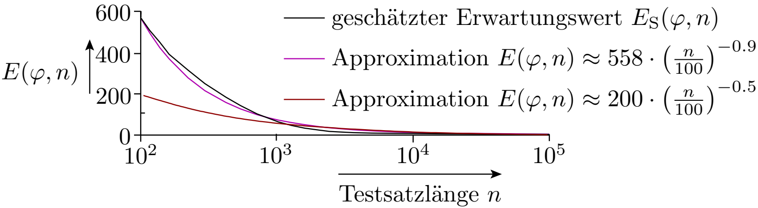
Verteilung für zwei Testsatzlängen



Annäherung von $E(\varphi, n)$ durch eine Potenzfunktion

Annäherung der zu erwartenden Anzahl der nachweisbaren Fehler durch eine Potenzfunktion nach Gl. 15:

$$E(\varphi, n) \approx E(\varphi, n_0) \cdot \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-k}$$



Die erste Approximation mit $k = 0{,}9$ nähert den Bereich $n < 1000$ Testschritte und die zweiten den Bereich $n > 1000$ Testschritte besser an.

Varianz und Verteilung der Fehleranzahl

Unter der Annahme, dass die Fehler unabhängig[15] voneinander entstehen und nachgewiesen werden, kann die Varianz laut Gl. 11 nicht größer als die einer Binomialverteilung mit gleichem Erwartungswert und derselben Anzahl potentieller Fehler sein:

$$D^2(\varphi, n) \leq D^2_{\max}(\varphi, n) = E(\varphi, n) \cdot \left(1 - \frac{E(\varphi, n)}{N_\varphi}\right)$$

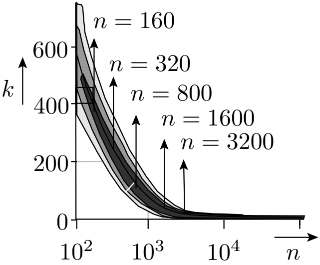
Von den potentiellen Fehlern sind der Regel die wenigsten vorhanden $E(\varphi, n) \ll N_\varphi$, so das die Obergrenze der Varianz praktisch der Erwartungswert ist:

$$D^2(\varphi, n) \leq E(\varphi, n)$$

Die Fehleranzahl ist näherungsweise binomialverteilt. Für viele möglich, aber nur selten auftretende Fehler annäherbar durch eine Poisson- und wenn der Erwartungswert zusätzlich größer >10 ist, durch eine Normalverteilung.

[15] Annahme korrekt?

Varianz der Fehleranzahl im Experiment



Kontrolle, dass die tatsächliche Standardabweichung die Obergrenze

$$\sqrt{D^2_{\max}(\varphi, n)} = \sqrt{E(\varphi, n) \cdot \left(1 - \frac{E(\varphi,n)}{N_\varphi}\right)}$$

nicht überschreitet.

n	160	320	800	1600	3200
$E_\mathrm{S}(\varphi, n)$	415	234	90	29	11
$\sqrt{D^2_\mathrm{S}(\varphi, n)}$	43,3	30,7	17,3	7,2	2,9
$\sqrt{D^2_{\max}(\varphi, n)}$	19,2	14,8	9,37	5,36	3,31

Die Obergrenze unter der Annahme »unabhängiger Nachweis« wird deutlich überschritten. Für eine vollständige Haftfehlermenge offenbar nicht erfüllt.

Effektive Fehleranzahl

Die tatsächlich deutlich größere Varianz ist so deutbar, das im Mittel

$$K=\frac{D_{\mathrm{S}}^{2}\left(\varphi,n\right)}{D_{\max}^{2}\left(\varphi,n\right)}$$

($D_{\max}^{2}\left(\varphi,n\right)$ – theoretische Obergrenze, D_{S}^{2} – experimentell bestimmte Varianz). Die Bernoulli-Versuche haben dann die möglichen Ergebnisse 0 oder K:

$$\begin{aligned} P\left(\varphi_i=0\right) &= 1-h_i\cdot p_i \\ P\left(\varphi_i=K\right) &= h_i\cdot p_i \end{aligned}$$

Dafür gibt es weniger zu zählende Zufallsgrößen:

$$\varphi=\sum_{i=1}^{N_{\varphi}/K}\varphi_i$$

Der Erwartungswert der Summanden:

$$E\left(\varphi_i\right)=0\cdot\left(1-h_i\cdot p_i\right)+K\cdot h_i\cdot p_i=K\cdot h_i\cdot p_i$$

Varianz der Summanden:

$$\begin{aligned} D^2(\varphi_i) &= (1-h_i\cdot p_i)\cdot(0-K\cdot h_i\cdot p_i)^2 + h_i\cdot p_i\cdot(K-K\cdot h_i\cdot p_i)^2 \\ &= h_i\cdot p_i\cdot K^2\cdot(1-h_i\cdot p_i) \end{aligned}$$

Auf den Erwartungswert hat es keinen Einfluss, ob K Fehler identisch nachgewiesen werden:

$$D^2(\varphi) = \sum_{i=1}^{N_\varphi/K} K\cdot h_i\cdot p_i = \sum_{i=1}^{N_\varphi} h_i\cdot p_i$$

Die Varianz erhöht sich um den Faktor K:

$$D^2(\varphi) = \sum_{i=1}^{N_\varphi/K} h_i\cdot p_i\cdot K^2\cdot(1-h_i\cdot p_i) = K\cdot\sum_{i=1}^{N_\varphi} h_i\cdot p_i\cdot(1-h_i\cdot p_i)$$

Die effektive Fehleranzahl sei die simulierte Fehleranzahl multipliziert mit dem Kehrwert der relativen Varianzvergrößerung, aber nicht größer als die Anzahl der simulierten Fehler:

$$N_{\varphi.\mathrm{eff}} = N_\varphi\cdot\min\left(\frac{D^2_{\max}(\varphi,n)}{D^2_{\mathrm{S}}(\varphi,n)},\ 1\right) \qquad (16)$$

Sie ist praktisch eine Abschätzung, mit wie vielen Fehlern man für eine genauso genaue Schätzung simulieren müsste, wenn die unterstellten Fehler unabhängig voneinander nachweisbar wären.

Für den Versuch auf Folie 128 ist die effektive Fehleranzahl zum Teil weniger als ein Viertel der simulierten Fehleranzahl ($K \approx 4$):

n	160	320	800	1600	3200
$N_{\varphi.\mathrm{eff}}$ für $N_\varphi = 3606$	706	839	1037	2001	3606

Für $n = 320$ Testschritte würde man z.B. mit ca. 900 unabhängig nachweisbaren Fehlern oder mit 3600 Fehlern, von denen je 4 identisch und die 900 Äquivalenzklassen voneinander unabhängig nachweisbar sind, eine ähnlich große Varianz wie im durchgeführten Versuch erhalten.

Simulation mit Fehlerstichproben

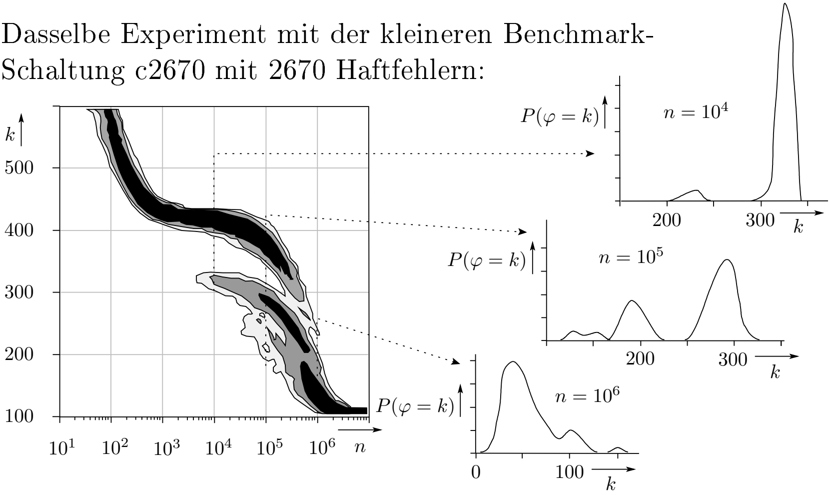
Im nachfolgenden Versuch wird untersucht, wie sich die effektive Fehleranzahl verhält, wenn die Simulation mit einer Stichprobe von 1000 bzw 300 der 3606 Haftfehler durchgeführt wird. Das naheliegende Ergebnis ist eine Verringerung der Abhängigkeiten im Fehlernachweis, erkennbar an einer effektiven Fehleanzahl, die näher an der tatsächlich simulierten Fehleranzahl liegt.

n	160	320	800	1600	3200
$N_{\varphi.\mathrm{eff}}$ für $N_\varphi = 1000$	594	629	630	1000	1000
$N_{\varphi.\mathrm{eff}}$ für $N_\varphi = 300$	297	268	277	231	300

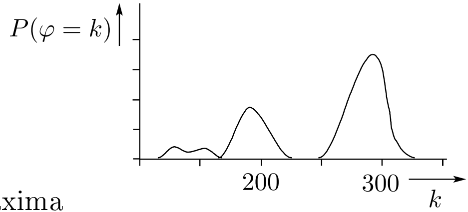
Bei der Stichprobe von 1000 Fehlern ist die effektive Fehleranzahl im ungünstigste Fall fast halb so groß und bei 300 Modellfehler 77% der Anzahl der simulierten Fehler.

Ein zweites Experiment zur Haftfehlerüberdeckung

Dasselbe Experiment mit der kleineren Benchmark-Schaltung c2670 mit 2670 Haftfehlern:



Im Bereich von $n = 10^4$ bis 10^6 multimodale Verteilung.



Verteilung mit mehreren Maxima

- Wie kann ein Zählprozess eine solche Verteilungen haben?

Gedankenexperiment:

- zehn Modellfehler, davon acht identisch nachweisbar.
- Wertebereich für die Anzahl der nachgewiesenen Fehler:

$$k \in \{0,\ 1,\ 2,\ 8,\ 9,\ 10\}$$

Die Verteilung zerfällt in zwei Teilkämme.

- Die Haftfehlermenge des c2670 enthält offenbar ca. 80 sehr ähnlich nachweisbare Fehler.

Fehlfunktionen

Anzahl der Fehlfunktionen

Als Fehlfunktionen sollen alle Service-Leistungen, die ein fehlerhaftes Ergebnis liefern, zählen, unbeantwortete Anfragen nicht. Jeder dieser Service-Leistungen ist eine Zufallsgröße zugeordnet:

$$\xi_j = \begin{cases} 0 & \text{Service-Leistung } i \text{ korrekt abgearbeitet} \\ 1 & \text{Service-Leistung } i \text{ fehlerhaft abgearbeitet} \end{cases}$$

Ursachen einer Fehlfunktion können sein:

- Fehler,
- Störungen und
- Eingabe- (Bedienungs-) Fehler.

Jeder potentielle Fehler i ist mit Wahrscheinlichkeit h_i vorhanden und verursacht, wenn vorhanden, mit seiner Nachweiswahrscheinlichkeit p_i eine Fehlfunktion. Die Wahrscheinlichkeit einer störungsbedingten Fehlfunktion sei p_S und einer Fehlfunktion durch Fehlbedienung p_B.

Gesamtwahrscheinlichkeit eine Fehlfunktion:

$$p_{\mathrm{SF}} = 1 - (1 - p_{\mathrm{S}}) \cdot (1 - p_{\mathrm{B}}) \cdot \prod_{i=1}^{N_\varphi} (1 - h_i \cdot p_i)$$

(N_φ– Anzahl der möglichen Fehler). Es sollen nur Systeme betrachtet werden, die ihre Service-Anfragen fast immer korrekt abarbeiten $p_{\mathrm{SF}} \ll 1$. Für sie gilt in guter Näherung:

$$p_{\mathrm{SF}} = p_{\mathrm{S}} + p_{\mathrm{B}} + \sum_{i=1}^{N_\varphi} h_i \cdot p_i$$

Die Anzahl der Fehlfunktionen ist die Summe der Zählwerte ξ_i aller N_ξ bearbeiteten Service-Aufträge:

$$\xi = \sum_{i=1}^{N_\xi} \xi_i$$

mit

$$\begin{aligned} P(\xi_i = 0) &= 1 - p_{\mathrm{SF}} \\ P(\xi_i = 1) &= p_{\mathrm{SF}} \end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass Abhängigkeiten zwischen dem Versagen von Service-Anfragen vernachlässigbar sind[16], ist die Verteilung wieder näherungsweise eine Binomial-, Poison- oder Normalverteilung, die sich aus dem Erwartungswert abschätzen lässt. Die zu erwartende Anzahl der Fehlfunktionen ist:

$$E(\xi) = N_{\xi} \cdot p_{\mathrm{SF}} = N_{\xi} \cdot \left(\underbrace{p_{\mathrm{S}} + p_{\mathrm{B}}}_{1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N_{\varphi}} h_i \cdot p_i}_{2} \right)$$

1 Anteil der Fehlfunktionen, der sich nicht und
2 Anteil, der sich durch Fehlerbeseitigung verringert.

[16] Für Systeme, die auch im Fehlerfall kein Gedächtnis haben, erfüllt. Bei Systemen mit Gedächtnis ist eine Mindestvoraussetzung, das fehlerhafte gespeicherte Werte vor dem nächsten Testschritt korrigiert werden, z.B. durch prophylaktische Neuinitialisierung (vergl. F1, Abschn. 3.1).

Anzahl der fehlerbedingten Fehlfunktionen

Die durch Fehler verursachen Fehlfunktionen

$$E\left(\xi_{\mathrm{F}}\right)=N_{\xi}\cdot\sum_{i=1}^{N_{\varphi}}h_{i}\cdot p_{i}$$

lassen sich über das Fehlernachweisdichte bestimmen:

$$E\left(\xi_{\mathrm{F}}\right)=N_{\xi}\cdot E\left(\varphi\right)\cdot\int_{0}^{1}h\left(p\right)\cdot p\cdot dp \tag{17}$$

Für ein mit n zufälligen Service-Anforderungen getestetes System, aus dem alle erkannten Fehler beseitigt wurden, beträgt das Fehlernachweisdichte:

$$h\left(p,n\right)=\frac{h\left(p\right)\cdot e^{-n\cdot p}}{\int_{0}^{1}h\left(p\right)\cdot e^{-n\cdot p}\cdot dp}$$

($h\left(p\right)$ – Fehlernachweisdichte des ungetesteten Systems).

$$h(p,n) = \frac{h(p) \cdot e^{-n \cdot p}}{\underbrace{\int_0^1 h(p) \cdot e^{-n \cdot p} \cdot dp}_{*}} = \frac{E(\varphi_{\mathrm{E}}) \cdot h(p) \cdot e^{-n \cdot p}}{E(\varphi,n)} \qquad (18)$$

($h(p,n)$, $E(\varphi,n)$ – Fehlernachweisdichte und zu erwartende Fehleranzahl nach Beseitigung der mit n zufälligen Tests erkannten Fehler; * – Anteil der nicht beseitigten Fehler $E(\varphi,n)/E(\varphi_{\mathrm{E}})$; φ_{E} – Fehleranzahl des frisch entstandenen ungetesteten Systems).

Mit der Fehlernachweisdichte Gl. 18 in Gl. 17 beträgt die zu erwartende Anzahl der Fehlfunktionen nach Beseitigung der erkannten Fehler:

$$E(\xi_{\mathrm{F}}) = N_{\xi} \cdot E(\varphi_{\mathrm{E}}) \cdot \int_0^1 h(p) \cdot p \cdot e^{-n \cdot p} \cdot dp$$

An dieser Stelle erweist sich die Annäherung des Fehlernachweisprofils durch eine Potenzfunktion als sehr günstig.

Potenzfunktion als Fehlernachweisdichte

Mit der Potenzfunktion Gl. 13

$$h(p) = k \cdot p^{k-1}$$

ergibt sich für die zu erwartende Anzahl der durch Fehler verursachten Fehlfunktionen:

$$\begin{aligned} E(\xi_{\mathrm{F}}) &= N_{\xi} \cdot E(\varphi_{\mathrm{E}}) \cdot \int_0^1 k \cdot p^{k-1} \cdot p \cdot e^{-n \cdot p} \cdot dp \\ &= N_{\xi} \cdot E(\varphi_{\mathrm{E}}) \cdot \int_0^1 k \cdot p^{k} \cdot e^{-n \cdot p} \cdot dp \end{aligned}$$

Substitution $p = \frac{x}{n}$ und $dp = \frac{dx}{n}$

$$E(\xi_{\mathrm{F}}) = \frac{k \cdot N_{\xi} \cdot E(\varphi_{\mathrm{E}})}{n^{k+1}} \cdot \underbrace{\int_0^n x^k \cdot e^{-x} \cdot dx}_{\approx \Gamma(k+1) \approx 1 \text{ für } 0<k\leq 1} \qquad (19)$$

Mit Gl. 14 $E(\varphi, n) \approx E(\varphi_{\mathrm{E}}) \cdot n^{-k}$ vereinfacht sich Gl. 19 zu:

$$E(\xi_{\mathrm{F}}) \approx \frac{k \cdot N_{\xi} \cdot E(\varphi, n)}{n} \tag{20}$$

Die zu erwartende Anzahl der fehlerbedingten Fehlfunktionen nimmt proportional mit der Fehleranzahl und umgekehrt proportional zur Testdauer n, in der die erkannten Fehler beseitigt werden, ab.

Es ist zu erwarten, dass Gl. 20 auch dann gilt, wenn sich das Fehlernachweisdichte nur in einem Bereich $\frac{1}{5n} \lesssim p \lesssim \frac{5}{n}$ durch eine Potenzfunktion annähern lässt (Rechnung siehe Tafel, noch Forschungsgegenstand).

Aufgaben

Aufgabe 3.1: Fehlernachweisdichte

Gegeben ist das nachfolge Säulendiagramm für das Fehlernachweisdichte. Das System soll mit $n = 1000$ zufällgen Service-Aufrufen getestet und die dabei erkannten Fehler alle beseitigt werden.

1. Wie groß ist der z erwartende Anteil der beseitigten Fehler?
2. Bestimmen Sie die neuen Werte h_j des Fehlernachweisdichte nach Test und Fehlerbeseitigung.

Hinweis: Da für die Häufigkeitswerte jeder Säule ein Bereich der Nachweiswahrscheinlichkeit zugeordnet ist, kann nach einer von der Nachweiswahrscheinlichkeit Fehlerbeseitigung für die neuen Werte von h_j nur ein Bereich angegeben werden. Die beiden Bereichsgrenzen ergeben sich je durch Einsätzen der maximalen und der minimalen Nachweiswahrscheinlichkeit.

Aufgabe 3.2: Erforderliche Testsatzlänge

Bei einer Fehlersimulation mit 3000 Fehlern und 1000 verschieden Zufallsfolgen wurde die zu erwartende Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler als Funktion der Testsatzlänge n bestimmt:

n	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
$E(\varphi)$	532	751	370	95	48

1. Nähern Sie den Verlauf der Erwartungswerte für die drei längsten Testzeiten durch eine Potenzfunktion

$$E(\varphi, n) \approx E(\varphi, n_0) \cdot \left(\frac{n}{n_0}\right)^{-k}$$

an.

2. Wie lange sind Test und Fehlerbeseitigung bei dieser Approximation noch fortzusetzen, bis die zu erwartende Fehleranzahl nicht mehr größer als 20 ist?

Aufgabe 3.3: Effektive Fehleranzahl

Bei demselben Experiment wie in der Aufgabe zuvor wurde auch die Standardabweichung der nicht nachweisbaren Fehler in Abhängigkeiten von der Testsatzlänge n bestimmt:

n	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
$E_{\mathrm{S}}(\varphi)$	532	751	370	95	48
$\sqrt{D_{\mathrm{S}}^2(\varphi)}$	53.7	41,8	23,5	12,1	5,3

Wie groß ist die effektive Fehleranzahl für die in der Tabelle angegebenen Testsatzlängen?

Aufgabe 3.4: Fehlerbedingte Fehlfunktionen 1

Bestimmen Sie für die Fehlernachweisdichte auf Aufgabe 3.1 und eine zu erwartende Fehleranzahl vor dem Test von $E(\varphi_{\mathrm{E}}) = 100$ die zu erwartende Anzahl der Fehlerfunktionen bei 10^6 Service-Anforderungen

1. vor den Test
2. nach dem Test mit 1000 zufälligen Service-Anforderungen und der Beseitigung der dabei nachgewiesen Fehler.

Hinweis: Da für die Häufigkeitswerte jeder Säule ein Bereich der Nachweiswahrscheinlichkeit zugeordnet ist, ist auch für die Anzahl der fehlerbedingten Fehlfunktionen nur eine Worst- und eine Best-Case-Rechnung möglich.

Aufgabe 3.5: Fehlerbedingte Fehlfunktionen 2

Für ein System wurden bei einer Fehlersimulation mit 3000 Fehlern und 1000 verschieden Zufallsfolgen die zu erwartende Anzahl der nicht nachweisbaren Fehler in Abhängigkeiten von der Testsatzlänge n bestimmt:

n	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
$E(\varphi)$	532	751	370	95	48

Beim Test des realen Systems mit 100 zufälligen Testbeispielen wurden insgesamt 53 Fehler erkannt und beseitigt. Schätzen Sie unter Verwendung von Gl. 20 die Wahrscheinlichkeiten für ein durch Fehler verursachtes Service-Versagen des Systems nach der Beseitigung der mit 100, 1.000, ... und 1.000.000 zufälligen Service-Aufrufen nachweisbaren Fehler.

Beurteilende Statistik

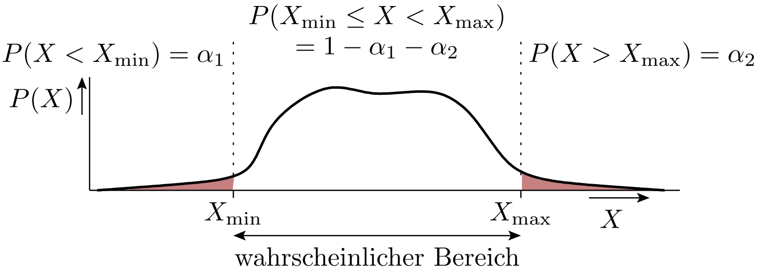
Beurteilende Statistik

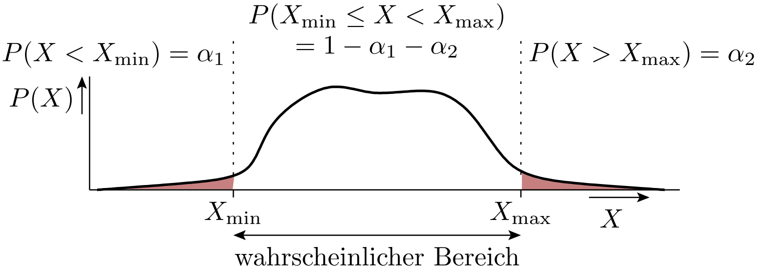
In den bisherigen Betrachtungen wurden ausgehend von den Versuchsbeschreibungen Verteilungen und ihre Eigenschaften hergeleitet, die beschreiben, was von einer Stichprobe von experimentellen Ergebnissen erwartet werden sollte. Die beurteilende Statisktik geht den umgekehrten Weg. Aus einer Stichprobe von experimentellen Ergebnissen soll auf die Verteilung geschlossen werden.

- nicht-parametrische Statistik: Es existiert kein Wissen über die Verteilung der Daten. Beispiel: Untersuchung, ob es wie auf den Folien 106 und 136 Polarisierungen gibt.
- parametrische Statistik: Es wird davon ausgegangen, dass schon Erfahrungen über die Art und Eigenschaften der Verteilung vorliegen und nur einzelne Parameter zu bestimmen sind, bzw. Prüfung, ob eine Annahme (Hypothese) stimmt.

Kontrolle von Hypothesen

Unter der Anahme einer bekannten Verteilung einer Zufallsgröße lässt sich ein Bereich $[X_{\min}, X_{\max}]$ der wahrscheinlichen Werte definieren, z.B. durch Vorgabe, dass der Wert nur mit einer Irrtumswahrscheinlich α_1 kleiner $X_{\min}$ und mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit α_2 größer $X_{\max}$ sein darf.





Die Hypothese, dass ein Versuchsergebnis X diese Verteilung hat, wird angenommen, wenn der Ergebniswert im wahrscheinlichen Bereich liegt und sonst zurückgewiesen. Nur sinnvoll für Zufallsgrößen mit großem Wertebereich und geringer Streuung. Für einzelne Zählwerte, die nur null oder eins sein können, z.B. ob ein Service versagt oder ein potentieller Fehler existiert, ungeeignet. Für den Mittelwert oder die Summe vieler Bernoulli-Versuche geeignet.

Verteilung unbekannt

Das schwaches Gesetz der großen Zahlen

nach der tschebytschewschen Ungleichung:

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D^2(X)}{\varepsilon^2}$$

ist die Wahrscheinlichkeit, das der Wert einer Zufallsgröße mehr als ein Intervallradius ε von seinem Erwartungswert abweicht, nicht größer als das Verhältnis der Varianz zum Quadrat des Intervallradius ε. Bei Zulassen einer Irrtumswahrscheinlichkeit α beträgt der Intervallradius mindestens:

$$\varepsilon \geq \sqrt{\frac{D^2(X)}{\alpha}}$$

Ausgehend von einem bekannten Schätzwert X beschränkt das den Bereich des Erwartungswerts auf $X \pm \varepsilon$. Bei bekanntem oder vermutetem Erwartungswert $E(X)$ ist der zulässige Bereich für Schätzwerte, bei denen der Erwartungswert noch nicht anzuzweifeln ist, $E(X) \pm \varepsilon$.

Erwartungswert und Varianz einer Datenstichprobe

Für eine Datenstichprobe

$$X = (X_1, X_2, \ldots, X_{N_\mathrm{S}})$$

ist der Schätzer für den Erwartungswert der Mittelwert:

$$E_\mathrm{S}(X) = \frac{1}{N_\mathrm{S}} \cdot \sum_{i=1}^{N_\mathrm{S}} X_i$$

und für die Varianz:

$$D_\mathrm{S}^2(X) = \frac{1}{N_\mathrm{S} - 1} \cdot \sum_{i=1}^{N_\mathrm{S}} (X_i - E(X))^2$$

Ohne Vorwissen über die Verteilung der Datenstichprobe ist der wahrscheinliche Bereich für künftige Datenwerte:

$$E_\mathrm{S}(X) \pm \varepsilon \qquad \text{mit} \quad \varepsilon \le \sqrt{\frac{D_\mathrm{S}^2(X)}{\alpha}}$$

Zum Schätzen der Varianz

$$D_{\mathrm{S}}^{2}(X)=\frac{1}{N_{\mathrm{S}}-1}\cdot\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{S}}}\left(X_{i}-E(X)\right)^{2}$$

sollte die Datensichprobe $N_{\mathrm{S}}\gg 1$ sein.

Beispiel: Erwartungswert einer Widerstandsmessung

Gegeben sei eine Stichprobe gemessener Widerstandswerte in kΩ:

$$X:\ 10{,}3,\ 10{,}5,\ 9{,}7,\ 8{,}9,\ 10{,}1,\ 11{,}0,\ 10{,}2,\ 9{,}5$$

Aus dieser Stichprobe soll ohne weitere Vorkenntnis über die Verteilung auf den möglichen Bereich des Erwartungswertes geschlussfolgert werden. Zugelassene Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 2\%$.

Zur Lösung der Aufgabe sind Erwartungswert und Varianz der Datenstichprobe zu schätzen:

$$E_{\mathrm{S}}(R) = \frac{1}{8}(10{,}3 + \ldots)\ \mathrm{k\Omega} = 10{,}025\,\mathrm{k\Omega}$$

$$D_{\mathrm{S}}^2(R) = \frac{1}{7}\left((10{,}3 - 10{,}025)^2 + \ldots\right)\ \mathrm{k\Omega}^2 = 0{,}419\,\mathrm{k\Omega}^2$$

Der Intervallradius:

$$\varepsilon \geq \sqrt{\frac{D_{\mathrm{S}}^2\left(R\right)}{\alpha}} = \sqrt{\frac{0{,}419\,\mathrm{k}\Omega^2}{0{,}02}} = 4{,}58\,\mathrm{k}\Omega$$

Das Datenmaterial erlaubt die Zusicherung, dass der tatsächliche Erwartungswert nicht mehr als $\pm 4{,}58\,\mathrm{k}\Omega$ vom geschätzten Erwartungswert abweicht:

$$E(R) = 10{,}03\,\mathrm{k}\Omega \pm 4{,}58\,\mathrm{k}\Omega$$

Die tschebytschewsche Ungleichung erlaubt nur die sehr grobe Bereichsabschätzungen

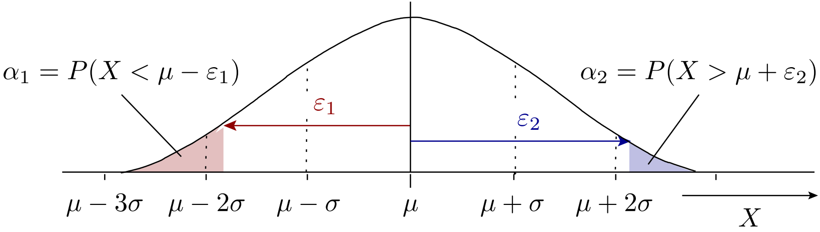
$$5,44\,\mathrm{k}\Omega < E\left(R\right) < 14,60\,\mathrm{k}\Omega$$

verlangt aber keinerlei Vorkenntnisse oder Annahmen über die Verteilung. Die Widerstandswerte dürfen z.B. auch eine multimodale Verteilung haben. Weiteres Zusatzwissen über die Verteilung erlaubt engere Bereichseingrenzungen.

Normalverteilung

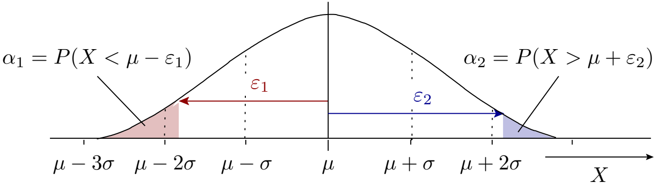
Bereichschätzungen für normalverteilte Größen

Die Werte von Widerständen aus demselben Fertigungsprozess und viele andere Zufallsgrößen sind in guter Näherung normalverteilt.



Die Irrtumswahrscheinlichkeiten beider Möglichkeiten einer einseitigen Bereichsschätzung betragen

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= P\left(X < \mu - \varepsilon_1\right) \\ \alpha_2 &= P\left(X > \mu + \varepsilon_2\right) \end{aligned}$$



Sie ergeben sich aus der Tabelle der Standardnormalverteilung und der Standardabweichung σ.

$\varepsilon_\sigma = \frac{\varepsilon_{1/2}}{\sigma}$	1	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10
$\alpha_{1/2}$	15,9%	2,27%	0,13%	0	2%	1%	0,5%	0,2%	0,1%

Die Irrtumswahrscheinlichkeiten der beiderseitigen Bereichsschätzung ist die Summe der Irrtumswahrscheinlichkeiten der beiden einseitigen Bereichsschätzungen:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = P\left(X < \mu - \varepsilon_1\right) + P\left(X > \mu + \varepsilon_2\right)$$

Beispiel: Erwartungswert einer Widerstandsmessung

Gegeben sei dieselbe Stichprobe gemessener Widerstandswerte wie auf Folie 160 mit dem Erwartunggswert $E_{\mathrm{S}}(R) = 10{,}025\,\mathrm{k}\Omega$ und der Varianz $D^2_{\mathrm{S}}(R) = 0{,}419\,\mathrm{k}\Omega^2$. Diesmal sei unterstellt, dass die Widerstände alle aus demselben Fertigungsprozess kommen, so dass die Messwerte normalverteilt sind. Zugelassene Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 2\%$.

Die Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 2\%$ soll gleich auf oberhalb und unterhalb des zulässigen Bereichs aufgeteilt werden: $\alpha_1 = \alpha_2 = 1\%$. Dafür beträgt der relative Intervallradius $\frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{\varepsilon_1}{\sigma} = \frac{\varepsilon_1}{\sigma} = 2,33$ und der absolute Intervallradius $\varepsilon = 2,33 \cdot \sqrt{0{,}419\,\mathrm{k}\Omega^2} = 1,51\,\mathrm{k}\Omega$. Der wahrscheinliche Bereich des Erwartungswertes

$$8,51\,\mathrm{k}\Omega < E(R) < 11,53\,\mathrm{k}\Omega$$

ist weniger als halb so breit, wie ohne Annahme »normalverteilt«.

Warsch. Zählereignisse

Eintrittswahrscheinlichkeit von Zählwerten

Zählwerte sind eine Summe von Einzelereignissen (z.B. Anzahl fehlerhaft ausgeführten Service-Leistungen, vorhandene Fehler, ...). Die Einzelereignisse können null oder eins sein und haben die Verteilung (vergl. Folie 86):

k	0	1
$P(X_i = k)$	$1 - p_i$	p_i

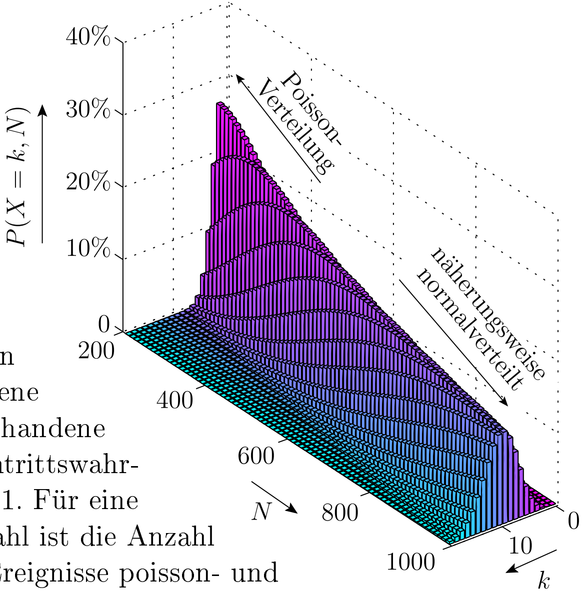
Die Verteilung der Summe

$$X = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

für N nicht korrelierte Versuche leitet sich aus dem Erwartungswert (Gl. 9)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} p_i = N \cdot \bar{p}$$

ab ($\bar{p}$ – mittlere Eintrittswahrscheinlichkeit).



Für die betrachteten Beispiele (eingetretene Fehlfunktionen, vorhandene Fehler) sind die Eintrittswahrscheinlichkeit $p_i \ll 1$. Für eine kleine Versuchsanzahl ist die Anzahl der eingetretenen Ereignisse poisson- und für eine größere näherungsweise normalverteilt.

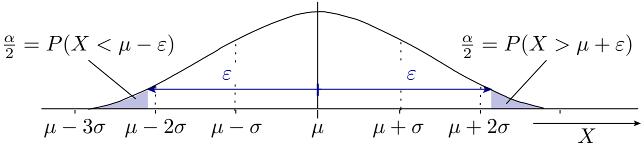
Die mittlere Eintrittswahrscheinlichkeit ist der Quotient aus Erwartungswert und Versuchsanzahl:

$$\bar{p} = \frac{E(X)}{N}$$

Eine Erwartungswertschätzung mit geringem Intervallradius (z.B. Schätzwert ±10%) verlangt eine Versuchsanzahl N, bei der der Zählwert normalverteilt ist. Bei Normalverteilung ist die Varianz einer Zählgröße nicht größer als die einer Binomialverteilung mit gleichem Erwartungswert (Gl. 94):

$$\sigma^2 = D^2(X) \leq E(X) \cdot \left(1 - \frac{E(X)}{N}\right) = N \cdot \bar{p} \cdot (1 - \bar{p}) \qquad (21)$$

und die beiden Irrtumswahrscheinlichkeiten sind gleich $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$.



Schätzen der mittleren Eintrittswahrscheinlichkeit

Die geschätzte mittlere Eintrittswahrscheinlichkeit eines Zählereignisses ist die experimentell bestimmte Anzahl durch die Versuchsanzahl:

$$\bar{p}_{\mathrm{S}} = \frac{X}{N}$$

Der Schätzwert soll mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit α maximal um einen Intervallradius $\varepsilon_{\bar{p}}$ von der zu schätzenden Wahrscheinlichkeit

$$\bar{p} = \frac{E(X)}{N}$$

abweichen.

Aus der Irrtumswahrscheinlichkeit ergibt sich tabellarisch der Intervallradius für eine standardisierte Normalverteilung ε_σ [17]:

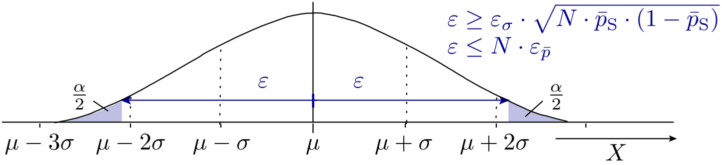
$\varepsilon_\sigma = \frac{\varepsilon}{\sigma}$	1	2	3	4	2,05	2,33	2,57	2,88	3,10
α	31,8%	4,54%	0,26%	0	4%	2%	1%	0,4%	0,2%

[17] Beiderseitige Bereichsschätzung mit $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ (vergl. Tabelle Folie).

Der Intervallradius für eine standardisierte Normalverteilung multipliziert mit der Varianz ist der minimal zu fordernde Intervallradius der wahrscheinlichen Zählwerte. Für die Varianz soll die Obergrenze nach Gl. 21 mit $\bar{p} = \bar{p}_\mathrm{S}$ verwendet werden:

$$\varepsilon \geq \varepsilon_\sigma \cdot \sqrt{N \cdot \bar{p}_\mathrm{S} \cdot (1 - \bar{p}_\mathrm{S})}$$

Der minimal erforderliche Intervallradius ist der geforderte relative Intervallradius $\varepsilon_{\bar{p}}$ mal die Versuchsanzahl N:



Aus der Unter- und Obergrenze für den Intervallradius folgt:

$$\begin{aligned} N \cdot \varepsilon_{\bar{p}} &\geq \varepsilon_\sigma \cdot \sqrt{N \cdot \bar{p}_\mathrm{S} \cdot (1 - \bar{p}_\mathrm{S})} \\ N &\geq \left(\frac{\varepsilon_\sigma}{\varepsilon_{\bar{p}}}\right)^2 \cdot \bar{p}_\mathrm{S} \cdot (1 - \bar{p}_\mathrm{S}) \end{aligned}$$

Beispielabschätzung

Es soll die Wahrscheinlichkeit $p_{\mathrm{SF}} \ll 1$ für das Versagen einer Service-Leistung geschätzt werden. Intervallradius $\varepsilon_{\bar{p}}$ sei 10% des Schätzwertes und die Irrtumswahrscheinlichkeit, dass der Schätzwert außerhalb des Intervalls liegt, sei $\alpha = 2\%$.

Irrtumswahrscheinlichkeit 2% verlangt einen Intervallradius von $\varepsilon_\sigma \leq 2,33$. Der Intervallradius der zu schätzenden Wahrscheinlichkeit ist 10% des Schätzwerts $\varepsilon_{\bar{p}} = 0,1 \cdot \bar{p}_{\mathrm{S}}$. Die erforderliche Versuchsanzahl beträgt:

$$N \geq \left(\frac{2{,}33}{0{,}1 \cdot \bar{p}_{\mathrm{S}}}\right)^2 \cdot \bar{p}_{\mathrm{S}} \cdot (1 - \bar{p}_{\mathrm{S}}) \approx \left(\frac{2{,}33}{0{,}1}\right)^2 \cdot \frac{1}{\bar{p}_{\mathrm{S}}} = \frac{543}{\bar{p}_{\mathrm{S}}}$$

Die erforderliche Anzahl der Service-Anforderungen ist so groß zu wählen, dass mindesten 543 Fehlfunktionen zu beobachten sind, damit die geschätzte Wahrscheinlichkeit mit 98% Sicherheit nicht mehr als 10% vom tatsächlichen Wert abweicht.

Seltene Ereignisse

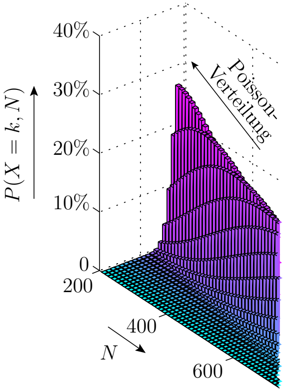
Ausschluss seltener Ereignisse

Ein IT-System in einer sicherheitskritischen Anwendung (Steuerung von Fahrzeugen, Anlagen, ...) kann bei einer Fehlfunktion erheblichen Schaden verursachen. Das gilt nur für einen kleinen Teil der möglichen Fehlfunktionen. Diese müssen mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit ausgeschlossen werden, ohne dass ein 100%-iger Ausschlussmöglich ist.

Für seltene Ereignisse ist die Anzahl der eintretenden Ereignisse poisson-verteilt:

$$P(X = k) = e^{-\bar{p}\cdot N} \cdot \frac{(\bar{p}\cdot N)^k}{k!}$$

($\bar{p} \ll 1$ – mittlere Eintrittswahrscheinlichkeit; N – Versuchsanzahl, z.B. Anzahl der genutzten Service-Leistungen).



Die hier zu untersuchenden Fragestellungen sind:

- Wie hoch ist die Sicherheit, dass keines oder nur eine tolerierbar geringe Anzahl von kritischen Ereignissen eintritt?
- Wie groß darf die mittlere Eintrittswahrscheinlichkeit kritischer Ereignisse maximal sein?
- Wie oft dürfen Service-Leistungen, bei denen kritische Fehlfunktionen auftreten können, genutzt werden?

Wenn mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit α kein kritisches Ereignis tolerierbar ist, muss die Wahrscheinlichkeit »kein kritisches Ereignis« größer $1-\alpha$ sein:

$$P\left(X=0\right)=e^{-\bar{p}\cdot N}\geq1-\alpha$$

Das Produkt aus der Eintrittswahrscheinlichkeit kritischer Fehlfunktionen und der Anzahl der genutzten Service-Leistungen darf nicht größer sein als:

$$\bar{p}\cdot N\leq-\ln\left(1-\alpha\right)$$

Beispiel absturzfreie Nutzungsdauer

Eine sehr störende Fehlfunktion ist der Absturz eines Programms mit Datenverlust. Die Wahrscheinlichkeit dafür sei im Mittel je Programmbenutzung $\bar{p} = 10^{-3}$. Wie oft kann das Programm hintereinander genutzt werden, ohne dass der Schadesfall eintritt. Irrtumswahrscheinlichkeit, dass der Schaden doch innerhalb dieser Nutzungsdauer eintritt, sei $\alpha = 1\%$.

Maximale Nutzungsanzahl:

$$N = \frac{-\ln(1-1\%)}{10^3} \approx 10$$

Bei nicht mehr als 10-maliger Programmnutzung bleiben im Mittel 99% der Nutzer von dieser Fehlersituation verschont.

Wenige tolerierbare Schadensfälle

Für eine Anzahl von $k_{\max}$ tolerierbare kritsche Ereignisse beträgt die Sicherheit $1-\alpha$, dass sie nicht überschritten wird:

$$P(X \leq k) = e^{-\bar{p}\cdot N} \cdot \frac{(\bar{p}\cdot N)^k}{k!} \leq 1-\alpha$$

Nachfolgende Tabelle zeigt die maximalen Erwartungswerte $\bar{p}\cdot N$, bis zu denen mit unterschiedlichen Irrtumswahrscheinlichkeiten garantiert werden kann, dass die kritischen Ereignisse nicht öfter als 0, 1, 2 oder 3 mal eintreten:

	$k_{\max}=0$	$k_{\max}=1$	$k_{\max}=2$	$k_{\max}=3$
$\alpha=0{,}5\%$	$5{,}01\cdot 10^{-3}$	$1{,}03\cdot 10^{-1}$	$3{,}38\cdot 10^{-1}$	$6{,}72\cdot 10^{-1}$
$\alpha=1\%$	$1{,}01\cdot 10^{-2}$	$1{,}49\cdot 10^{-1}$	$4{,}36\cdot 10^{-1}$	$8{,}23\cdot 10^{-1}$
$\alpha=2\%$	$2{,}02\cdot 10^{-2}$	$2{,}15\cdot 10^{-1}$	$5{,}67\cdot 10^{-1}$	$1{,}02$

Erweiterung des vorherigen Beispiels

Die Wahrscheinlichkeit für ein Programmabsturz sei weiterhin im Mittel $\bar{p} = 10^{-3}$ je Programmbenutzung. Die Fragestellung sei dahingehend erweitert, wie oft kann das Programm hintereinander genutzt werden, ohne dass der Schadesfall mehr als 1, 2 oder 3 mal eintritt. Die Irrtumswahrscheinlichkeit sei weiterhin $\alpha = 1\%$.

Ergebnis sind die Tabellenwerte für $\alpha = 1\%$ multipliziert mit $N^{-1} = 1000$:

	$k_{\max} = 0$	$k_{\max} = 1$	$k_{\max} = 2$	$k_{\max} = 3$
$\alpha = 1\%$	$10,1$	149	436	823

Aufgaben

Aufgabe 4.1: Erwartungswert und Varianz

Schätzen Sie den Erwartungswert und die Varianz der nachfolgenden Datenstichprobe:

```
8,45, 11,90, 12,22,  9,74, 10,80,
7,62,  7,66, 10,54, 11,96, 16,25,
8,77, 10,73, 10,11,  5,85,  9,29,
6,17, 12,23,  8,26, 10,53,  9,05
```

Aufgabe 4.2: Bereichsschätzung Schichtdicke

Gegeben ist die Messreihe einer Halbleiterschichtdicke in nm:

```
232.37 235.62 238.14 236.65 237.96
231.42 233.29 234.65 232.75 232.89
229.59 238.69 229.39 233.68 242.76
233.15 239.26 235.40 234.25 230.72
```

Schätzen Sie Erwartungswert und Varianz der Messergebnisse

1. In welchem Bereich liegt der Erwartungswert ohne Zusatzwissen über die Verteilung.
2. In welchem Bereich liegt die zu erwartende Schichtdicke, wenn von einer Normalverteilung ausgegangen werden kann?

Zulässige Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 1\%$.

Lösungsvorschlag

```
x=[232.37 235.62 238.14 236.65 237.96 231.42 ...
233.29 234.65 232.75 232.89 229.59 238.69 229.39 ...
233.68 242.76 233.15 239.26 235.40 234.25 230.72];
EX=0;
for i=1:length(x)
 EX=EX+x(i);
end EX=EX/length(x);
DX2=0;
for i=1:length(x)
 DX2=DX2+(x(i)-EX)^2;
end
DX=sqrt(DX2/(length(x)-1));
fprintf('Bereich Tschb: %f <X< %f\n', EX-10*DX, EX+10*DX);
fprintf('Bereich Norma: %f <X< %f\n', ...
         EX-2.33*DX, EX+2.33*DX);
```

Aufgabe 4.3: Fehlerentstehungswahrscheinlichkeit

Beim Programmieren entstehen Fehler in der Größenordnung von $\bar{p} \approx 1...10\%$ je Codezeile. Der Wert schwankt aber von Programmierer zu Programmierer. Zur Motivierung zu qualitativ guter Arbeit soll ein leistungsabhängiges Gehalt in Abhängigkeit vom »Güteparameter« $\bar{p}$ des Programmierers gezahlt werden. Dazu sei der Güteparameter mit einer relativen Genauigkeit von $\varepsilon_{\bar{p}} = 5\% \cdot \bar{p}$ und einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 1\%$ für jeden Programmierer zu schätzen. Für wie viele Code-Zeilen an Programmen müssten dazu von jedem zu evaluierenden Programmierer die entstandenen Fehler gezählt werden?

Aufgabe 4.4: Garantierbarer fehlerfreier Betrieb

Für wie viele Service-Anforderungen hintereinander kann für maximal ein Versagen (kein oder ein falsches Ergebnis) garantiert werden, wenn die mittlere Auftrittswahrscheinlichkeit einer Fehlfunktion je Service-Leistung $\bar{p} = 10^{-6}$ beträgt. Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 1\%$.

Aufgabe 4.5: Bereichsschätzung Fehleranzahl

Eine Test hat $\varphi = 400$ Fehler erkannt. In welchem Bereich liegt die zu erwartende Anzahl der nachweisbaren Fehler bei einer Irrtumwahrscheinlichkeit von $\alpha = 2\%$

Literatur