



# Elektronik II, Foliensatz 3

## Simulation mit zeitveränderlichen Größen

G. Kemnitz

Institut für Informatik, Technische Universität Clausthal  
23. Juni 2015



## Inhalt F3: Simulation mit zeitveränderlichen Größen

### Simulationsarten

#### Zeitdiskrete Sim.

- 2.1 Geschaltete RC-Glieder
- 2.2 Gatterschaltzeiten
- 2.3 Kippstufen
- 2.4 Sinussignale
- 2.5 Testsignale
- 2.6 Aufgaben

#### Frequenzbereich

- 3.1 Frequenzgang
- 3.2 Laplace-Transformierte
- 3.3 Verstärker
- 3.4 Filter

### 3.5 Aufgaben

#### Spektralanalyse

- 4.1 Fourierttransformation
- 4.2 Klirrfaktor
- 4.3 Aufgaben

#### Rauschen

- 5.1 Physikalische Ursachen
- 5.2 Rauschquellen & -transformation
- 5.3 Rauschanalyse
- 5.4 Verstärker
- 5.5 SNR und Rauschzahl
- 5.6 Aufgaben



## Simulationsarten



## Simulation mit zeitveränderlichen Größen

Bei der Berücksichtigung zeitveränderlicher Spannungen und Ströme sind zusätzlich kapazitive Umladeströme und induzierte Spannungen zu berücksichtigen:

A circuit diagram showing a capacitor represented by two parallel vertical lines. An arrow labeled  $u_C$  points to the right above the capacitor. Below the capacitor is the letter  $C$ . To the right of the capacitor, an arrow labeled  $i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt}$  points to the right.

A circuit diagram showing an inductor represented by a horizontal wavy line. An arrow labeled  $u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$  points to the right above the inductor. Below the inductor, an arrow labeled  $i_L$  points to the right.

Aus den Maschen- und Knotengleichungen werden große Differenzialgleichungen. Es gibt zwei Simulationsarten für diese DGL-Systeme:

- zeitdiskret (Analyseart »trans«, TRANSition) und
- Frequenzbereich (Analyseart »ac«, Alternate Current).

Die zeitdiskrete Simulation ist auch für nichtlineare, die Simulation im Frequenzbereich nur für lineare Schaltungen geeignet.



# 1. Simulationsarten

Die Brücke zwischen beiden Simulationsarten bildet die Fourier-Transformation (Analyseart »four«). Sie berechnet die Spektren gemessener oder berechneter Signalverläufe. Die Ergebnisse müssen in Amplitude und Phase mit denen der »ac«-Simulation übereinstimmen.

Veränderungen des Spektrums durch nichtlineare Verzerrungen werden durch den Klirrfaktor beschrieben. Der Klirrfaktor lässt sich auch in der Analyseart »four« berechnen.

Elektronische Bauteile (Widerstände, pn-Übergänge) rauschen. Das Rauschen ist ein Störsignal, das dem Nutzsignal überlagert ist. Die Auswertbarkeit eines Signals verlangt ein hinreichend großen Signals-Rausch-Abstand (SNR). Rauschgrößen werden in der Analyseart »noise« berechnet.

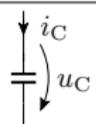
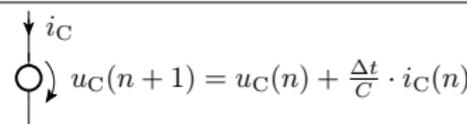
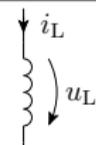
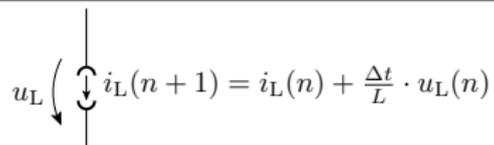


# Zeitdiskrete Sim.



### Zeitdiskrete Simulation

Das Grundprinzip ist,, wie in Elektronik I behandelt, die Nachbildung von  $C$  und  $L$  durch zeitveränderliche Quellen:

	Original	Ersatz
Kapazität		
Induktivität		

und die Berechnung der Ströme und Spannungen in diskreten Zeitschritten:

Wiederhole für jeden Zeitschritt:  
stationäre Schaltungsanalyse

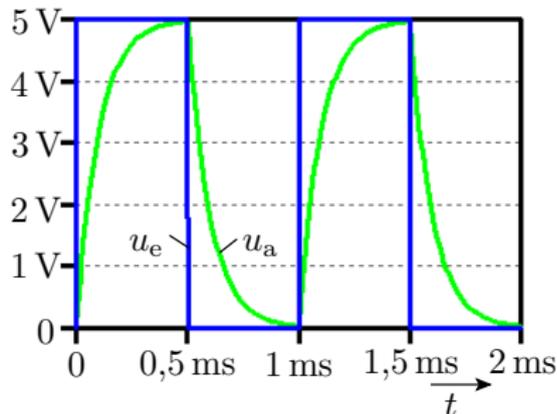
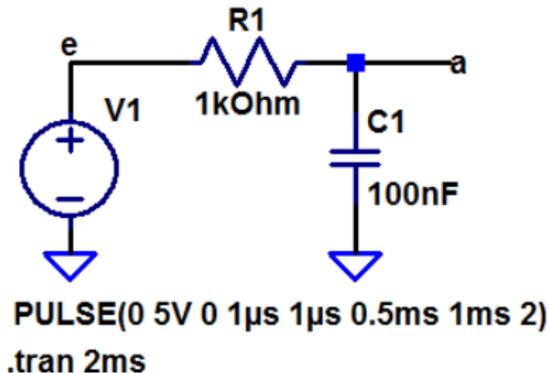


## Geschaltete RC-Glieder

## Geschaltetes RC-Glieder

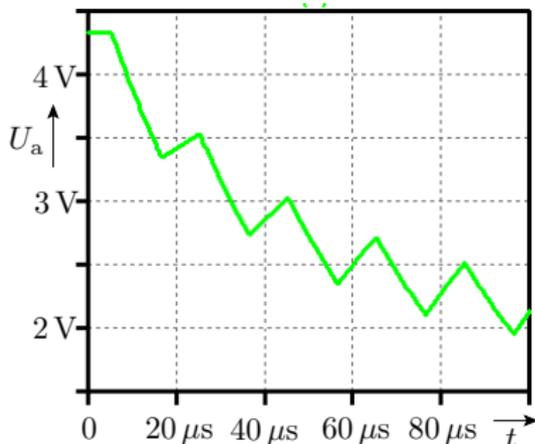
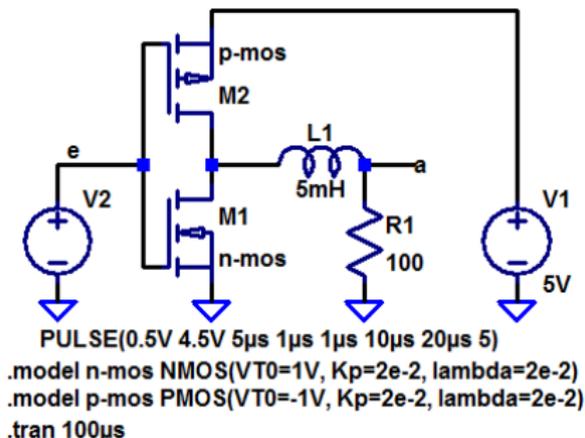
Geschaltete RC- und RL-Glieder dienen in Elektronik I zur Abschätzung des Zeitverhalten geschalteter Systeme (Digitalschaltungen, Pulsweitenmodulation, ...).

Bei einem geschalteten RC-Glied streben Strom und Spannung mit der Zeitkonstanten  $\tau = RC$  und beim geschalteten RL-Glied mit der Zeitkonstanten  $\tau = \frac{L}{R}$  gegen ihren stationären Wert.



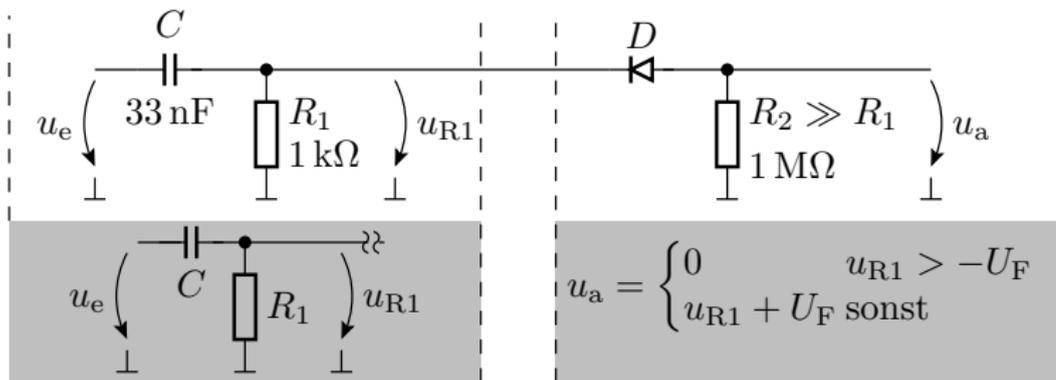
## Zurückführung auf geschaltete RC- oder RL-Glieder

Schaltungen mit einer geschalteten Quelle und nur einer wesentlichen Kapazität oder Induktivität lassen sich auf das Modell eines geschalteten RC- bzw. RL-Glieds zurückführen.



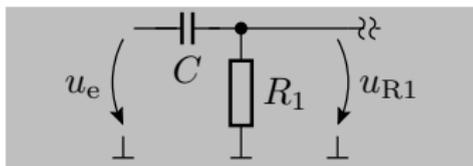
Wie sieht das funktionsgleiche geschaltete RL-Glied aus?

## Bereichsweise Annäherung durch eine RC-Glied

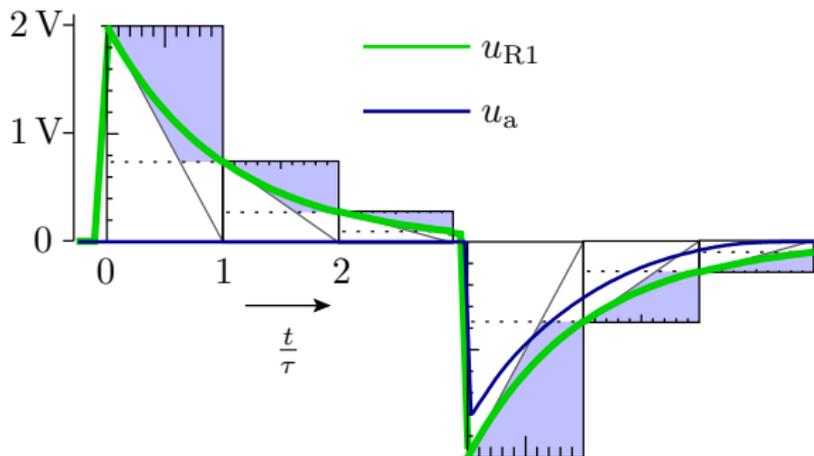


Konstruktion der Ersatzschaltung für Überschlage:

- Wegen  $R_2 \gg R_1$  kann die Diode näherungsweise als Unterbrechung betrachtet werden. brig bleibt ein RC-Glied mit  $\tau = R_1 \cdot C = 33 \mu\text{s}$ .
- Fur negative  $u_{R1} < -U_F$  ist die Ausgangsspannung  $u_{R1} - U_F$  und sonst null.

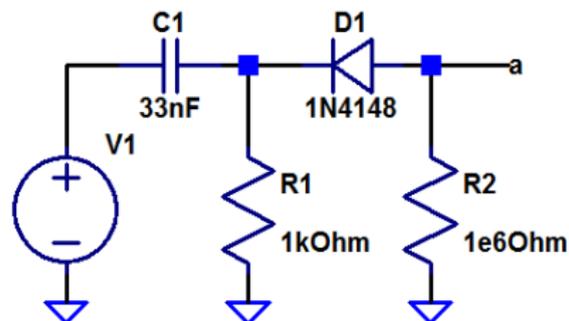


$$u_a = \begin{cases} 0 & u_{R1} > -U_F \\ u_{R1} + U_F & \text{sonst} \end{cases}$$

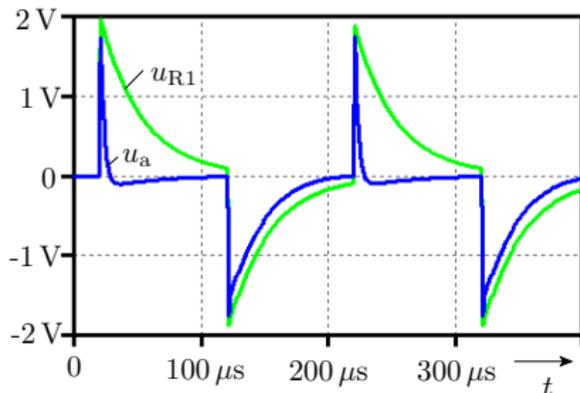


$u_{R1}$  hat nach dem Sprung als Anfangswert die Sprunghöhe (beim Ausschalten von  $u_e$  negativ) und strebt gegen null. Die Ausgangsspannung müsste bei positiven Eingangssprüngen null bleiben und bei negativen müsste ein Nadelimpuls erscheinen.

## Simulation



```
PULSE(0 2V 20µs 1µs 1µs 100µs 200µs 3)
.tran 400µs
```



Abweichend vom geschätzten Ausgabesignalimpuls gibt es auch bei der steigenden Flanke am Ausgang einen Nadelimpuls mit der Zeitkonstanten  $\tau_2 \approx 4 \mu\text{s}$ . Das Simulationsmodell der Diode hat offenbar im Sperrbereich eine Kapazität von:

$$C_D \approx \frac{\tau_2}{R_2} = 4 \text{ pF}$$

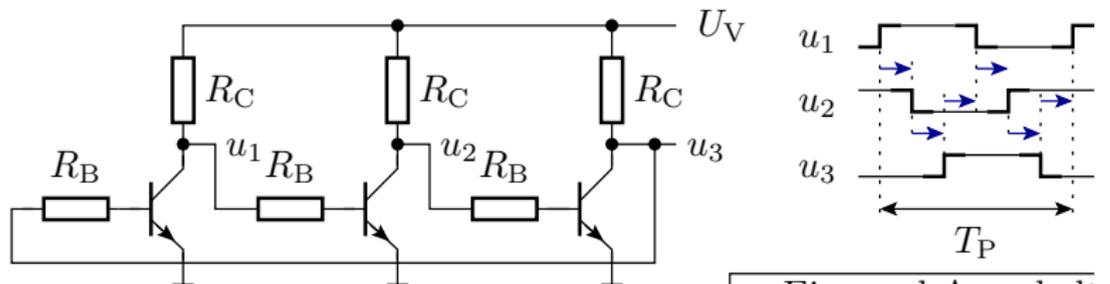
Überschläge vernachlässigen immer viele Details.



## Gatterschaltzeiten

## DT-Gatter

Die drei einfachen Transistorinverter sind zu einem Ringinverter verschaltet. Die Periode des Ausgangssignals ist die Summe der drei Ein- und Ausschaltzeiten<sup>1</sup>.

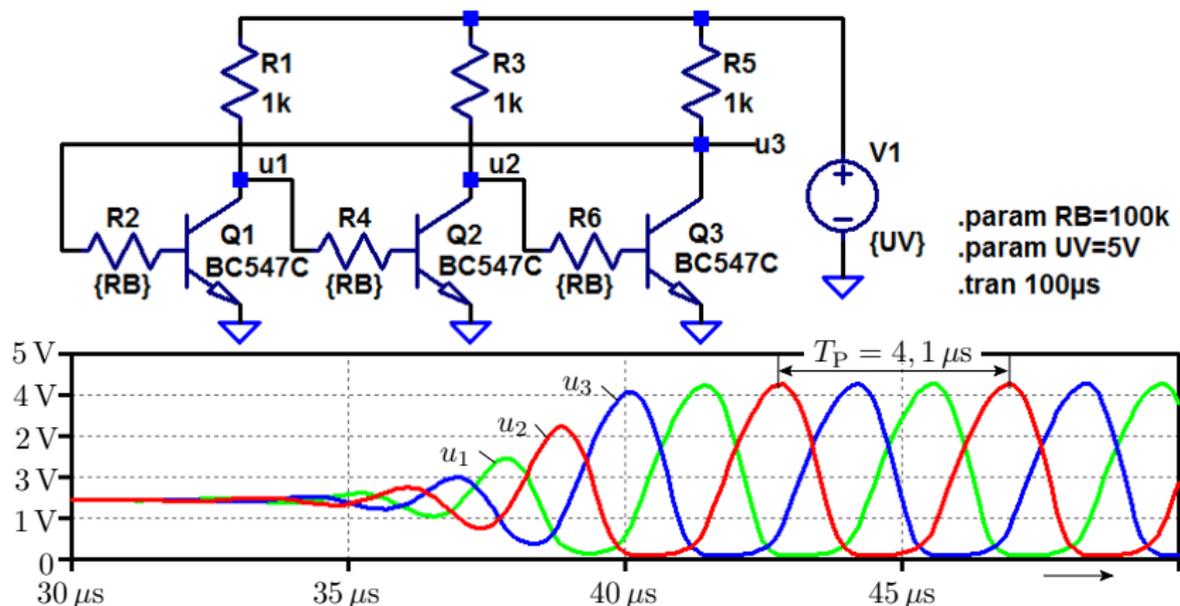


→ Ein- und Ausschaltzeiten der Inverter

Nimmt  $T_P$  ab oder zu:

- wenn  $R_B$  vergrößert wird?
- wenn  $U_V$  erhöht wird?

<sup>1</sup>Der Ringinverter diente in Elektronik I, F8, Abschn 3.2 zur Illustration der Zusatzverzögerung durch Übersteuerung.



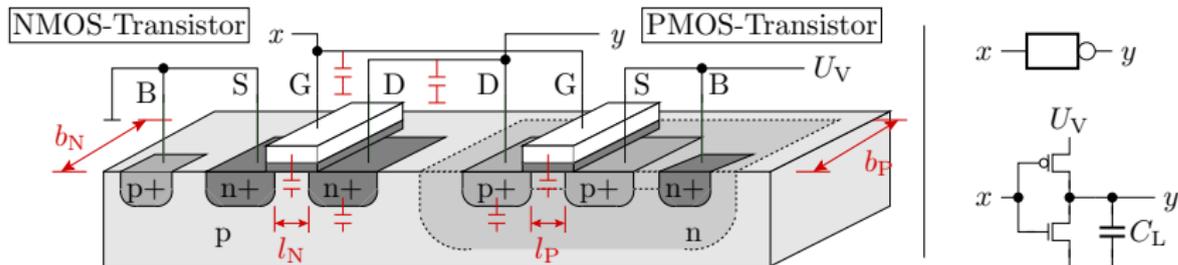
Die Simulation zeigt das Gegenteil des erwarteten Verhaltens<sup>2</sup>:

- Verringerung  $R \rightarrow 33 \text{ k}\Omega$ : Verringerung von  $T_P \rightarrow 2 \mu\text{s}$
- Verringerung  $U_V \rightarrow 2,5 \text{ V}$ : Vergrößerung von  $T_P \rightarrow 4,5 \mu\text{s}$
- Schottky-Diode zwischen Basis und Kollektor:  $T_P \rightarrow 11,5 \mu\text{s}$

<sup>2</sup>Die Basisaufladung bei Übersteuerung scheint im Modell zu fehlen.

## Verzögerung eines CMOS-Inverters

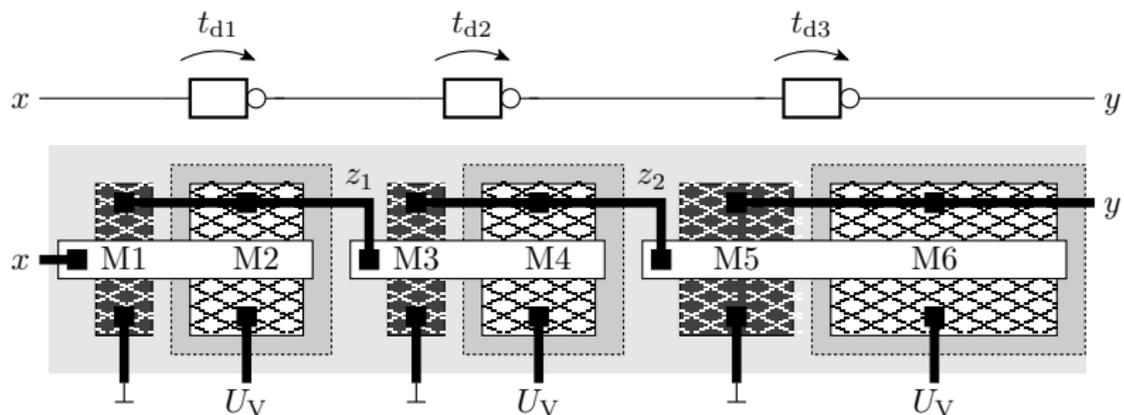
Bei einem CMOS-Inverter wird die Lastkapazität  $C_L$  beim Ausschalten über den NMOS-Transistor entladen und beim Einschalten über den PMOS-Transistor aufgeladen. Die Lastkapazität setzt sich zusammen aus den Kapazitäten der pn-Übergänge am Inverterausgang (Source-Bulk, Drain-Bulk) und den Gate-Kapazitäten an den Eingängen der Folgegatter.



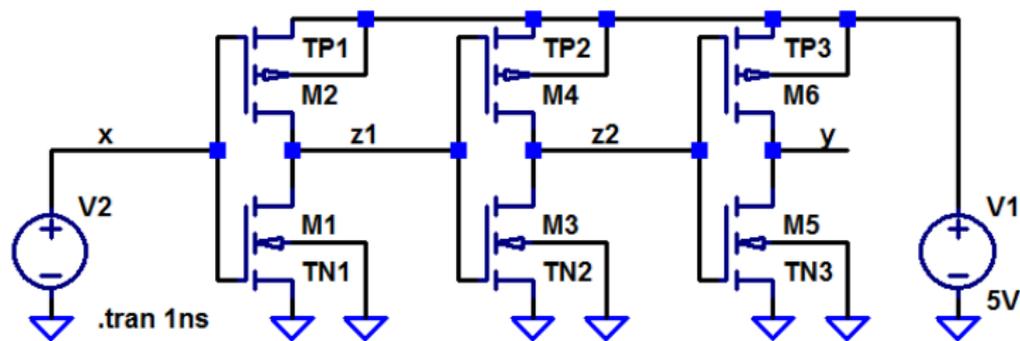
Die Umladezeiten verhalten sich proportional zur Lastkapazität und umgekehrt proportional zu den Umladeströmen.



Die Umladeströme verhalten sich proportional zum Verhältnis aus Kanalbreite und Kanallänge:  $w_{N/P} = b_{N/P}/l_{N/P}$ . Die Ein- und Ausschaltzeit wird folglich erheblich von der Geometrie abhängen. In der nachfolgenden Inverterkette haben die NMOS-Transistoren  $M_1$  und  $M_3$  die relative Breite eins und  $M_5$  zwei. Die PMOS-Transistoren sind wegen der nur halb so großen Ladungsträgerbeweglichkeit doppelt so breit gewählt.



Wie wirkt sich das auf die Schaltverzögerungen aus?



PULSE(0 5V 50p 50p 350p 800p 2)

.model myNMOS NMOS(VT0=0.73V Kp=69μ lambda=33m tox=25n CJ=360μ CJSW=250p)

.model myPMOS PMOS(VT0=-0.75V, Kp=23μ, lambda=55m tox=25n CJ=340μ CJSW=220p)

.model TN1 ako:myNMOS l=1μ w=1μ ad=1.5p as=1.5p pd=5μ ps=5μ

.model TP1 ako:myPMOS l=1μ w=2μ ad=3p as=3p pd=7μ ps=7μ

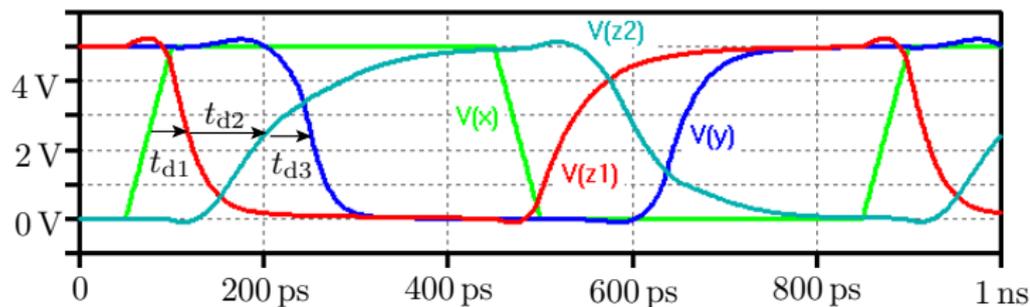
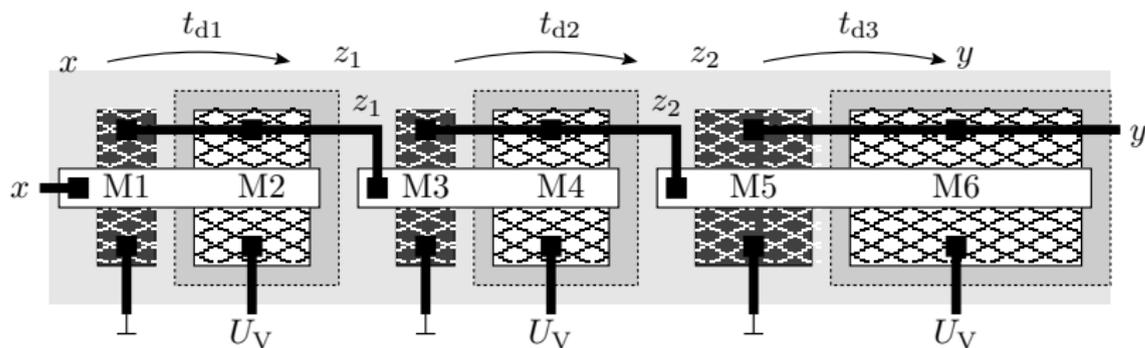
.model TN2 ako:myNMOS l=1μ w=1μ ad=1.5p as=1.5p pd=5μ ps=5μ

.model TP2 ako:myPMOS l=1μ w=2μ ad=3p as=3p pd=7μ ps=7μ

.model TN3 ako:myNMOS l=1μ w=2μ ad=3p as=3p pd=7μ ps=7μ

.model TP3 ako:myPMOS l=1μ w=4μ ad=6p as=6p pd=11μ ps=11μ

Parameter:  $l$  – Kanallänge;  $w$  – Kanalbreite;  $ad$  bzw.  $as$  – Fläche des Drain- bzw. Source-Gebiets;  $pd$  bzw.  $ps$  – Umfang des Drain- bzw. Source-Gebiets; Angaben in Metern bzw. Quadratmetern).



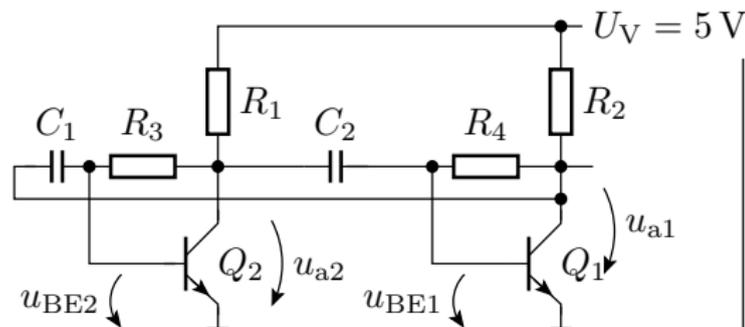
Die Verzögerung  $t_{d1}$  des ersten Inverters ist deutlich kürzer als  $t_{d2}$  des zweiten Inverters mit der doppelten Last und  $t_{d3}$  ist wieder kürzer, da ohne Last.



## Kippstufen

## Astabiler Multivibrator

Alter Schaltungsklassiker:



$$R_1 = R_2 = 2 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 101 \text{ k}\Omega^*$$

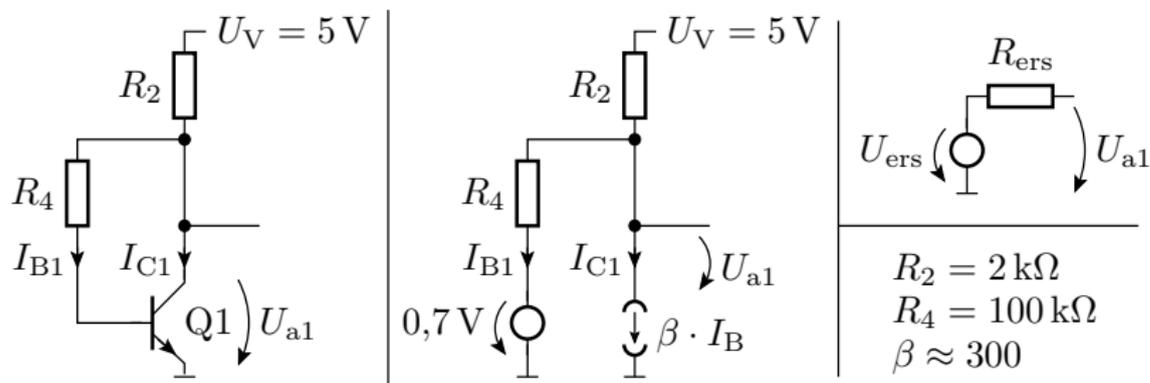
$$R_4 = 100 \text{ k}\Omega$$

$$C_1 = C_2 = 10 \text{ nF}$$

\* Unsymmetrie zur Verkürzung der Anschwingzeit

Ohne  $C_1$  und  $C_2$  arbeiten beide Transistoren im Normalbereich. Ausgangsspannung  $\approx 1,31 \text{ V}$  (siehe nächste Folie). Eine fallende Flanke am Kondensatoreingang schaltet den nachfolgenden Transistor bis zum Umladen des Kondensators aus und eine steigende schaltet ihn voll ein.

## Ersatzschaltung ohne Kapazitäten

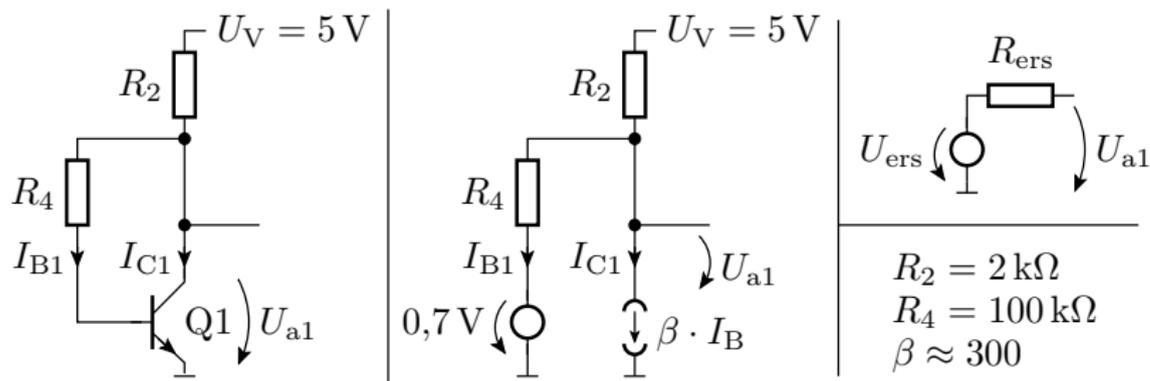


$$\begin{aligned}
 R_2 &= 2 \text{ k}\Omega \\
 R_4 &= 100 \text{ k}\Omega \\
 \beta &\approx 300
 \end{aligned}$$

$$I_{B1} = \frac{U_{a1} - 0,7 \text{ V}}{R_4}$$

$$U_{a1} = U_V - (1 + \beta) \cdot R_2 \cdot I_{B1} = U_V - (1 + \beta) \cdot R_2 \cdot \frac{U_{a1} - 0,7 \text{ V}}{R_4}$$

$$U_{a1} = \frac{U_V + (1 + \beta) \cdot \frac{R_2}{R_4} \cdot 0,7 \text{ V}}{1 + (1 + \beta) \cdot \frac{R_2}{R_4}} \approx \frac{5 \text{ V} + 301 \cdot \frac{2}{100} \cdot 0,7 \text{ V}}{1 + 301 \cdot \frac{2}{100}} \approx 1,3 \text{ V}$$



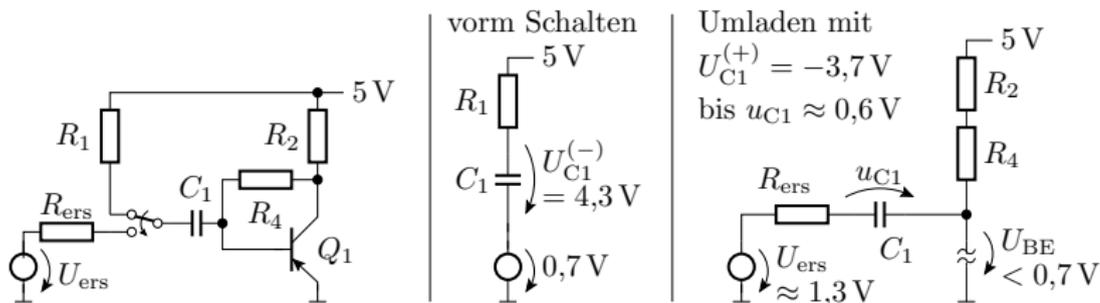
- $U_{\text{ers}}$  ist  $U_{a1}$ , wenn kein Ausgangsstrom fließt, d.h. der berechnete Wert:

$$U_{\text{ers}} = U_{a1} \approx 1,3\text{ V}$$

- Der Ersatzwiderstand der Ersatzschaltung ohne Quellen:

$$R_{\text{ers}} = R_2 \parallel \frac{R_4}{1 + \beta} \approx 286\ \Omega$$

## Rechte Stufe als geschaltetes RC-Glied

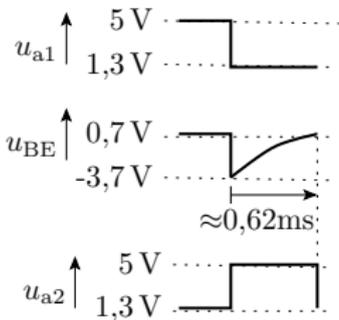
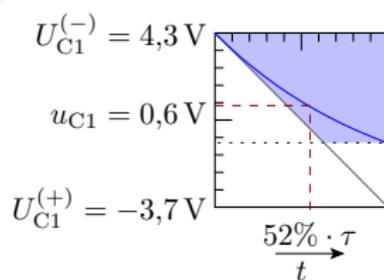


$$\tau = C_1 \cdot (R_{\text{ers}} + R_2 + R_4)$$

$$\tau \approx 1 \text{ ms}$$

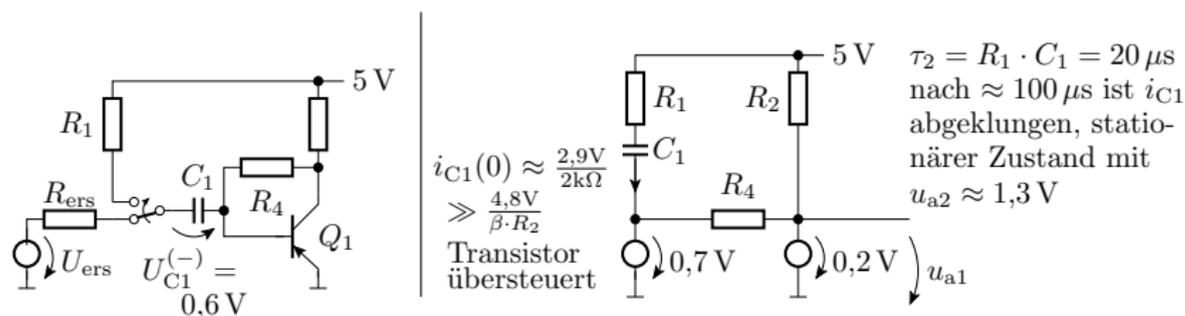
$$t_1 = \tau \cdot \ln\left(1 - \frac{3,7\text{V}}{8\text{V}}\right)$$

$$t_1 \approx 0,62 \text{ ms}$$



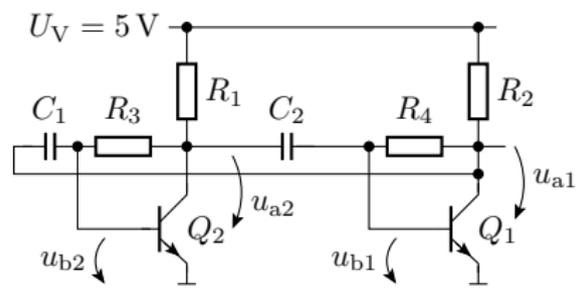
Wenn Transistor  $Q_2$  einschaltet, schaltet  $Q_1$  für eine Zeit  $t_1$  aus.

## Umladen von $C_1$ beim Zurückschalten

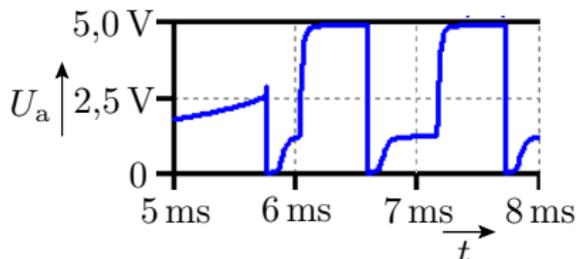
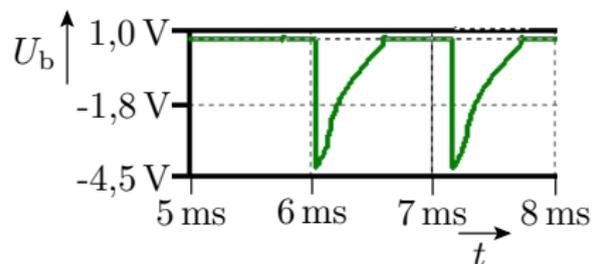
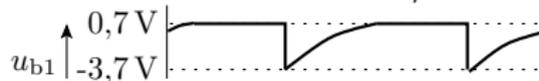
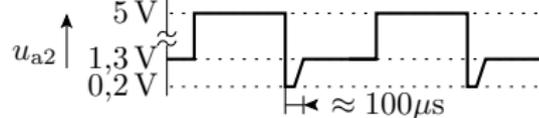
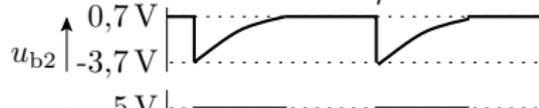
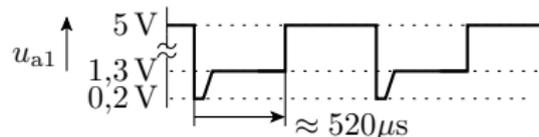


- Beim Zurückschalten liefert  $C_1$  viel mehr Basisstrom als  $R_4$  im stationären Zustand; Transistor übersteuert;  $u_a \approx 0,2 V$
- Umladung von  $C_2$  über  $R_1$  nach etwa  $100 \mu s$  abgeschlossen. Stationärer Zustand  $u_a \approx 1,3 V$ .

## Funktion der Gesamtschaltung

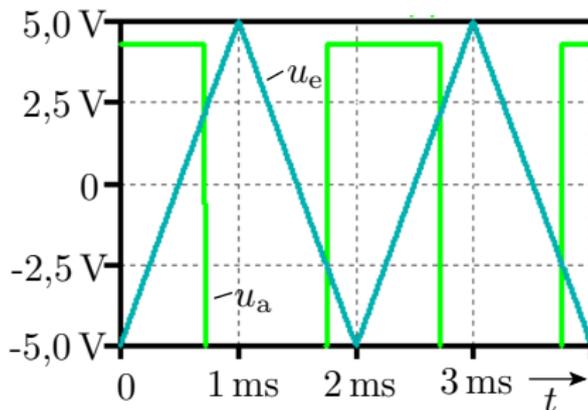
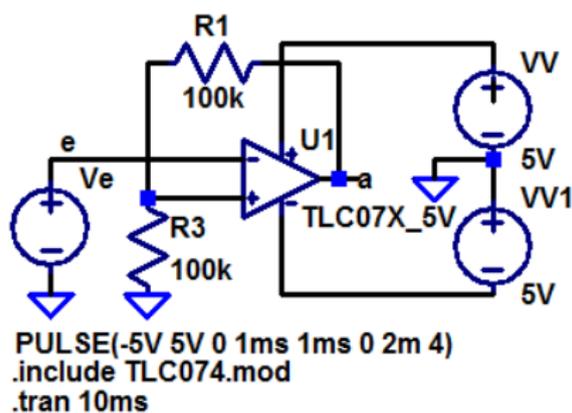


$$\begin{aligned}
 R_1 &= R_2 = 2 \text{ k}\Omega & R_3 &= 101 \text{ k}\Omega \\
 C_1 &= C_2 = 10 \text{ nF} & R_4 &= 100 \text{ k}\Omega
 \end{aligned}$$

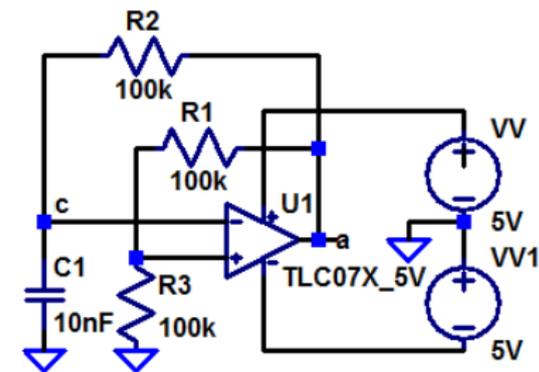


## Schwellwertschalter mit Hysterese

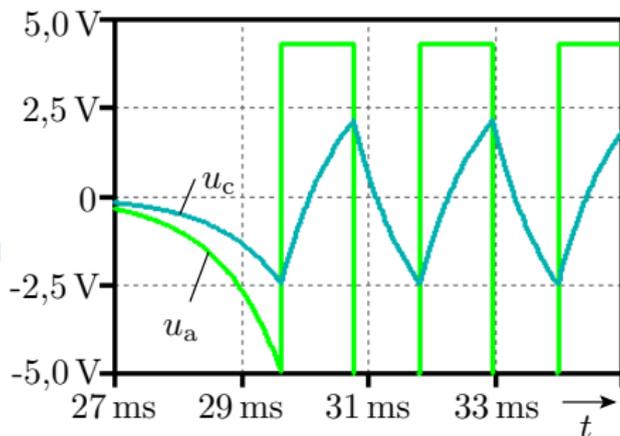
In Elektronik I, F6, Abschn. 1.6 wurde eine RC-Oszillator mit einem Schwellwertschalter mit Hysterese konstruiert.



## Erweiterung zum Rechtecksignalgenerator



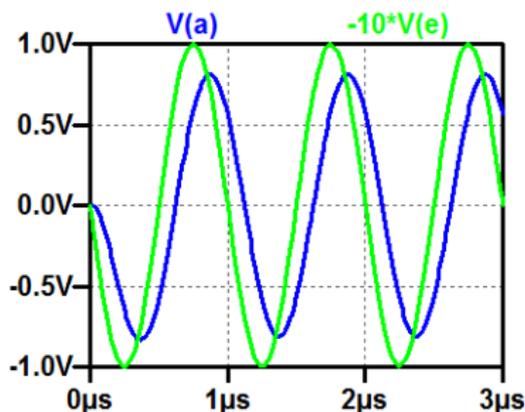
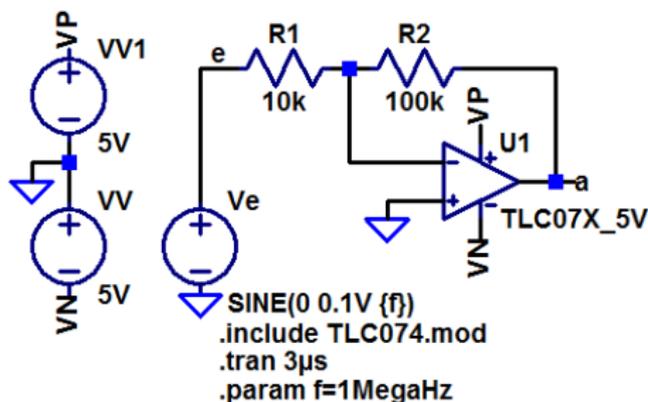
```
.include TLC074.mod
.tran 35ms
```



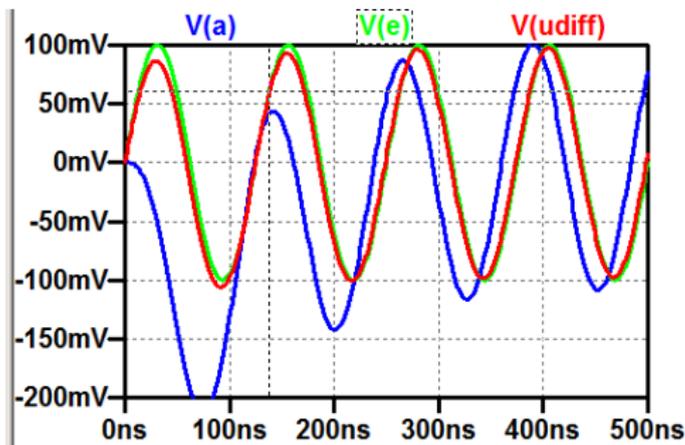
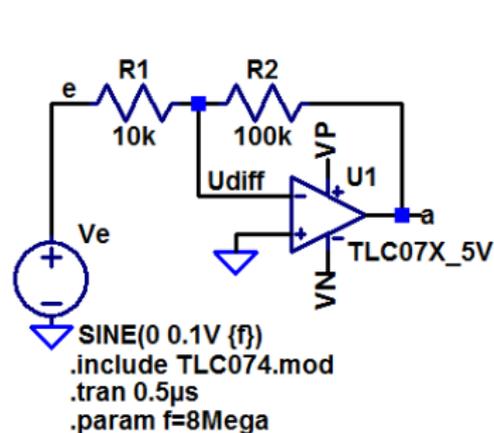


# Sinussignale

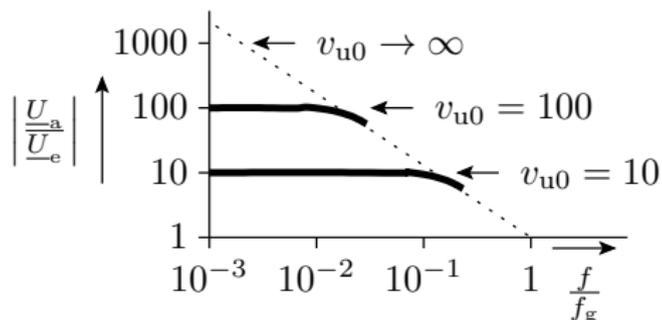
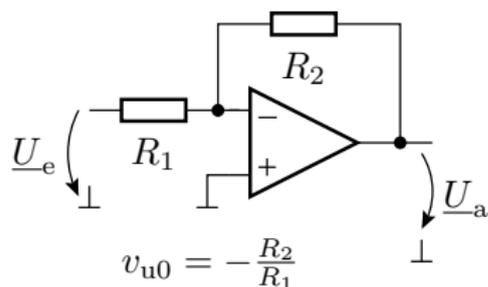
## Sinussignale



Invertierender Verstärker mit Verstärkung  $-R_2/R_1 = -10$  für niedrige Frequenzen. Im Bild bei 1 MHz ist die Verstärkung nur noch 8,15 und das Ausgangssignal gegenüber dem Eingangssignal um 120 ns verzögert. Bei einer Verringerung der Signalperiode auf die doppelte Verzögerung  $T_P \approx 240$  ns müsste aus der Rückkopplung eine Mittkopplung werden?

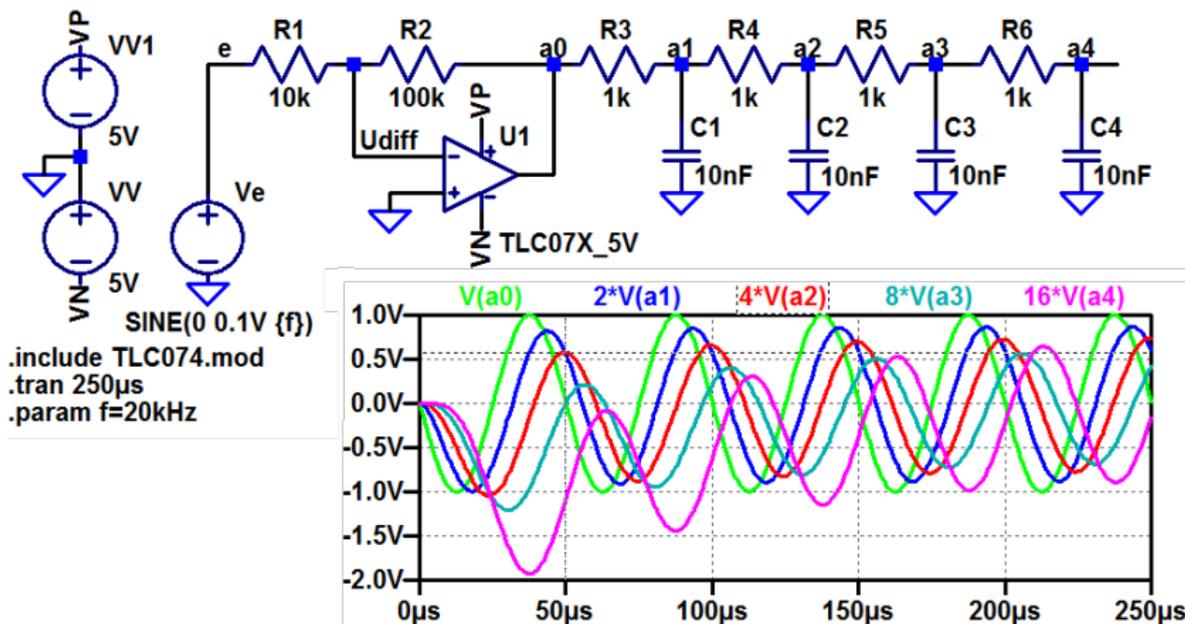


Bei 8 MHz sind Ein- und Ausgabesignal fast gleichphasig. Es kommt zu einer Mittkopplung. Die Verstärkung (Amplitude der Ausgangsspannung zur Amplitude der Differenzspannung) ist jedoch nur noch etwa eins. Wenn man  $R_2$  weglässt, ändert sich die Ausgangsspannung kaum.



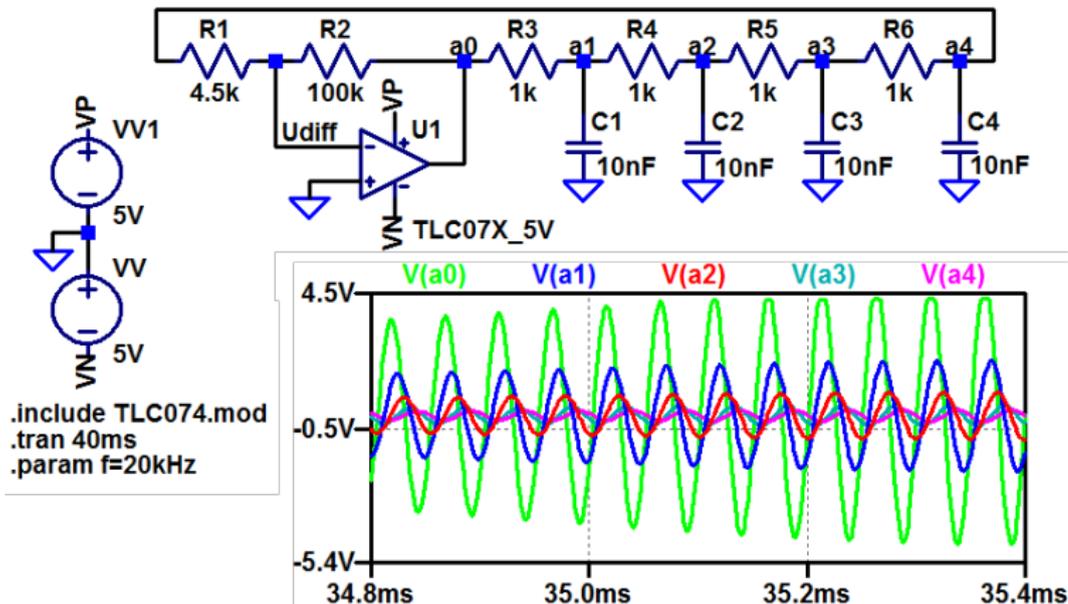
Die 8 MHz sind offenbar etwa die Transitfrequenz  $f_T$  des Operationsverstärkers, bei der die Verstärkung eins ist. Eine Verstärkung  $v_{u0} > 1$  ist nur für die Spektralanteile mit  $f < \frac{f_T}{v_{u0}}$  erreichbar. Rückgekoppelte Verstärker, bei denen die Verstärkung bei einer Phasenverschiebung von  $180^\circ$  größer eins ist, wandeln sich in mitgekoppelte Verstärker um und schwingen.

## Verstärker mit RC-Phasenschieber am Ausgang



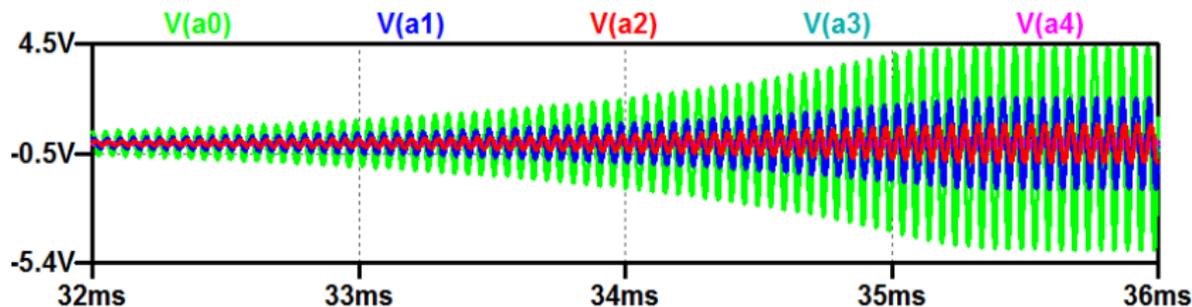
Jedes RC-Glied halbiert etwa das Ausgangssignal und verzögert es um  $\approx 45^\circ$ .

Bei Rückführung des Ausgangssignals  $a_4$  auf den Verstärkereingang und einer Erhöhung der Verstärkung auf  $> 16$  sollte die Schaltung schwingen. Bei Rückkopplung von  $a_4$  auf den Eingang wird  $U_{a4}$  durch  $R_1$  noch etwas mehr gedämpft. Erforderliche Verstärkung  $R_2/R_1 \approx 22$ .

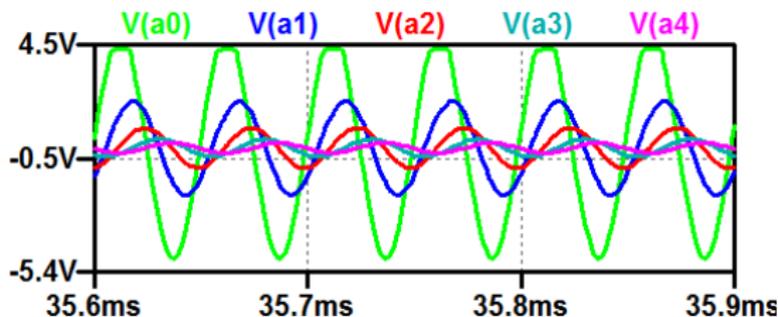




Genau genommen entsteht ein aufschwingendes Signal (Verstärkung mal Dämpfung  $> 1$ ), das ab einer bestimmten Amplitude durch die Versorgungsspannung begrenzt wird.



Durch die Begrenzung wird das Sinussignal verzerrt. Ein guter Sinusgenerator regelt, wenn die gewünschte Amplitude erreicht ist, die Verstärkung zurück.



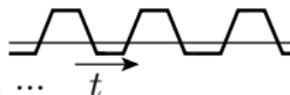


# Testsignale

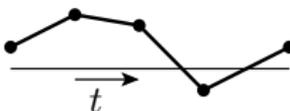
## Programmierung der Signalquellen

Außer Rechteck und Sinus können die Spannungs- und Stromquellen des Simulators weitere Signalformen bereitstellen.

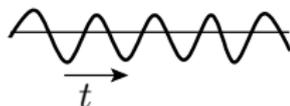
- periodische Pulse mit einstellbarer Einschalt-, Ausschalt-, Anstiegszeit, ...



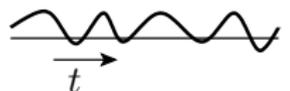
- stückweise lineare Verläufe mit Wert-Zeit-Punkten als Parameter



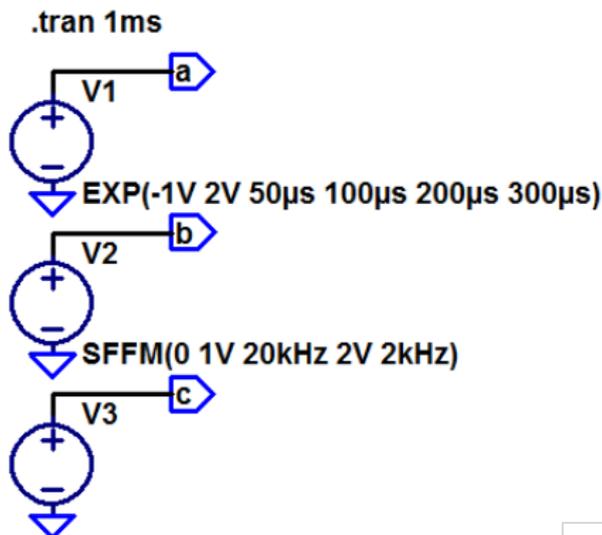
- Sinus mit einstellbarer Frequenz, Phasenverschiebung, Gleichanteil



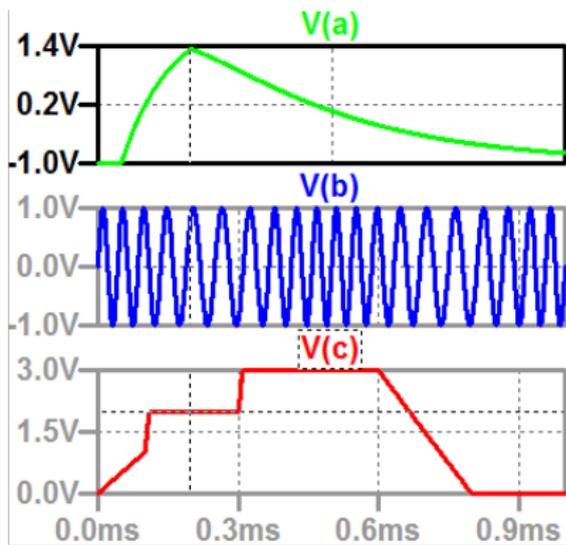
- Sinus mit zeitlich veränderlicher Frequenz, ... (frequenzmoduliert)



- Exponentialfunktion



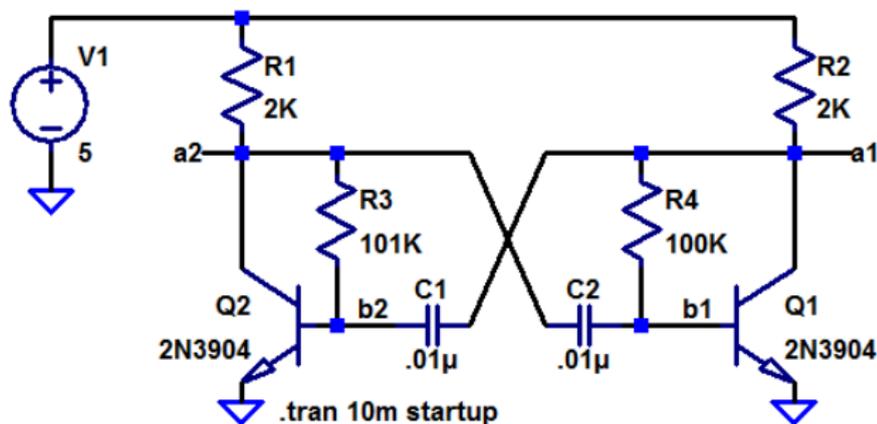
PWL(0 0 0.1ms 1V 0.11ms 2V 0.3ms 2V 0.31ms 3V 0.6ms 3V 0.8ms 0V)





# Aufgaben

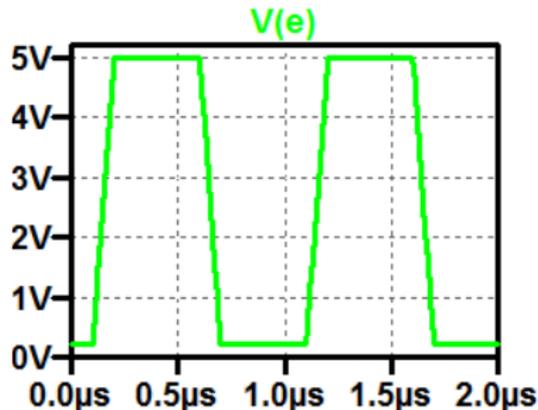
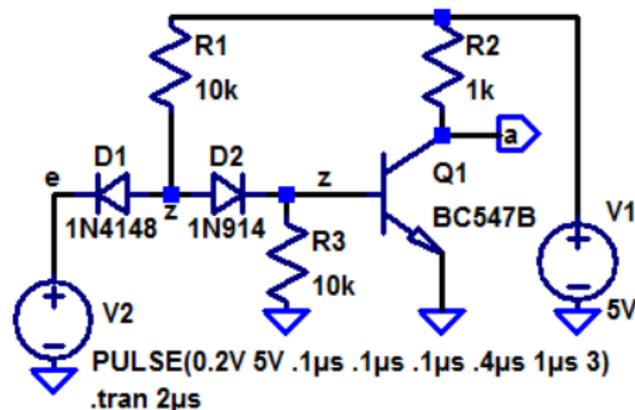
## Aufgabe 3.1: Multivibrator



Ändern Sie die Schaltung so ab, dass die Einschaltzeit 0,2 s und die Ausschaltzeit 0,8 s beträgt.

## Aufgabe 3.2: Inverterverzögerung

Bestimmen Sie für den nachfolgenden DT-Inverter die Signalverläufe von  $z$  und  $a$  sowie die Ein- und Ausschaltzeit für den gegebenen Eingabesignalverlauf.



(Die Verzögerungszeiten seien die Zeiten von einer 50%-igen Eingabe- zu einer 50%-igen Ausgabeänderung.)



## Aufgabe 3.3: Sinusgenerator

- 1 Ändern Sie die Kapazitäten des Phasenschiebeoszillators auf Folie 35 so, dass das erzeugte Ausgangssignal eine Frequenz von 1 kHz hat.
- 2 Stellen Sie über  $R_1$  die Verstärkung so ein, dass der Generator gerade noch anschwingt.
- 3 Überlegen Sie sich oder suchen Sie im Internet eine Schaltung, die über die Verstärkung die Sinusamplitude auf 2V einregelt.



# Frequenzbereich



### Frequenzbereich

Nach dem Überlagerungssatz ist bei einem linearen System die Systemantwort einer Summe von Eingangssignalen gleich der Summe der Systemantworten der Summanden.

Ein periodisches Zeitsignal lässt sich in eine Summe komplexer e-Funktionen zerlegen (Elektronik I, F7, Abschn. 1.1):

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \underline{X}_m \cdot e^{j \cdot m \cdot \omega \cdot t}$$

Für jeden Summanden  $\underline{X}_m \cdot e^{j \cdot m \cdot \omega \cdot t}$  verhalten sich Ableitung und Integral und damit auch Strom und Spannungen an Kapazität und Induktivität zueinander proportional:

$$\underline{X}_C = \frac{\underline{U}_C \cdot e^{j \cdot m \cdot \omega \cdot t}}{\underline{I}_C \cdot e^{j \cdot m \cdot \omega \cdot t}} = \frac{\underline{U}_C \cdot e^{j \cdot m \cdot \omega \cdot t}}{C \cdot \frac{d\underline{U}_C \cdot e^{j \cdot m \cdot \omega \cdot t}}{dt}} = \frac{1}{j\omega C}$$

$$\underline{X}_L = \frac{\underline{U}_L}{\underline{I}_L} = j\omega L$$



### 3. Frequenzbereich

$$\underline{X}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{I}_C} = \frac{1}{j\omega C}; \quad \underline{X}_L = \frac{\underline{U}_L}{\underline{I}_L} = j\omega L$$

( $\underline{I}$  und  $\underline{U}$  – komplexe Ströme und Spannungen<sup>3</sup>,  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$  – Kreisfrequenz;  $\varphi(\underline{X})$  – Phase von  $\underline{X}$ ;  $|\underline{X}|$  – Betrag von  $\underline{X}$ ).

#### Fakt 1

Die Schaltungsanalyse im Frequenzbereich berechnet die frequenzabhängigen Amplituden und Phasen der komplexen Ströme und Spannungen.

Die Bestimmung der Amplitudenänderung und Phasenverschiebung bei einem Sinus als Eingabe und die Berechnung der Schwingbedingung für Sinusoszillatoren ist im Frequenzraum viel einfacher als mit einer zeitdiskreten Simulation.

<sup>3</sup>Zeitunabhängige komplexe Faktoren mit Maßeinheit, die die Amplitude und Phase beschreiben.



## Gibt es imaginäre Ströme und Spannungen

In den Berechnungen für eine einzelne Frequenz ja. In Wirklichkeit gibt es imaginäre Ströme und Spannungen genauso wenig wie negative Frequenzen. Das ist kein Widerspruch. Die Summe für alle Frequenzen enthält für jedes  $\underline{X}(\omega) \cdot e^{j\omega t}$  immer ein konjugiert komplexes  $\underline{X}(-\omega) \cdot e^{-j\omega t}$ , für die in Summe gilt:

$$\begin{aligned}\underline{X}(\omega) \cdot e^{j\omega t} + \underline{X}(-\omega) \cdot e^{-j\omega t} &= 2 \cdot \Re(\underline{X}(\omega) \cdot e^{j\omega t}) \\ &= 2 \cdot |\underline{X}(\omega)| \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi(\underline{X}(\omega)))\end{aligned}$$

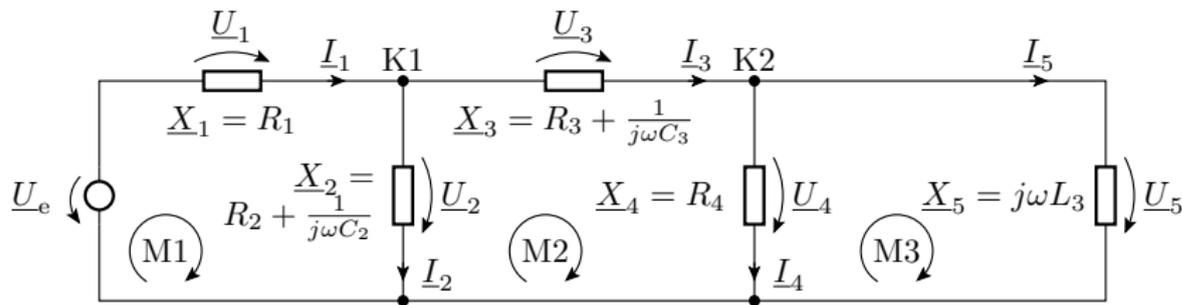
( $\varphi(\dots)$ – Phase;  $|\dots|$  – Betrag). Die konjugiert komplexen Strom- und Spannungsverläufe brauchen nicht berechnet zu werden. Sie existieren, weil imaginäre Ströme und Spannungen physikalisch nicht darstellbar sind. Der Faktor »2« kürzt sich bei den Strom- und Spannungsberechnungen genauso raus wie das » $e^{j\omega t}$ «.



# Frequenzgang

## Schaltungsanalyse im Frequenzraum

Die Knoten- und Maschengleichungen mit komplexen Widerständen führen auf ein lineares Gleichungssystem:



$$\begin{pmatrix}
 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\
 R_1 & \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right) & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right) & \left(R_3 + \frac{1}{j\omega C_3}\right) & R_4 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -R_4 & j\omega L_5
 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



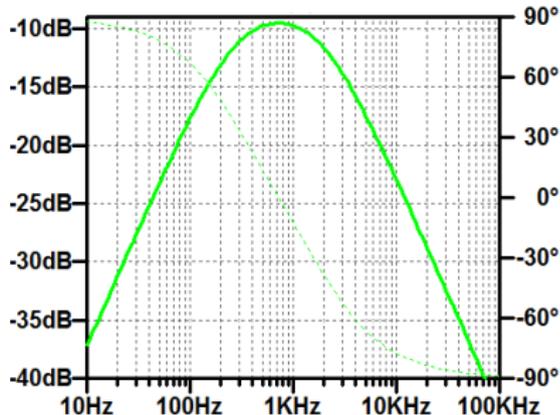
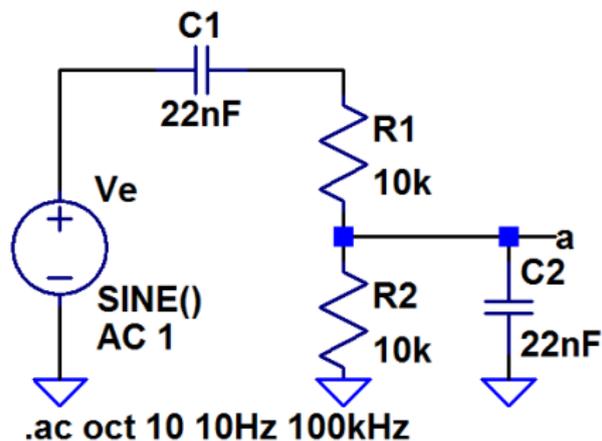
Die Auflösung des Gleichungssystems nach einer gesuchten Größe, z.B. einem komplexen Widerstand ist ein Bruch von Polynomen bezüglich  $j\omega$ :

$$\underline{X} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{a_0 + a_1 \cdot j\omega + \dots + a_Z \cdot (j\omega)^Z}{b_0 + b_1 \cdot j\omega + \dots + b_N \cdot (j\omega)^N}$$

( $Z$  – Grad des Zählerpolynoms;  $N$  – Grad des Nennerpolynoms) und wird als Frequenzgang der gesuchten Größe bezeichnet. Ein Frequenzgang besteht aus Phasen- und Amplitudenfrequenzgang.

### Bode-Diagramm

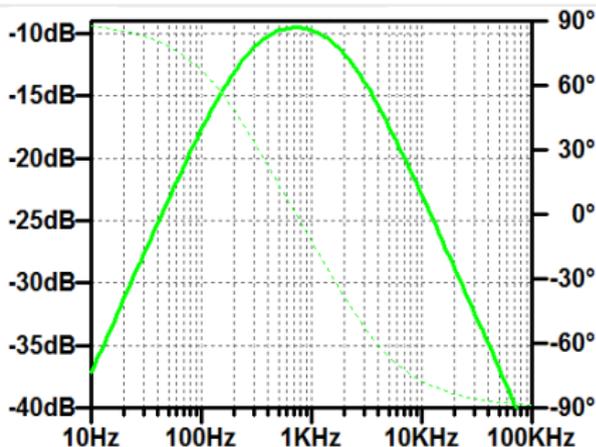
Gebräuchlichste Frequenzgangdarstellung. Doppellogarithmische Darstellung des Amplitudenfrequenzgangs in dB (Dezibel) und einfachlogarithmische Darstellung des Phasenfrequenzgangs.



$$\underline{U}_a = \frac{10\text{k}\Omega \parallel \frac{1}{j\omega \cdot 22\text{nF}}}{10\text{k}\Omega + \frac{1}{j\omega \cdot 22\text{nF}} + \left(10\text{k}\Omega \parallel \frac{1}{j\omega \cdot 22\text{nF}}\right)} \cdot 1\text{ V}$$



$$\begin{aligned}
 \underline{U}_a &= \frac{\left(10\text{k}\Omega \parallel \frac{1}{j\omega \cdot 22\text{nF}}\right) \cdot 1\text{V}}{10\text{k}\Omega + \frac{1}{j\omega \cdot 22\text{nF}} + \left(10\text{k}\Omega \parallel \frac{1}{j\omega \cdot 22\text{nF}}\right)} \\
 &= \frac{\frac{10\text{k}\Omega}{1+j\omega \cdot 0,22\text{ms}} \cdot 1\text{V}}{\frac{1+j\omega \cdot 0,22\text{ms}}{j\omega \cdot 22\text{nF}} + \left(\frac{10\text{k}\Omega}{1+j\omega \cdot 0,22\text{ms}}\right)} \\
 &= \frac{\frac{j\omega \cdot 0,22\text{ms}}{1+j\omega \cdot 0,22\text{ms}} \cdot 1\text{V}}{1+j\omega \cdot 0,22\text{ms} + \left(\frac{j\omega \cdot 0,22\text{ms}}{1+j\omega \cdot 0,22\text{ms}}\right)} \\
 &= \frac{j\omega \cdot 0,22\text{ms} \cdot 1\text{V}}{1+j\omega \cdot 0,66\text{ms} + (j\omega \cdot 0,22\text{ms})^2}
 \end{aligned}$$



Umrechnung zwischen Wert- und Dezibel-Angabe:

$$w = 10^{\frac{d}{20}}; \quad d = 20 \cdot \log_{10}(w)$$

( $w$  – Wertangabe;  $d$  – Dezibel-Angabe).

- Für  $\omega \ll \frac{1}{0,22\text{ms}}$  gilt näherungsweise  $\underline{U}_a \approx j\omega \cdot 0,22\text{ms} \cdot 1\text{V}$  (Phase  $+90^\circ$  und Amplitudenzunahme mit 20 dB je Dekade).
- Für  $\omega \gg \frac{1}{0,22\text{ms}}$  gilt näherungsweise  $\underline{U}_a \approx \frac{1\text{V}}{j\omega \cdot 0,22\text{ms}}$  (Phase  $-90^\circ$  und Amplitudenabnahme mit 20 dB je Dekade).



# Laplace-Transformierte

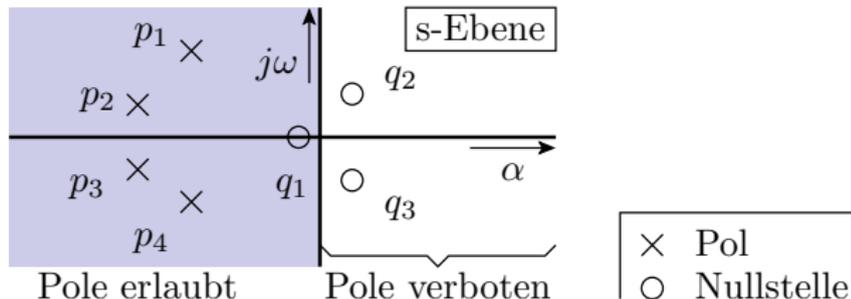


## Laplace-Transformierte, Pol-Nullstellen-Diagramm

In der Laplace-Transformation wird  $j\omega$  durch die komplexe Variable  $s$  ersetzt:

$$\underline{X} = \frac{a_0 + a_1 \cdot s + \dots + a_Z \cdot s^Z}{b_0 + b_1 \cdot s + \dots + b_N \cdot s^N} = \frac{a_0}{b_0} \cdot \frac{\left(1 - \frac{s}{q_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{s}{q_Z}\right)}{\left(1 - \frac{s}{p_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{s}{p_N}\right)}$$

Die gebrochenrationale Funktion bezüglich  $s$  lässt sich bis auf einen Skalierungsfaktor eindeutig durch ihre Pole  $p_i$  und Nullstellen  $q_i$  beschreiben.



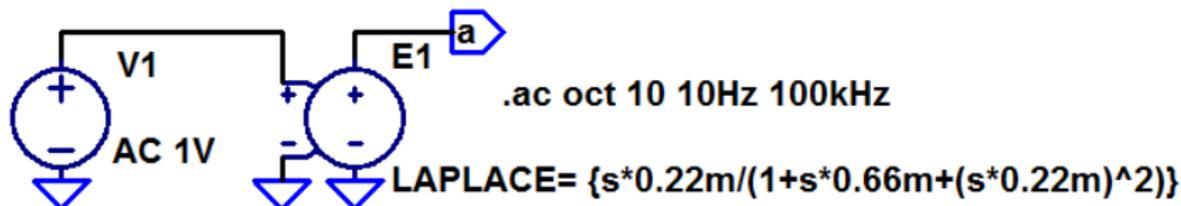


Aus den Abständen und Winkeln der Pole und Nullstellen zu einer Frequenz auf der Frequenzachse lassen sich Betrag und Phase abschätzen.

Konjugiert komplexe Pole in der rechten Halbebene zeigen Einschwingvorgänge und in der linken Halbebene abschwingende Vorgänge. Systeme mit Einschwingvorgängen sind instabil (schwingen von selbst). Signalverarbeitende Systeme dürfen nur Pole auf der linken Halbebene haben.

Der Frequenzgang gesteuerter Quellen kann direkt als Laplace-Transformierte einprogrammiert werden:

$$U_a = \frac{j\omega \cdot 0,22 \text{ ms} \cdot 1 \text{ V}}{1 + j\omega \cdot 0,66 \text{ ms} + (j\omega \cdot 0,22 \text{ ms})^2} \Rightarrow \frac{s \cdot 0,22 \text{ ms} \cdot 1 \text{ V}}{1 + s \cdot 0,66 \text{ ms} + (s \cdot 0,22 \text{ ms})^2}$$

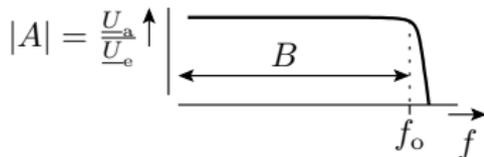
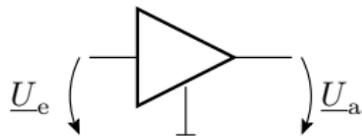




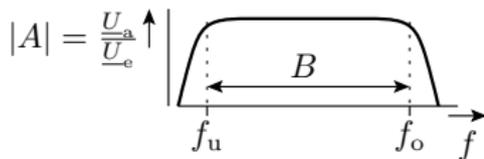
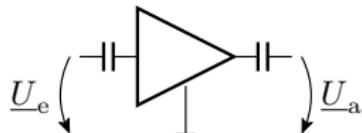
# Verstärker

## Frequenzgang von Verstärkern

Gleichspannungsverstärker



Wechselspannungsverstärker

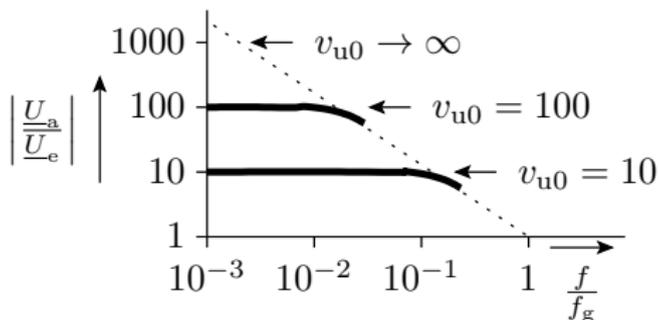
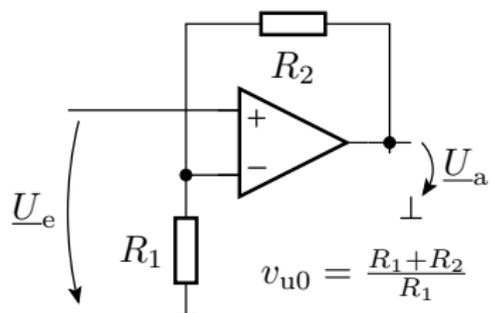


Ein Verstärker ohne induktive und kapazitive Beschaltung hat von  $f = 0$  bis nahe an die Übergangsfrequenz  $f_0$  eine betragsmäßig nahezu konstante Verstärkung  $|A|$ . Die Übergangsfrequenz ist die, bei der  $|A|$  auf  $1/\sqrt{2}$  abgefallen ist. Die Übergangsfrequenz ist gleichzeitig die Bandbreite  $B$ . Weitere Bandbegrenzung durch externe Beschaltung, z.B. kapazitive Kopplung, möglich.

## Rückgekoppelter Operationsverstärker

Frequenzgang ohne Rückkopplung:

$$\underline{v}_0 = \frac{U_a}{U_e} \approx -j \cdot \frac{f_T}{f}$$



Frequenzgang mit Rückkopplung:

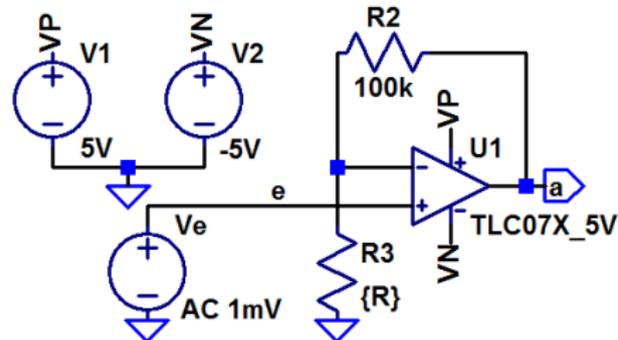
$$U_a = \frac{U_e}{\frac{1}{v_0} + \frac{R_1}{R_1 + R_2}} = \frac{v_{u0} \cdot U_e}{1 + j \cdot \frac{f}{f_{v0}}} \quad \text{mit } v_{u0} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}, \quad f_{v0} = \frac{f_T}{v_{u0}}$$



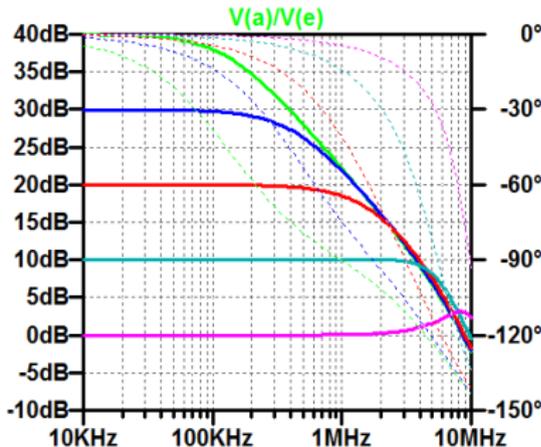
Eine Rückkopplung mindert die Verstärkung und erhöht die Übergangsfrequenz. Eine wichtige Kenngröße eines (Gleichspannungs-) Verstärkers ist sein Verstärkungs-Bandbreite-Produkt:

$$B \cdot v \approx f_T$$

( $B$ ,  $v$  – Bandbreite und Verstärkung des rückgekoppelten (Gleichspannungs-) Verstärkers;  $f_T$  – Transitfrequenz des nicht rückgekoppelten Verstärkers).



```
.include TLC074.mod
.ac oct 10 10kHz 1E7Hz
.step param R list 1.01k 3.27k 11.1k 46.2k 1E20k
```



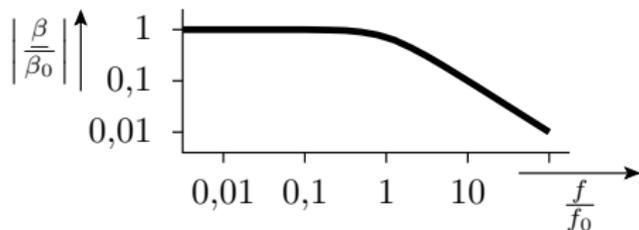
## Frequenzgang von Transistorverstärkern

Die Stromverstärkung eines Bipolartransistors nimmt für hohe Frequenzen umgekehrt proportional mit der Frequenz ab:

$$\underline{\beta} = \beta_0 \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \frac{f}{f_0}}$$

$\beta_0$  – Grundverstärkung

$f_0$  – Übergangsfrequenz



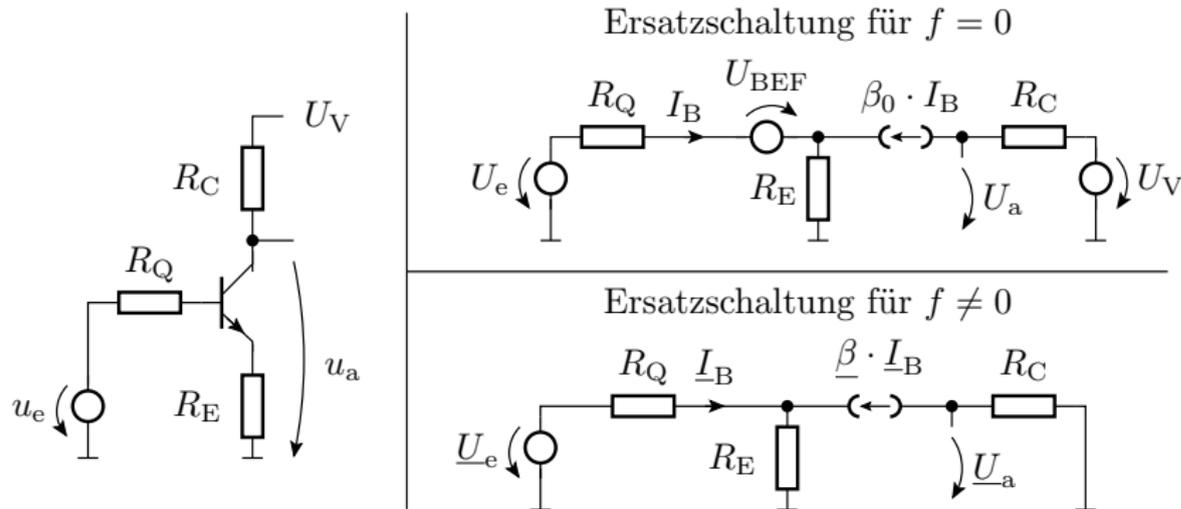
Für hohe Frequenzen  $f \gg f_0$  wie bei der Verstärkung von OV's:

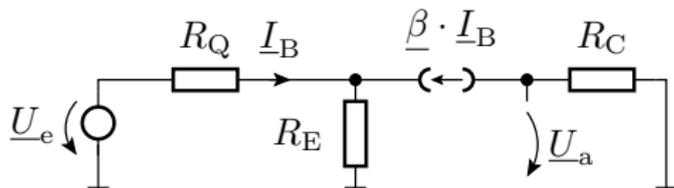
$$\underline{\beta} = \beta_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \frac{f}{f_0}} = -j \cdot \frac{\beta_0 \cdot f_0}{f} = -j \cdot \frac{f_T}{f}$$

$f_T = \beta_0 \cdot f_0$  – Transitfrequenz (Frequenz für  $|\underline{\beta}| = 1$ ).

## Emitterschaltung

Emitterschaltung mit einem Gegenkopplungswiderstand  $R_E$  und einer Signalquelle mit einem Quellenwiderstand  $R_Q$ . Aus der AC-Ersatzschaltung und dem Frequenzgang der Stromverstärkung ergibt sich der Frequenzgang des Gesamtverstärkers:





$$\underline{U}_e = (R_Q + R_E \cdot (1 + \underline{\beta})) \cdot \underline{I}_B$$

$$\underline{U}_a = -R_C \cdot \underline{\beta} \cdot \underline{I}_B$$

$$= -\frac{R_C \cdot \underline{\beta} \cdot \underline{U}_e}{R_Q + R_E \cdot (1 + \underline{\beta})}$$

$$= -\frac{R_C \cdot \underline{U}_Q}{(R_Q + R_E) \cdot \frac{1}{\underline{\beta}} + R_E}$$

$$\frac{1}{\underline{\beta}} = \frac{1}{\beta_0} + \frac{j \cdot f}{f_T}$$

$$\underline{U}_a = - \frac{R_C \cdot \underline{U}_e}{(R_Q + R_E) \cdot \left( \frac{1}{\beta_0} + \frac{j \cdot f}{f_T} \right) + R_E} = \frac{v_{U0} \cdot \underline{U}_e}{1 + \frac{j \cdot f}{f_{V0}}} \quad (1)$$

Für niedrige Frequenzen beträgt die Verstärkung:

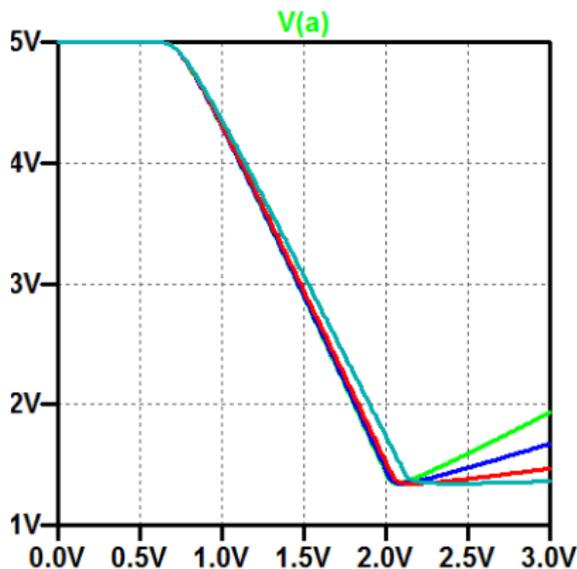
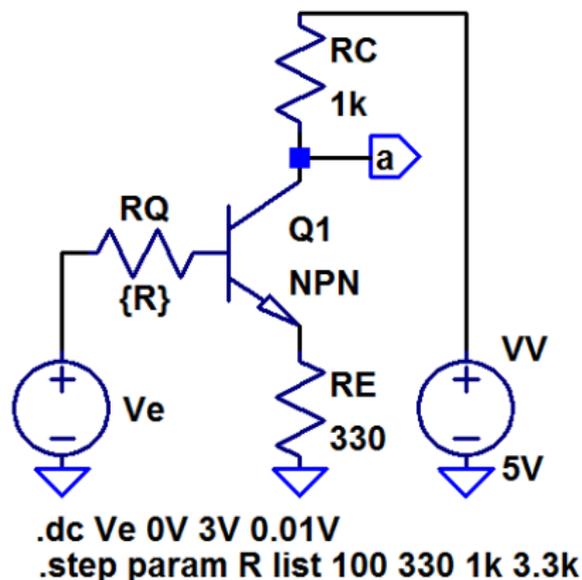
$$v_{U0} = - \frac{R_C}{(R_Q + R_E) \cdot \frac{1}{\beta_0} + R_E} \approx - \frac{R_C}{R_E}$$

Die Übergangsfrequenz der Spannungsverstärkung  $f_{V0}$ , bei der die Verstärkung auf das  $v_{U0}/\sqrt{2}$  abgesunken ist, beträgt:

$$f_{V0} = \frac{f_T \cdot \left( (R_Q + R_E) \cdot \frac{1}{\beta_0} + R_E \right)}{(R_Q + R_E)} \approx f_g \cdot \frac{R_E}{R_Q + R_E}$$

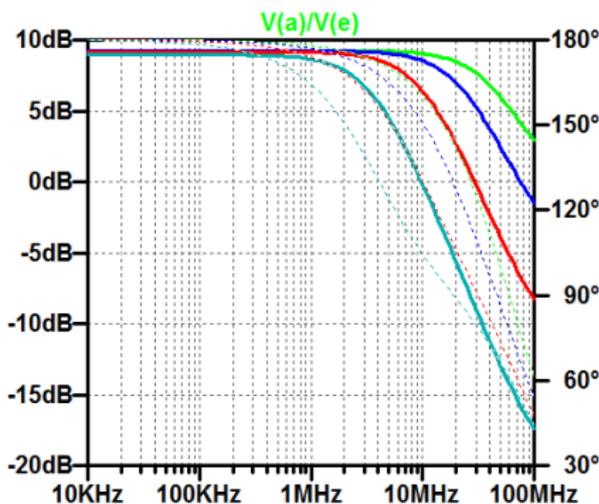
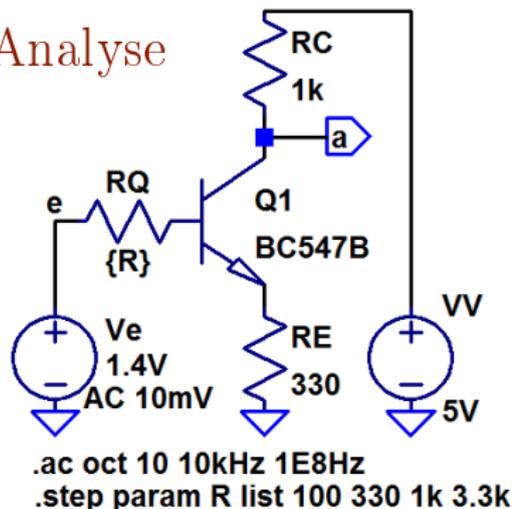
Für einen Quellenwiderstand  $R_Q \ll R_E$  ist die Übergangsfrequenz der Spannungsverstärkung nahe der Transitfrequenz der Stromverstärkung des Transistors. Für eine hochohmige Quelle ist die Übergangsfrequenz wesentlich geringer.

## DC-Analyse zur Arbeitspunktfestlegung



Der Widerstand  $R_Q$  hat im variierten Bereich von  $100 \Omega$  bis  $3,3 \text{ k}\Omega$  kaum Einfluss auf die Verstärkung. Ein guter Arbeitspunkt ist  $U_e = 1,4 \text{ V}$ .

## AC-Analyse

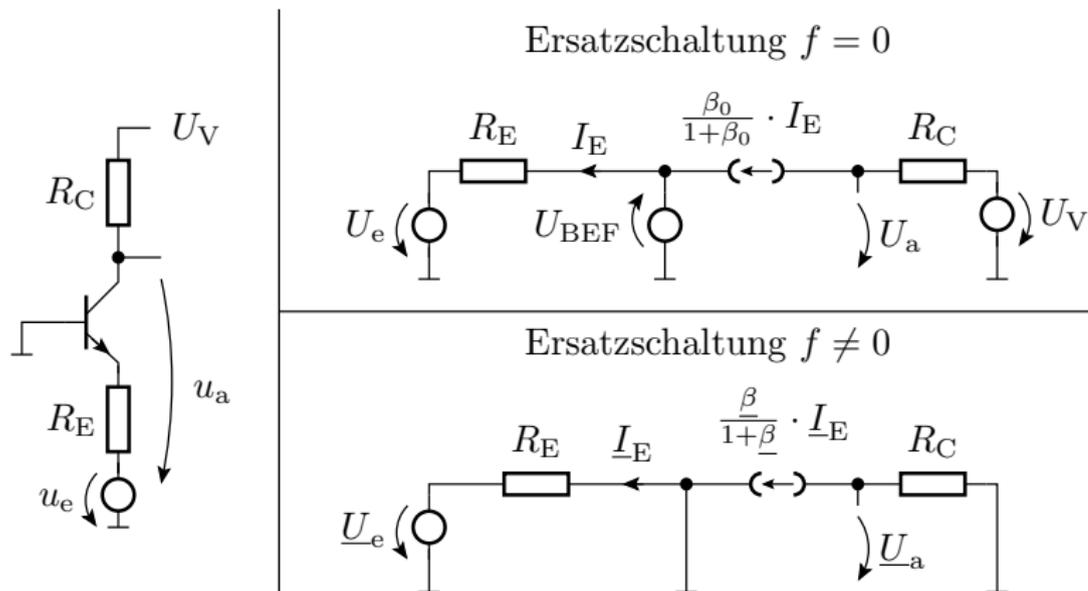


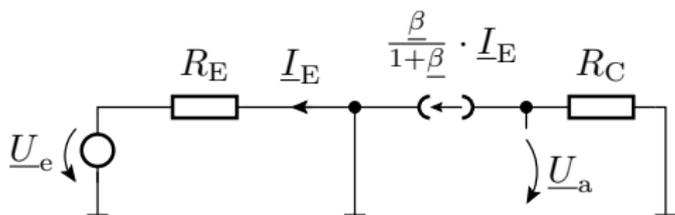
Die Verstärkung für niedrige Frequenzen ist wie vorhergesagt  
 $-\frac{R_C}{R_E} = \frac{1\text{k}\Omega}{330\Omega} = 3 \approx 9,5\text{ dB}$ . Erwartete Übergangsfrequenz ( $f_T$  -  
 Transitfrequenz der Stromverstärkung):

$R_Q$	100 $\Omega$	330 $\Omega$	1 k $\Omega$	3,3 k $\Omega$
$f_{V0} \approx f_T \cdot \frac{R_E}{R_Q + R_E}$	0,77 $\cdot f_T$	0,5 $\cdot f_T$	0,25 $\cdot f_T$	0,09 $\cdot f_T$

## Basisschaltung

Basis an Masse und Signaleinspeisung am Emitter. Transistorbeschaltung mit dem höchsten Verstärkungs-Bandbreite-Produkt:





$$\underline{I}_E = -\frac{\underline{U}_e}{R_E}$$

$$\underline{U}_a = -\frac{\beta \cdot R_C \cdot \underline{I}_E}{1 + \beta} = \frac{R_C \cdot \underline{U}_e}{R_E \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}$$

$$\underline{U}_a = \frac{R_C \cdot \underline{U}_e}{R_E \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta_0} + \frac{j \cdot f}{f_T}\right)} \approx \frac{R_C \cdot \underline{U}_e}{R_E \cdot \left(1 + \frac{j \cdot f}{f_T}\right)} = \frac{v_{U0} \cdot \underline{U}_e}{1 + \frac{j \cdot f}{f_{V0}}}$$

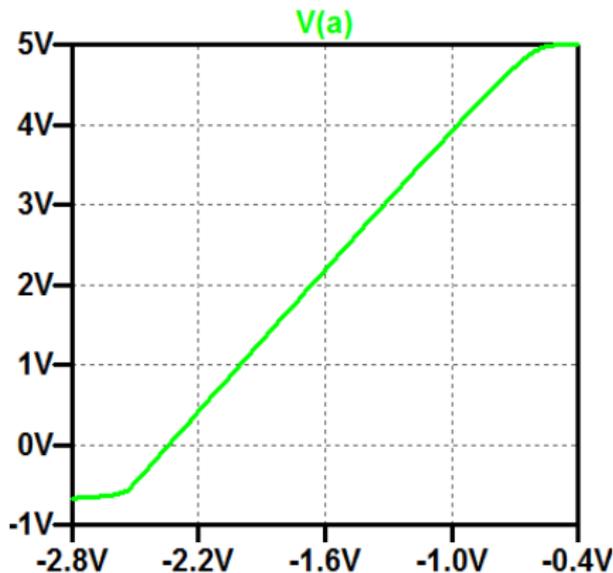
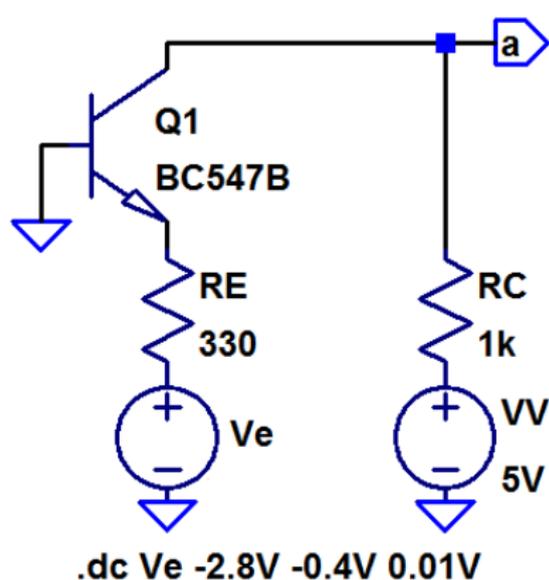
Die Verstärkung für niedrige Frequenzen beträgt:

$$v_{U0} = R_C / R_E$$

Die Übergangsfrequenz der Spannungsverstärkung  $f_{V0}$  (für  $v_{V0}/\sqrt{2}$ ) ist gleich der Grenzfrequenz der Stromverstärkung:

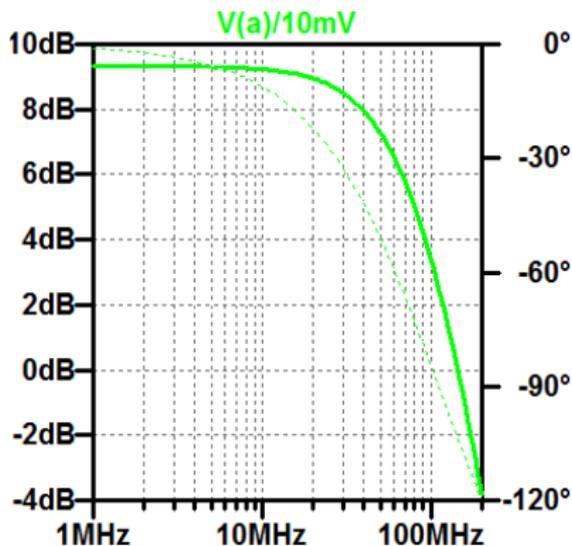
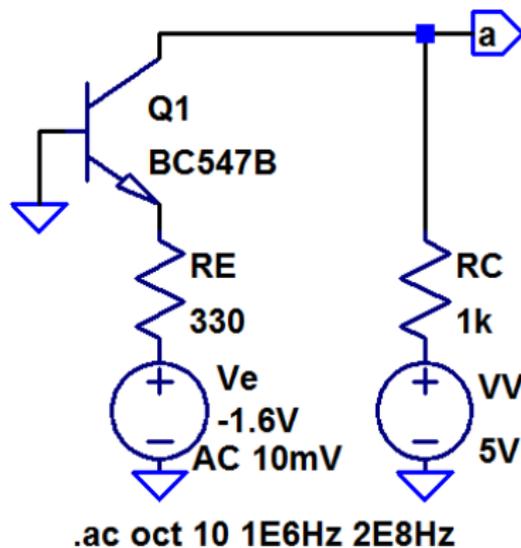
$$f_{V0} = f_T$$

## DC-Analyse zur Arbeitspunktfestlegung



Ein guter Arbeitspunkt ist  $U_e = -1,6 \text{ V}$ .

## AC-Analyse



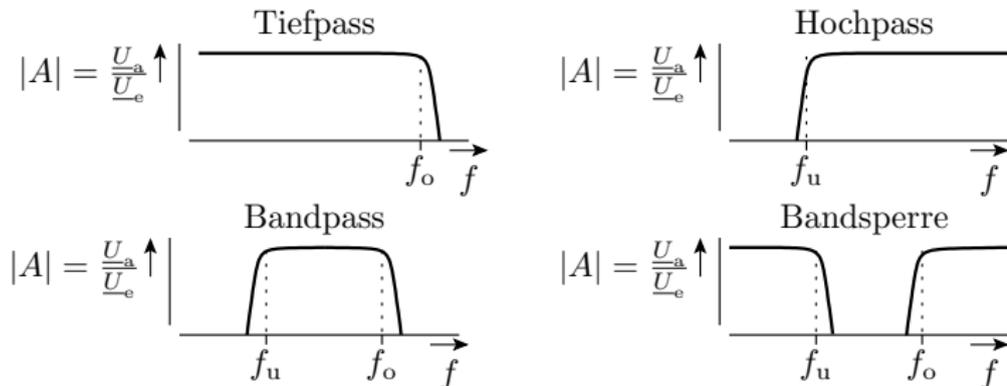
Der Betrag der Verstärkung ist wie bei der Emitterschaltung ca. 9 dB. Die Übergangsfrequenz der Schaltung und die Transitfrequenz des Transistors liegt bei etwa 80...90 MHz.



# Filter

## Filter

Filter sind Schaltungen mit einem bestimmten Phasen- und Frequenzgang:



Tiefpässe werden zur Bandbegrenzung unter die halbe Abtastfrequenz vor der digitalen Weiterverarbeitung benötigt. Die Entwürfe anderer Filter (Hochpässe, ...) werden auf Tiefpassentwürfe zurückgeführt. Entwurf im Laplace-Raum ( $\gg s \ll$  statt  $\gg j\omega \ll$ ).

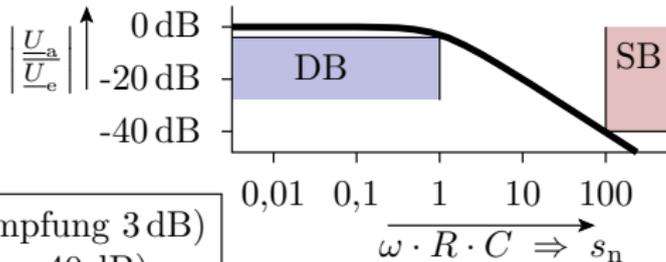
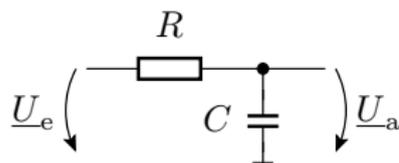
## Entwurf von Tiefpässen

Ein Tiefpass hat im Laplace-Raum die Übertragungsfunktion:

$$A(s_n) = \begin{cases} \frac{A_0}{(1+a_0 \cdot s_n) \cdot \prod_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} (1+a_i \cdot s_n + b_i \cdot s_n^2)} & \text{für ungerade } N \\ \frac{A_0}{\prod_{i=1}^{\frac{N}{2}} (1+a_i \cdot s_n + b_i \cdot s_n^2)} & \text{für gerade } N \end{cases}$$

( $N$  – Filtergrad;  $a_0, a_i, b_i$  – Filterkoeffizienten;  $s_n = \frac{s}{\omega_0}$  – normierte Frequenzvariable).

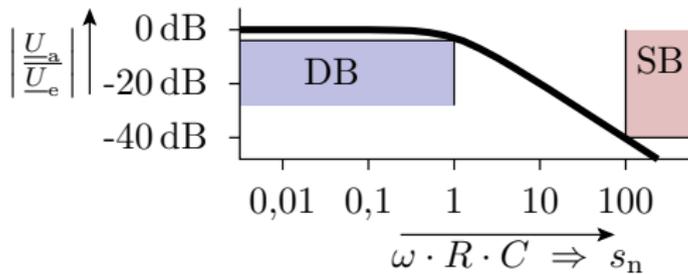
Der einfachste Tiefpass ist ein RC-Glied mit  $s_n \Rightarrow j\omega RC$ .



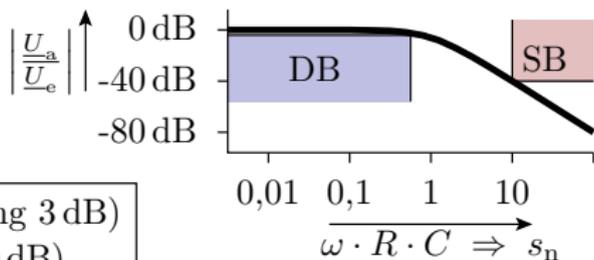
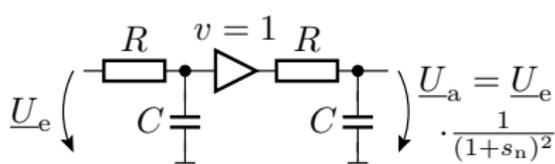
DB Durchlassband (max. Dämpfung 3 dB)  
 SB Sperrband (min. Dämpfung 40 dB)



$$\begin{aligned} \frac{U_a}{U_e} &= \frac{1}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} \\ &= \frac{U_e}{1 + j \cdot \omega \cdot R \cdot C} \\ &\Rightarrow \frac{1}{1 + s_n} \end{aligned}$$

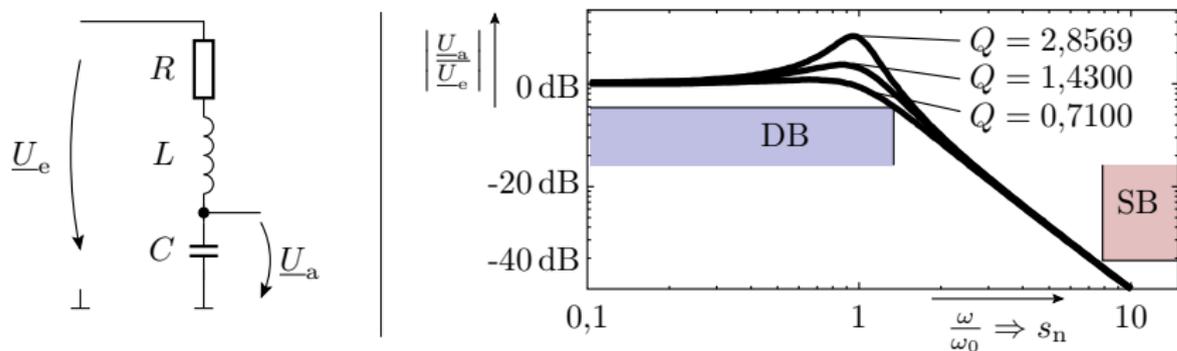


Bei geforderter Mindestdämpfung im Sperrband von 40 dB ist die Anfangsfrequenz des Sperrbands 100-mal so groß wie die obere Frequenz des Durchlassbands. Zur Digitalisierung müsste die Abtastfrequenz  $200 \cdot f_0$  sein. Abstandsverringering durch Erhöhung der Filterordnung  $N$  durch Verkettung von zwei RC-Gliedern.



DB	Durchlassband (max. Dämpfung 3 dB)
SB	Sperrband (min. Dämpfung 40 dB)

Besser ist die Verkettung mit einem Tiefpass 2. Ordnung mit zwei konjugiert komplexen Polen mit einem kleinen Buckel:



$$\begin{aligned} \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} &= \frac{1}{R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} = \\ &= \frac{1}{1 + j \cdot \frac{\omega}{Q \cdot \omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{1 + a \cdot s_n + b \cdot s_n^2} \end{aligned}$$

Verkettung bedeutet Addition der logarithmischen Beträge. Anschaulich müssen die Buckel für eine gute Durchlass-Sperrbandtrennung auf der Frequenzachse versetzt sein ( $b < 1$ ).

## Standard-Tiefpassentwürfe

$$A(s_n) = \begin{cases} \frac{A_0}{(1+a_0 \cdot s_n) \cdot \prod_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} (1+a_i \cdot s_n + b_i \cdot s_n^2)} & \text{für ungerade } N \\ \frac{A_0}{\prod_{i=1}^{\frac{N}{2}} (1+a_i \cdot s_n + b_i \cdot s_n^2)} & \text{für gerade } N \end{cases}$$

( $N$  – Filtergrad;  $a_0, a_i, b_i$  – Filterkoeffizienten;  $s_n$  – normierte Frequenzvariable). Für die Filterkoeffizienten  $a_0, a_i, b_i$  gibt es Tabellen. Der Filtertyp (Potenz-, Tschebyscheff-, ...) beschreibt die Form des Übergangs vom Sperr- zum Durchlassband. Cauer-Filter haben den steilsten Übergang und die größte Verzerrung<sup>4</sup>. Besselfilter haben im Durchlassbereich eine nahezu konstante Verzögerung (Gruppenlaufzeit), d.h. sie verzerren kaum. Dafür ist für denselben Abstand zwischen Durchlass- und Sperrband ein höherer Filtergrad erforderlich.

<sup>4</sup>Frequenzabhängige Unterschiede der Dämpfung und Verzögerung im Durchlassbereich.



## Bessel-Filter

Besselfilter haben konjugiert-komplexe Mehrfachpole:

$$A(s_n) = \begin{cases} \frac{A_0}{(1+a_0 \cdot s_n) \cdot (1+a \cdot s_n + b \cdot s_n^2)^{\frac{N-1}{2}}} & \text{für ungerade } N \\ \frac{A_0}{(1+a \cdot s_n + b \cdot s_n^2)^{\frac{N}{2}}} & \text{für gerade } N \end{cases}$$

Filtergrad ungerade

$n$	$a_0$	$a$	$b$
1	1,0000	-	-
3	0,5098	1,0197	0,2599
5	0,3856	0,7712	0,1487
7	0,3226	0,6453	0,1401
9	0,2829	0,5659	0,0801

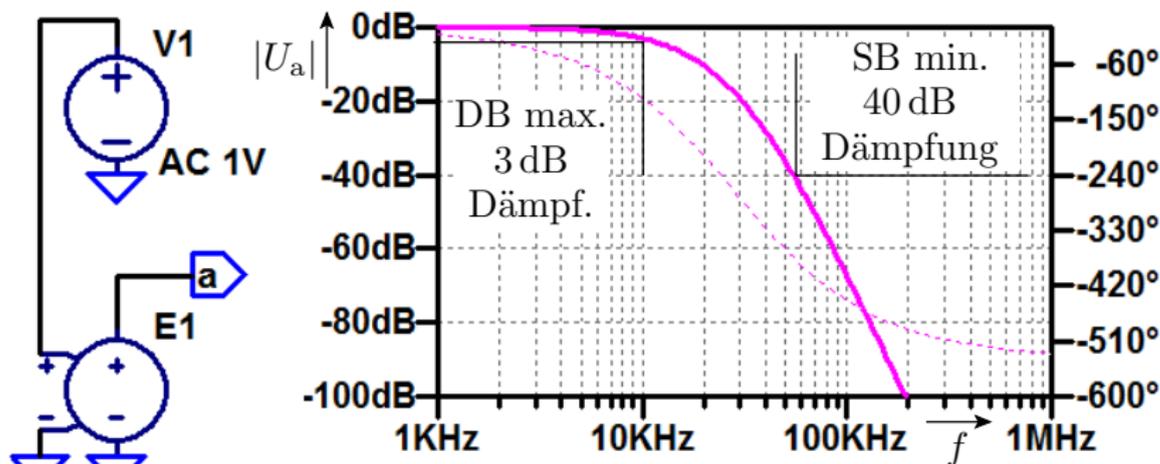
Filtergrad grade

$n$	$a$	$b$
2	1,2872	0,4140
4	0,8700	0,1892
6	0,6999	0,1225
8	0,6017	0,0905
10	0,5358	0,0718

( $N$  – Filtergrad;  $a_0$ ,  $a_i$ ,  $b_i$  – Filterkoeffizienten). Die verketteten Tiefpässe zweiter Ordnung sind identisch, d.h. im Gegensatz zu den anderen Filtertypen braucht man nur einen Tiefpass 2.

Ordnung zu entwerfen und verkettet davon mehrere.

## Simulation eines Besselfilter 6. Ordnung



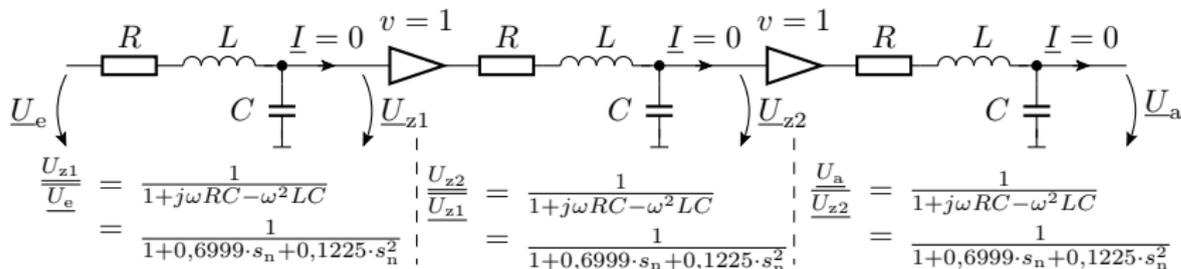
```
LAPLACE=1/(1+0.6999*s/{om0}+0.1225*(s/om0)^2)^3
```

```
.step param N 1 5 1
```

```
.ac oct 10 1kHz 100kHz .param om0=2*pi*10kHz
```

Das Durchlassband endet bei 10 kHz und das Sperrband fängt bei 50 kHz an.

## Entwurf als RLC-Filter



Restliche Berechnung über Koeffizientenvergleich:

$$s_n = \frac{j\omega}{2\pi \cdot 10 \text{ kHz}}$$

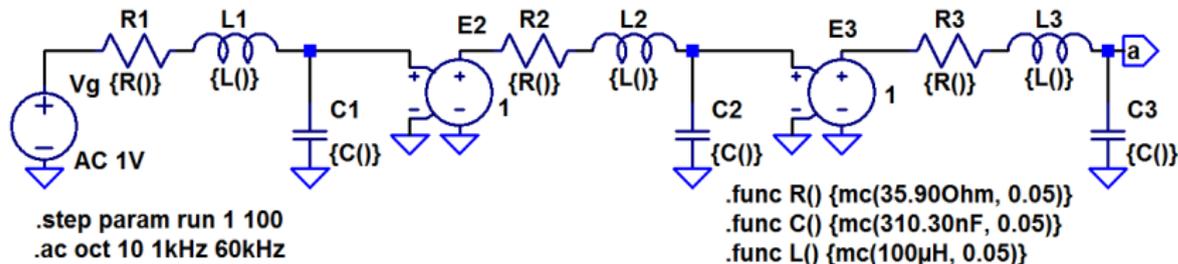
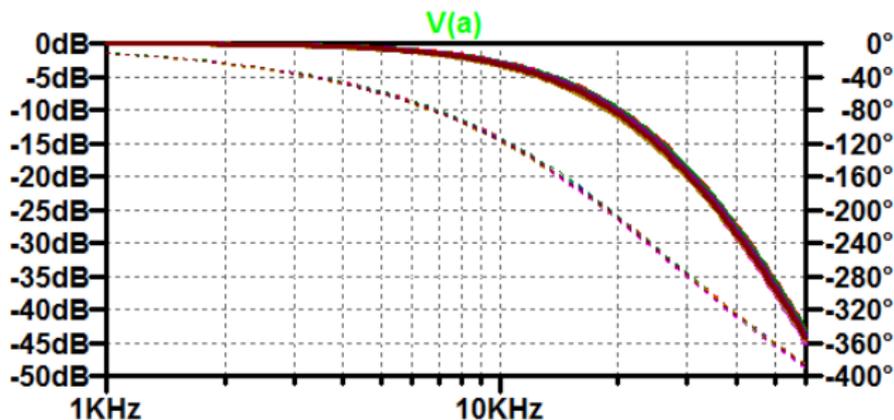
$$0,1225 \cdot \left( \frac{j\omega}{2\pi \cdot 10 \text{ kHz}} \right)^2 = -\omega^2 LC \quad C = \frac{31,03 \mu\text{s}^2}{L}$$

$$\frac{0,6999 \cdot j\omega}{2\pi \cdot 10 \text{ kHz}} = j\omega RC; \quad R = \frac{11,139 \mu\text{s}}{C}$$

Beispielwerte:  $L = 100 \mu\text{H}$ ,  $C = 310,30 \text{ nF}$  und  $R = 35,90 \Omega$

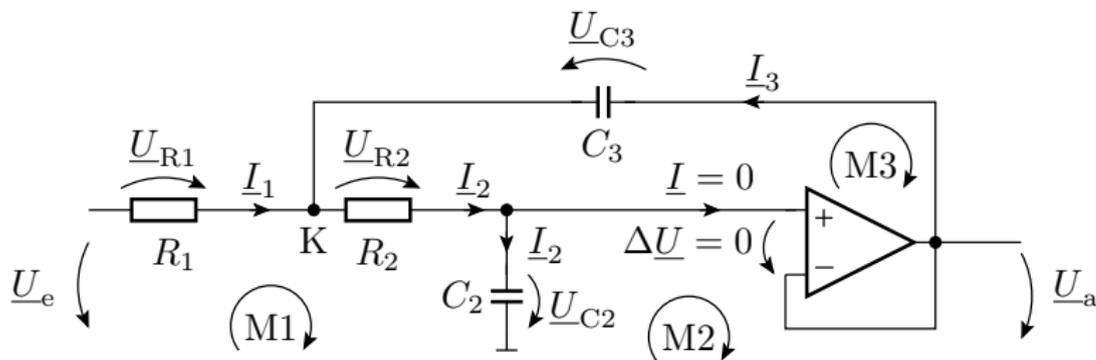


## Simulation



Die Funktionen  $R()$ ,  $C()$  und  $L()$  erzeugen Zufallswerte im Bereich  $\pm 5\%$  vom Nennwert. Die Step-Anweisung wiederholt die Simulation 100 mal.

## Entwurf mit Operationsverstärkern



$$\begin{aligned}
 \text{K :} & \quad I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\
 \text{M1 :} & \quad R_1 \cdot I_1 + \left( R_2 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_2} \right) \cdot I_2 = U_e \\
 \text{M2 :} & \quad -\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_2} \cdot I_2 + U_a = 0 \\
 \text{M3 :} & \quad -R_2 \cdot I_2 - \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C_3} \cdot I_3 = 0
 \end{aligned}$$



Auflösen nach  $\underline{U}_a = f(\underline{U}_e)$  durch eliminieren der 3 unbekanntenen Ströme:

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{1}{1 + j\omega \cdot C_2 \cdot (R_1 + R_2) - \omega^2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot C_2 \cdot C_3} = \frac{1}{1 + a_i \cdot s_n + b_i \cdot s_n^2}$$

Unter Vorgabe von  $C_1$  und  $C_2$  betragen die Widerstände:

$$R_{1/2} = \frac{a \cdot C_2 \mp \sqrt{a^2 \cdot C_2^2 - 4 \cdot b \cdot C_1 C_2}}{4\pi \cdot f_0 \cdot C_1 C_2}$$

Damit der Wert unter der Wurzel positiv ist:

$$\frac{C_2}{C_1} \geq \frac{4 \cdot b}{a^2} = \frac{4 \cdot 0,1225}{0,6999^2} = 1 \Rightarrow C_2 = C_1 = C$$

Mit den Bessel-Koeffizienten wird der Ausdruck unter der Wurzel genau für  $C_2 = C_1 = C$  null. Damit werden auch beide Widerstände gleich:

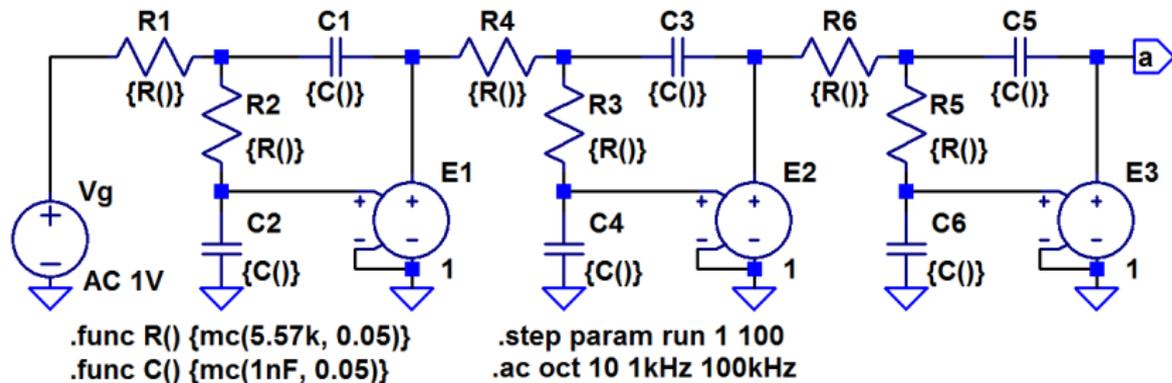
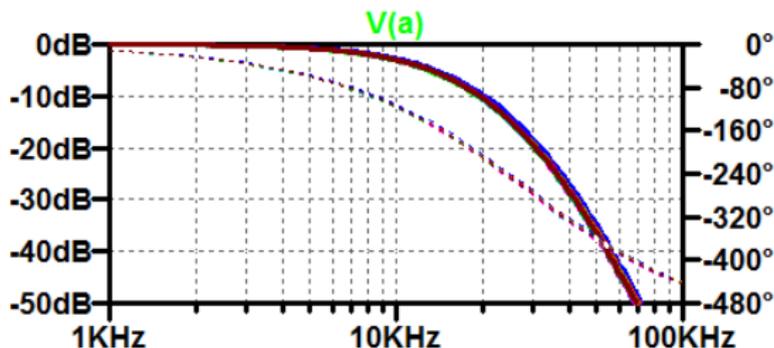
$$R_1 = R_2 = \frac{a}{4 \cdot \pi \cdot 10 \text{ kHz} \cdot C} = \frac{0,6999}{4 \cdot \pi \cdot 10 \text{ kHz} \cdot C} = \frac{5,5696 \mu\text{s}}{C}$$

Beispielwerte:  $C = C_1 = C_2 = 1 \text{ nF}$  und

$$R = R_1 = R_2 = 5,5696 \text{ k}\Omega.$$



## Simulation



Die rückgekoppelten Operationsverstärker sind durch gesteuerte Spannungsquellen mit Verstärkung eins ersetzt.



## Hochpass und Bandpass

Tiefpass-Hochpass-Transformation: Ersatz  $s_n \mapsto 1/s_n$ . Als Beispiel unser Besselfilter 6. Ordnung

$$A_{\text{TP}}(s_n) = \frac{1}{(1 + 0,6999 \cdot s_n + 0,1225 \cdot s_n^2)^3}$$

Korrespondierender Hochpass:

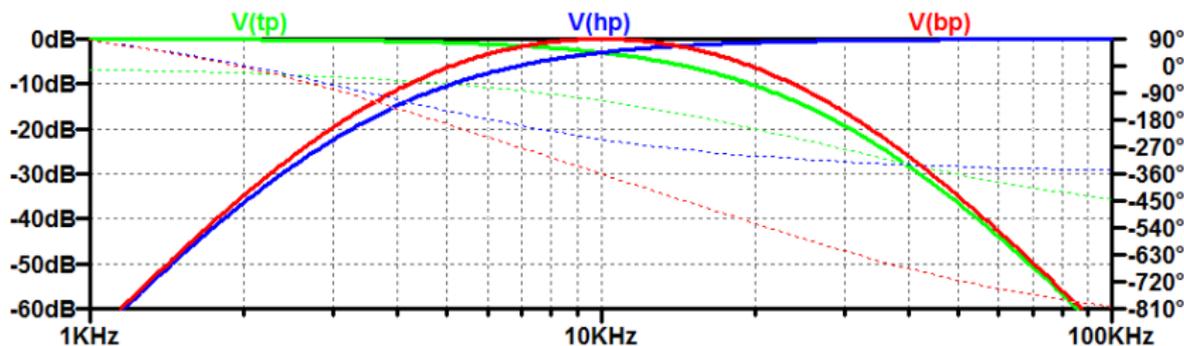
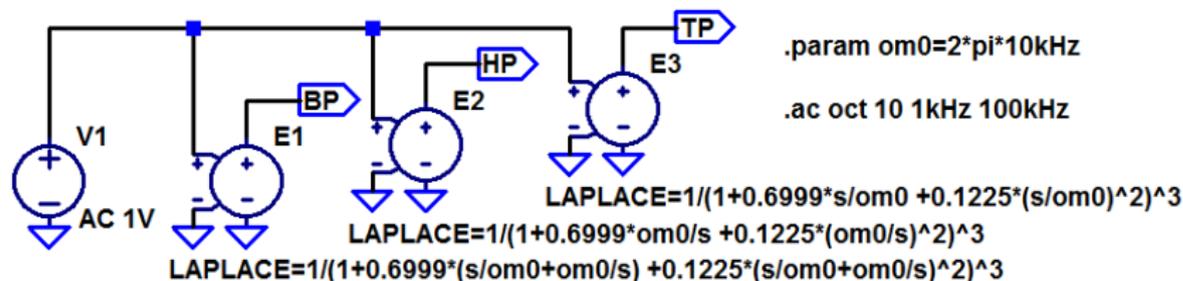
$$A_{\text{HP}}(s_n) = \frac{1}{\left(1 + 0,6999 \cdot \frac{1}{s_n} + 0,1225 \cdot \frac{1}{s_n^2}\right)^3}$$

Tiefpass-Bandpass-Transformation: Ersatz  $s_n \mapsto \frac{1}{\Delta\omega_n} \cdot \left(s_n + \frac{1}{s_n}\right)$   
 ( $\Delta\omega_n$ – relative Breite des Durchlassband. Als Beispiel unser Besselfilter 6. Ordnung mit einer relativen Bandbreite  $\Delta\omega_n = 1\%$ :

$$A_{\text{BP}}(s_n) = \frac{1}{\left(1 + \frac{0,6999}{\Delta\omega_n} \cdot \left(s_n + \frac{1}{s_n}\right) + \frac{1,225}{\Delta\omega_n^2} \cdot \left(s_n + \frac{1}{s_n}\right)^2\right)^3}$$



## Simulation von Tief-, Hoch- und Bandpass





# Aufgaben



## Aufgabe 3.4: Frequenzgang schätzen

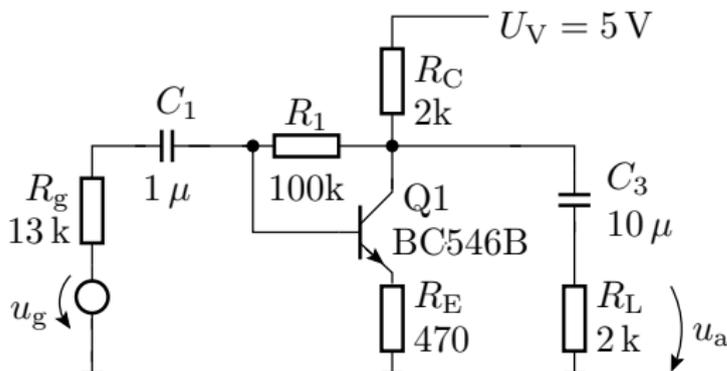
Gegeben ist die komplexe Übertragungsfunktion eines Verstärkers:

$$\underline{v} = \frac{1 + \frac{j \cdot f}{10 \text{ Hz}}}{\left(1 + \frac{j \cdot f}{1 \text{ kHz}}\right) \cdot \left(1 + \frac{j \cdot f}{100 \text{ kHz}}\right)}$$

- 1 Schätzen Sie Betrag und Phase für die Frequenzen 1 Hz, 10 Hz, 100 Hz, 1 kHz, 10 kHz, 100 kHz, 1 MHz mit der Näherung, dass der Realteil, wenn er kleiner als 20% des Imaginärteils ist und umgekehrt, vernachlässigt werden kann.
- 2 Wie lautet die Laplace-Transformierte des Frequenzgangs?
- 3 Simulieren Sie den Frequenzgang mit einer spannungsgesteuerten Spannungsquelle und stellen Sie ihn als Bode-Diagramm dar.

## Aufgabe 3.5: Frequenzgang Transistorverstärker

Bestimmen Sie für die nachfolgenden Schaltung das Bode-Diagramm der Übertragungsfunktion  $\frac{U_a}{U_g}$ :



- 1 Wie hoch ist die Verstärkung in der Mitte des Durchlassbands?
- 2 Wie groß sind die untere und obere Grenzfrequenz, bei denen die Verstärkung um 3 dB abgefallen ist?



## Aufgabe 3.6: Frequenzgang der Strom- und Spannungsverstärkung

Lassen Sie sich zur Überprüfung, dass die Übergangsfrequenz der Spannungsverstärkung tatsächlich  $\beta$ -mal so hoch wie die der Stromverstärkung ist, im Bode-Diagramm auf Folie 69 zusätzlich die Stromverstärkung als Verhältnis von Kollektor zu Basisstrom anzeigen.

Hinweis: Die Übergangsfrequenz der Stromverstärkung ist mehr als zwei Zehnerpotenzen kleiner als die der Spannungsverstärkung. Lassen Sie den simulierten Frequenzbereich bei 10 kHz beginnen.



## Aufgabe 3.7: Butterworth-Filter

Ein normierter Butterworth-Tiefpass 4.Ordnung hat im Laplace-Raum die Übertragungsfunktionen:

$$A(s_n) = \frac{1}{(1 + 1,8476 \cdot s_n + s_n^2) \cdot (1 + 0,7654 \cdot s_n + s_n^2)}$$

Stellen Sie die Laplace-Transformierten auf für

- einen Tiefpass mit der Übergangsfrequenz 1 kHz und
- einen Hochpass mit der Übergangsfrequenz von 100 Hz.

Simulieren Sie beide Filter mit einer spannungsgesteuerten Spannungsquelle.



# Spektralanalyse



### Das Spektrum eines Signals

Die Analyse im Frequenzraum bestimmt für einen vorgegebenen Frequenzbereich die Amplitudenskalierung (Verstärkung/Dämpfung) und die Phasenverschiebung von komplexen e-Funktionen bzw. Kosinustermen als Signale.

Voraussetzung ist Linearität. Vorgelagerte bzw. weitergehende Fragestellungen:

- Welche Spektralanteile enthält ein Signal?
- Was passiert, wenn das System sich nur näherungsweise linear verhält.

Die Antworten liefert die Spektralanalyse.



# Fouriertransformation



## Fouriertransformation

Jedes bandbegrenzte periodische Signal lässt sich als Summe komplexer Exponentialterme darstellen ( $N$  sei gerade):

$$x(t) = \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \underline{X}(m) \cdot e^{j \cdot m \cdot \omega_0 \cdot t}$$

( $\omega = 2\pi \cdot f$  – Kreisfrequenz;  $\omega_0$  – Grundkreisfrequenz;  $f_0 = 1/T$  – Grundfrequenz des Signals;  $T$  – Periode des Signals;  $(\frac{N}{2} - 1) \cdot f_0$  – höchste Frequenz, für die der Spektralwert  $\neq 0$  sein darf). Die Faktoren  $\underline{X}(m)$  vor den Zeitfunktionen » $e^{j \cdot m \cdot \omega_0 \cdot t}$ « bilden das Spektrum. Jeder Spektralwert  $\underline{X}(m)$  beschreibt Amplitude und Phasenverschiebung eines Spektralanteils.

Die Berechnung der  $N$  Spektralwerte erfordert  $N$  (äquidistante) Zeitwerte. Damit lässt sich ein lineares Gleichungssystem aus  $N$  unabhängigen Gleichungen mit  $N$  Unbekannten aufstellen und lösen. FFT schnelles numerisches Lösungsverfahren.

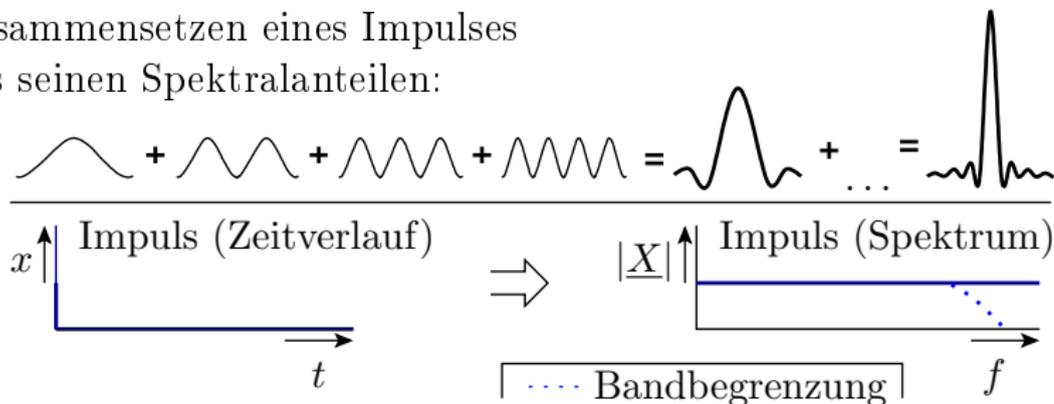
## Spektren nicht periodischer Signale

Das Spektrum eines nicht periodischen Signals ergibt sich durch den Grenzwertübergang der Anzahl der Abtastpunkte je Periode  $N \rightarrow \infty$ . Beispiel Impuls. Erster Abtastwert  $A \cdot N$ , alle anderen null:

$$x(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \begin{cases} A \cdot N & n = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

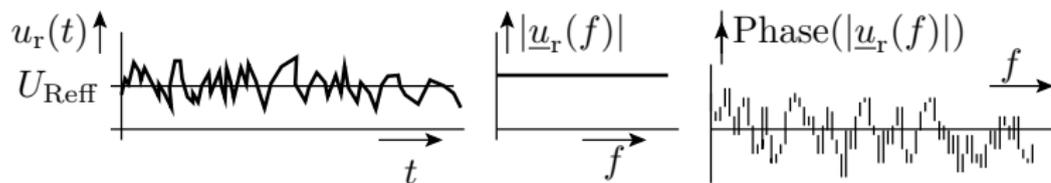
Spektralwerte aller Frequenzindizes:  $\underline{X}(m)|_{m \in G} = A$ .

Zusammensetzen eines Impulses  
aus seinen Spektralanteilen:





Die aufsummierten Kosinussignale für den Impuls haben alle dieselbe Amplitude und Phase null. Konstante Amplitude für alle Frequenzen hat auch ein ganz anderes Zeitsignal, das sog. weiße Rauschen, das sich aus vielen kleinen Impulsen zu zufälligen Zeitpunkten zusammensetzt (siehe später Folie 113).



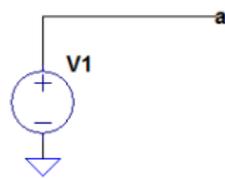
Das Amplitudenspektrum allein reicht nicht für einen eindeutige Signalbeschreibung.

In der Praxis werden Spektren meist aus Abtastfolgen berechnet, die nicht genau eine Signalperiode lang sind, überlagert von einem Quantisierungsrauschen. Das sich dabei typisch ergebende Amplitudenspektrum besteht aus einem Grundrauschen und Peaks für die periodischen Anteile.

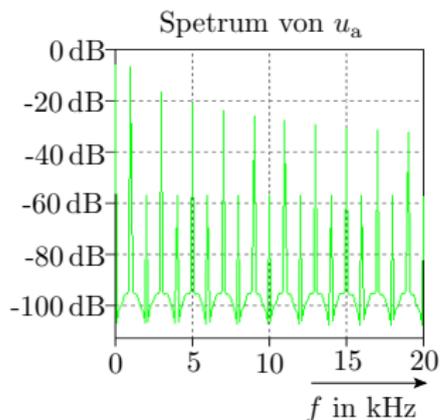
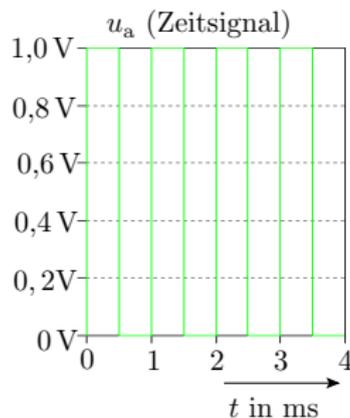


## Berechnung des Spektrums mit LTSpice

Das Spektrum kann für jedes bei der Simulation aufgezeichnete Signal berechnet und angezeigt werden. Menü: »view«, »fft«, Auswahl des Signals. Im Beispiel symmetrisches Rechtecksignal. Signifikante Spektralanteile bei  $f_0 = 1$  kHz und den ungeradzahigen Vielfachen. Unter 90 dB ist Grundrauschen. Die Ursachen der schwachen geradzahigen Oberwellen wären noch zu untersuchen.



```
PULSE(0 1 0 1u 1u 0.5m 1m)
.four 1kHz 10 V(a)
.option plotwinsize=0
.tran 10ms
```





Mit der zusätzlichen Spice-Anweisung

```
.four 1kHz 10 V(a)
```

werden die Spektralwerte, im Beispiel für die 1kHz-Grundwelle und 9 Oberwellen, berechnet und im ErrLog-File incl. Phase dargestellt:

Harmonic Number	Frequency [Hz]	Fourier Component	Normalized Component	Phase [degree]	Normalized Phase [deg]
1	1.000e+03	6.366e-01	1.000e+00	-0.36°	0.00°
2	2.000e+03	2.000e-03	3.142e-03	89.28°	89.64°
3	3.000e+03	2.122e-01	3.333e-01	-1.08°	-0.72°
4	4.000e+03	2.000e-03	3.141e-03	88.56°	88.92°
5	5.000e+03	1.273e-01	2.000e-01	-1.80°	-1.44°
6	6.000e+03	2.000e-03	3.141e-03	87.84°	88.20°
7	7.000e+03	9.092e-02	1.428e-01	-2.52°	-2.16°
8	8.000e+03	2.000e-03	3.141e-03	87.12°	87.48°
9	9.000e+03	7.070e-02	1.111e-01	-3.24°	-2.88°
10	1.000e+04	1.999e-03	3.141e-03	86.40°	86.76°

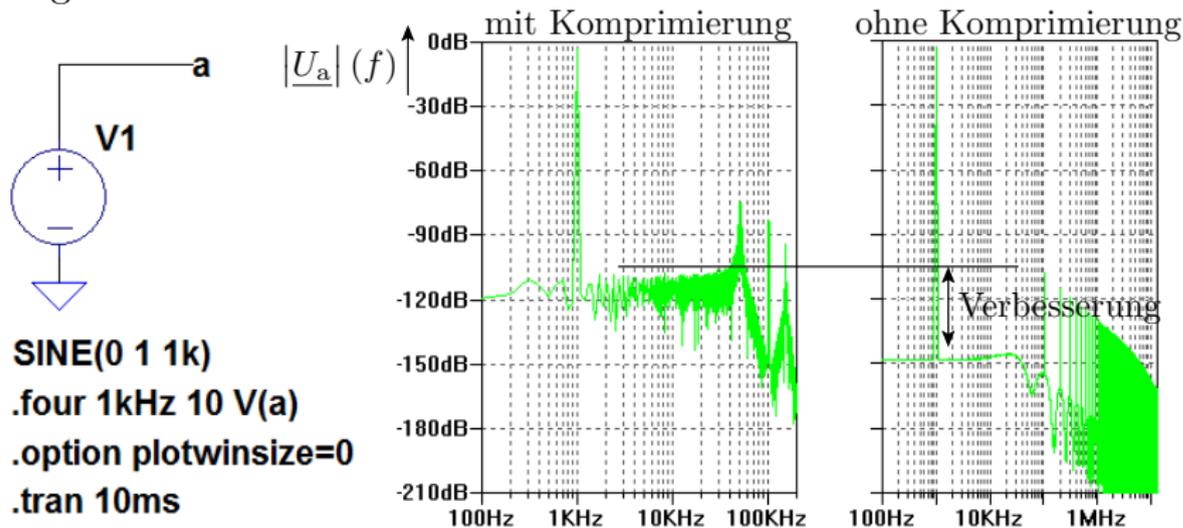
Die Option

```
.option plotwinsize=0
```

deaktiviert die Datenkomprimierung des Zeitsignals. Die



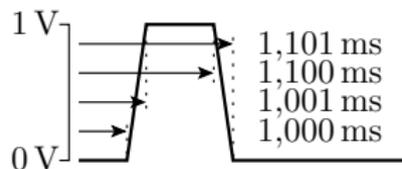
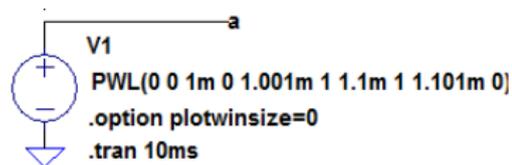
Das Spektrum eines Sinussignals sollte nur für eine Frequenz ungleich null sein.



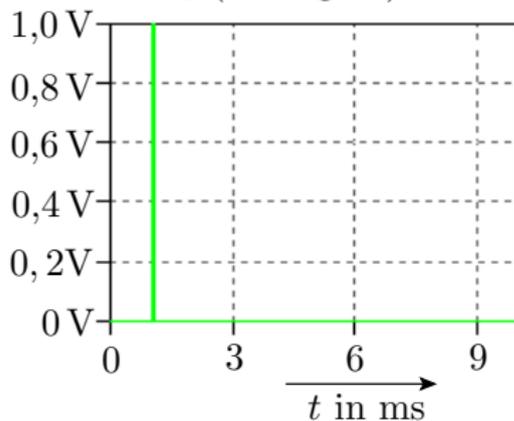
Für das komprimierte Zeitsignal (ohne »option plotwinsize=0«) sind die berechneten Spektralwerte für  $f \neq 1 \text{ kHz}$ , die null sein müssten, etwa 30 dB größer als ohne Komprimierung<sup>5</sup>.

<sup>5</sup>Quelle und weitere Genauigkeitsverbesserung: <http://www.audio-perfection.com/spice-ltspice/distortion-measurements-with-ltspice.html>

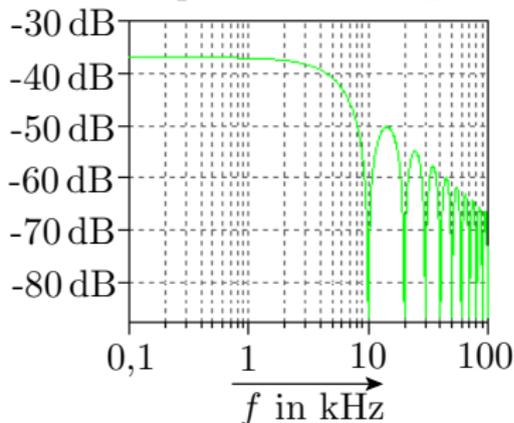
## Das Spektrum eines Impulses



$u_a$  (Zeitsignal)



Spektrum von  $u_a$



Für  $f < \frac{1}{2\pi \cdot t_{\text{Puls}}} = 1,6 \text{ kHz}$  ( $t_{\text{Puls}}$  – Pulsbreite)  $|\underline{U}_a| = \text{konst.}$



## Klirrfaktor



## Spektrum und Nichtlinearität

Die Analyse im Frequenzbereich setzt Linearität voraus. Für ein im Arbeitspunkt  $x_0$  linearisiertes System werde die quadratischen, kubischen etc. Terme der Taylor-Reihe vernachlässigt:

$$f(x-x_0) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x-x_0)}_{\text{lineare Näherung}} + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n}_{\text{vernachlässigte nichtlineare Anteile}} + \dots$$

Ein Spektralwert  $\underline{X}$  beschreibt ein skaliertes und phasenverschobenes Kosinussignalen:

$$|\underline{X}| \cdot \cos(\omega t + \varphi(\underline{X}))$$

Was passiert, wenn ein Kosinussignal mit  $n$  potenziert wird?

- Es entstehen Spektralanteile mit der 2 bis  $n$ -fachen Frequenz.

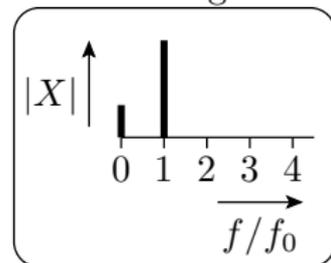
Was entsteht, wenn eine Summe von Kosinussignalen mit  $n$  potenziert wird?

- Spektralanteile mit Summen- und Differenzfrequenzen.

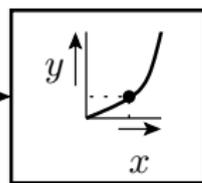
- Die  $n$ -te Potenz eines Kosinussignal lässt sich in eine Summe von Kosinussignalen mit bis zur  $n$ -fachen Frequenz darstellen:

$$\cos(\omega t)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos((n-2k) \cdot \omega \cdot t) \quad (2)$$

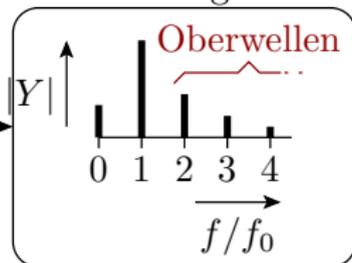
Amplitudenspektrum der Eingabe



nichtlineares System



Amplitudenspektrum der Ausgabe



- Die erzeugten Spektralanteile mit Vielfachen der Frequenz werden als Oberwellen bezeichnet.



Herleitung Gleichung 2:

$$\cos(\omega t)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos((n-2k) \cdot \omega \cdot t)$$


---

$$\cos(\omega \cdot t)^n = \frac{1}{2} \cdot (e^{j \cdot \omega \cdot t} + e^{-j \cdot \omega \cdot t})^n$$

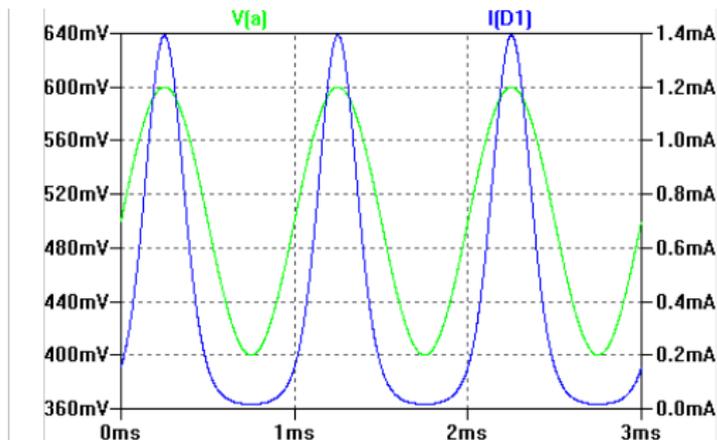
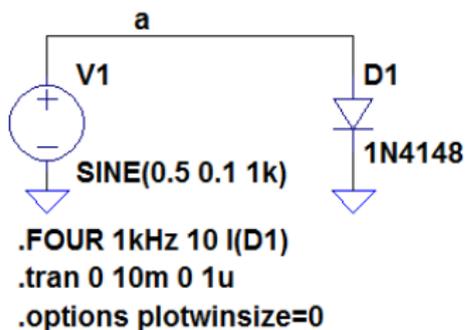
Nach dem Binomischen Lehrsatz:

$$(e^{j \cdot \omega \cdot t} + e^{-j \cdot \omega \cdot t})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \underbrace{e^{j \cdot \omega \cdot t \cdot (n-k)} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t \cdot k}}_{e^{j \cdot \omega \cdot t \cdot (n-2k)}}$$

Summe enthält paarweise konjugiert komplexe Terme, z.B für  $n = 4$ :

$k$	0	1	2	3	4
Exponent: $n - 2k$	4	2	0	-2	-4
$\binom{n}{k}$	1	4	6	4	1

### Signalverzerrung an einer Diode



- Die Strom-Spannungs-Kennlinie einer Diode ist näherungsweise eine Exponentialfunktion.
- Der untere Teil wird gestaucht und der obere gestreckt.



- Spektralwerte des Diodenstroms berechnet mit:

```
.four 1kHz 10 V(a)
```

Harmonic Number	Frequency [Hz]	Fourier Component	Phase [degree]	
1	1.000e+03	5.927e-04	0.01°	: Grundwelle
2	2.000e+03	2.740e-04	-89.99°	: 1. Oberwelle
3	3.000e+03	9.073e-05	-179.98°	: 2. Oberwelle
4	4.000e+03	2.303e-05	90.03°	: 3. Oberwelle
5	5.000e+03	4.649e-06	0.03°	: 4. Oberwelle
6	6.000e+03	7.509e-07	-89.96°	: 5. Oberwelle
7	7.000e+03	9.288e-08	-179.96°	: 6. Oberwelle
8	8.000e+03	6.882e-09	89.99°	: 7. Oberwelle
9	9.000e+03	4.010e-10	-178.20°	: 8. Oberwelle
10	1.000e+04	2.657e-10	90.08°	: 9. Oberwelle

Total Harmonic Distortion: 48.864496%

## Klirrfaktor (Harmonic Distortion)

Der Klirrfaktor ist der Anteil der Energie der Oberwellen an der Gesamtenergie. Er berechnet sich als Verhältnis der Effektivwerte

$$k = \sqrt{\frac{\sum_{i=2}^{\infty} |\underline{X}(i \cdot f_0)|^2}{\sum_{i=1}^{\infty} |\underline{X}(i \cdot f_0)|^2}}$$

und ist ein Maß der Verzerrung. Bei Audiosignalen wird er als »klirren« wahrgenommen.

Für den Diodenstrom im Beispiel gilt:

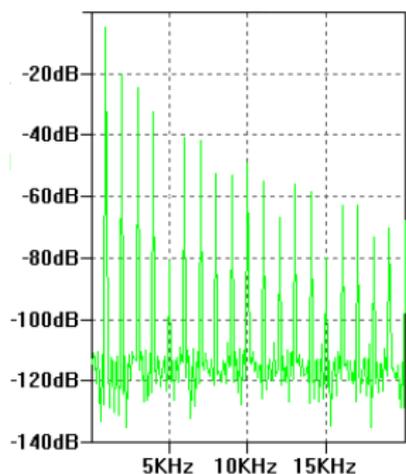
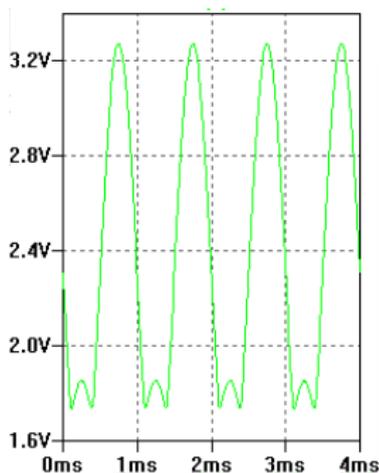
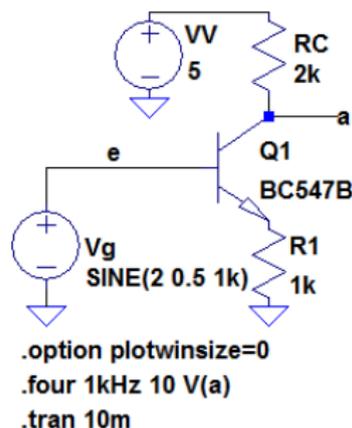
$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{(2,740 \cdot 10^{-4})^2 + (9,073 \cdot 10^{-5})^2 + \dots}{(5,927 \cdot 10^{-4})^2 + (2,740e \cdot 10^{-4})^2 + (9,073 \cdot 10^{-5})^2 + \dots}} \\ &= 48,8\% \end{aligned}$$

Das Ergebnis steht unter den Spektralwerten im SPICE Error Log:

**Total Harmonic Distortion: 48.864496%**

## Der Klirrfaktor eines Verstärkers

Wenn das Eingangssignal eines Verstärkers zu groß ist, übersteuert er, d.h. er verlässt seinen linearen Kennlinienbereich:



Das Eingangssignal ist  $U_g = 2\text{V} + 0,5\text{V} \cdot \sin(2\pi \cdot 1\text{kHz} \cdot t)$ . Für zu große Werte der Eingangsspannung geht der Transistor in die Übersteuerung. Die Verstärkung wechselt von -2 nach 1.



Fourier-Koeffizienten und Klirrfaktor aus dem SPICE Error Log:

Harmonic Number	Frequency [Hz]	Fourier Component	Normalized Component	Phase [degree]
1	1.000e+03	7.883e-01	1.000e+00	-180.00°
2	2.000e+03	1.396e-01	1.770e-01	-90.04°
3	3.000e+03	8.518e-02	1.081e-01	179.96°
4	4.000e+03	3.380e-02	4.287e-02	90.03°
5	5.000e+03	1.275e-04	1.618e-04	44.24°
6	6.000e+03	1.318e-02	1.671e-02	89.62°
7	7.000e+03	1.124e-02	1.426e-02	-0.06°
8	8.000e+03	3.207e-03	4.068e-03	-88.60°
9	9.000e+03	3.201e-03	4.060e-03	-1.90°
10	1.000e+04	4.716e-03	5.983e-03	-90.54°

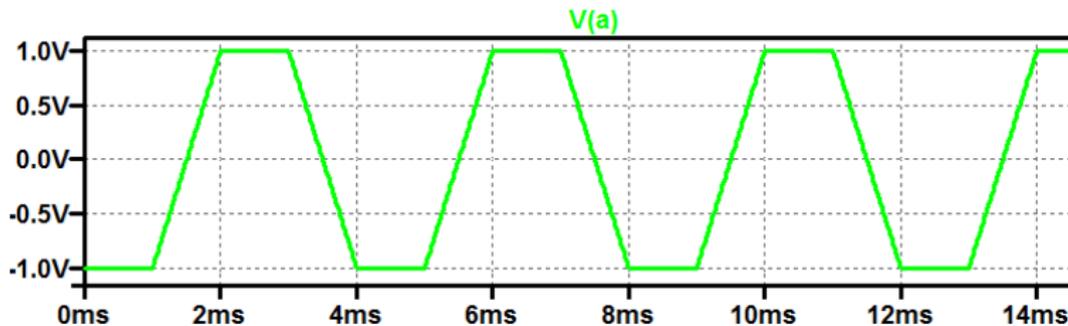
Total Harmonic Distortion: 21.307795%



# Aufgaben

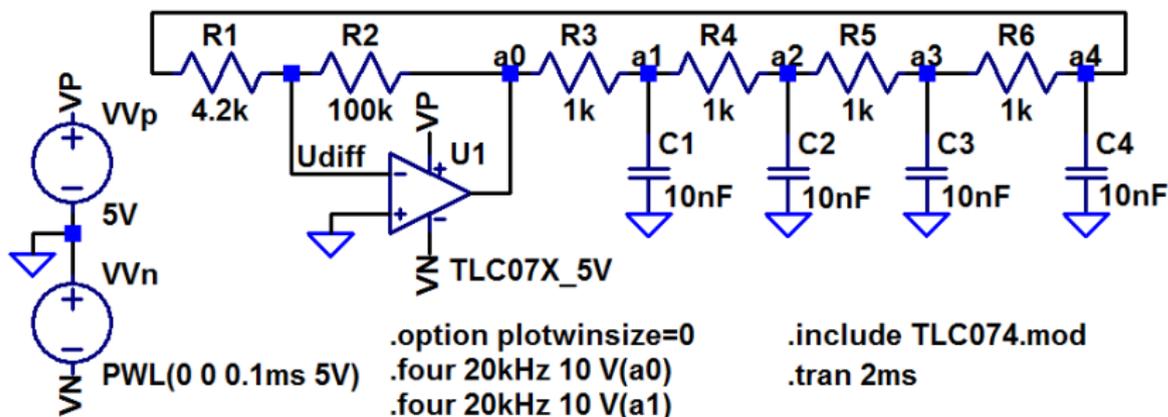
## Aufgabe 3.8: Spektrum Trapezsignal

Bestimmen Sie für das in der nachfolgenden Abbildung dargestellte periodische Trapezsignal die Spektralwerte für die Grundfrequenz von 250 Hz und die zehn ersten Oberwellen (jeweils Amplitude und Phase).



## Aufgabe 3.9: Klirrfaktor Phasenschiebeoszillator

Berechnen Sie den Klirrfaktor der Spannungsverläufe  $a_0$  und  $a_1$  des Phasenschiebeoszillators in der nachfolgenden Abbildung:

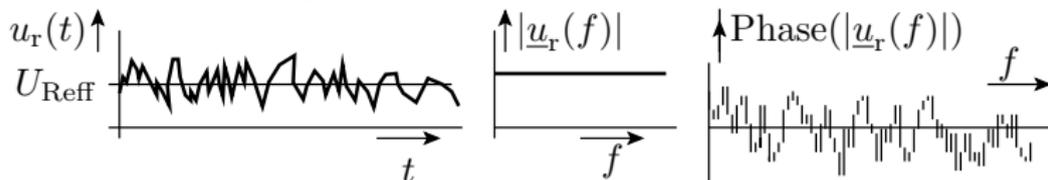




# Rauschen

## Rauschen

Rauschen ist im Zeitbereich ein Zufallssignal, verursacht durch unterschiedliche physikalische Effekte.

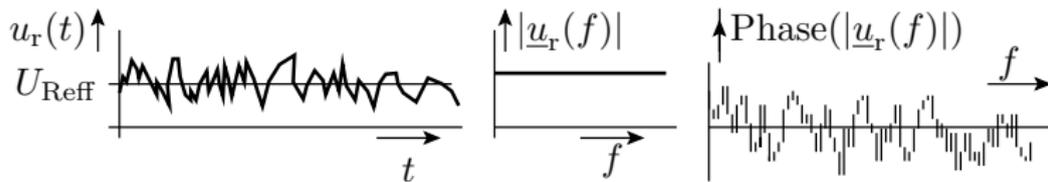


( $u_r(t)$  – Rauschspannung;  $U_{\text{Reff}}$  – Effektivwert der Rauschspannung). Im Frequenzbereich wird Rauschen durch seine spektrale Dichte beschrieben. Das ist die frequenzbezogene Rauschamplitude  $|\underline{u}_r(f)|$  in einem infinitesimal kleinen Frequenzband und besitzt die Dimension Leistung mal Zeit. Rauschamplituden addieren sich nach Pythagoras. Effektive Rauschspannung einer spektralen Rauschdichte:

$$U_{\text{Reff}} = \sqrt{\int_{f_u}^{f_o} |\underline{u}_r(f)|^2 \cdot df}$$



## 5. Rauschen



Die effektive Rauschspannung ist die Wurzel aus dem Integral des Amplitudenquadrats über den gesamten betrachteten Frequenzbereich:

$$U_{\text{Reff}} = \sqrt{\int_{f_u}^{f_o} |\underline{u}_r(f)|^2 \cdot df} \quad (3)$$

( $f_u$ ,  $f_o$  – untere und obere Grenzfrequenz).

Bei der Verarbeitung von Empfangs- und Sensorsignalen interessiert der Signal-Rausch-Abstand, der die minimal auswertbare Signalamplitude bestimmt.

LT-Spice kann Rauschdichten und Effektivwerte berechnen für

- Wärmerauschen,
- Stromrauschen und
- 1/f-Rauschen.



## Physikalische Ursachen



## Wärmerauschen (Widerstandsrauschen)

Die Leitungselektronen in einem Widerstand erzeugen mit großer Rate statistisch unabhängige Spannungs- und Stromimpulse von kurzer Dauer, deren Überlagerung zu einer breiten Frequenzverteilung von null über den gesamten in der Elektronik nutzbaren Frequenzbereich führt. Der Effektivwert der Rauschspannungsdichte ist frequenzunabhängig (weißes Rauschen):

$$\begin{aligned} \text{Rauschdichte: } |\underline{u}_{r,R}(f)| &= \sqrt{4 \cdot k_B \cdot T \cdot R} \\ \text{Effektivwert: } U_{\text{Reff.R}} &= \sqrt{4 \cdot k_B \cdot T \cdot R \cdot \Delta f} \end{aligned} \quad (4)$$

( $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Ws}}{\text{K}}$  – Boltzmannkonstante;  $T$  – Temperatur in Kelvin;  $\Delta f$  – genutzte Bandbreite).

Beispiel:  $T = 300 \text{ K}$ ;  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ;  $\Delta f = 1 \text{ MHz}$ :

$$U_{\text{Reff.R}} = \sqrt{4 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Ws}}{\text{K}} \cdot 300 \text{ K} \cdot 1 \text{ k}\Omega \cdot 1 \text{ MHz}} = 4,07 \mu\text{V}$$



## Stromrauschen, (Schrotrauschen)

Stromrauschen, auch als Schrotrauschen bezeichnet, wird durch die diskrete Natur der Ladungsträger beim Durchlaufen einer Spannungsschwelle verursacht. Es kann als das Prasseln der Elektronen und Löcher verstanden werden, das beim Fließen eines Gleichstroms entsteht, wenn die Ladungsträger wie in Dioden oder Transistoren Spannungsschwellen passieren:

$$\text{Rauschdichte: } |i_{r.sd}(f)| = \sqrt{2 \cdot q \cdot I}$$

$$\text{Effektivwert: } I_{\text{Reff.sd}} = \sqrt{2 \cdot q \cdot I \cdot \Delta f}$$

( $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{As}$  – Elementarladung,  $\Delta f$  – Bandbreite; temperaturunabhängig).

Beispiel:  $I = 1 \text{ mA}$ ,  $\Delta f = 1 \text{ MHz}$ :

$$I_{\text{Reff.sd}} = \sqrt{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{As} \cdot 1 \text{ mA} \cdot 1 \text{ MHz}} = 18 \mu\text{A}$$



## 1/f-Rauschen (Funkelrauschen)

Experimentell stellt man bei fast allen Bauteilen einen Rauschanteil, der mit abnehmender Frequenz ansteigt, fest. Vielzahl von Ursachen: Diffusion von Atomen und Molekülen an Grenz- und Oberflächen, Schwankungen der Gate-Ladungen bei MOSFETs.

Spice-Modell für die 1/ $f$ -Rauschstromdichte des Basis- und Kollektorstroms für Bipolartransistoren:

$$|\dot{i}_{r.fd}(f)| = \sqrt{\frac{k_F \cdot I^{A_F}}{f}}$$

( $I$  – Basis- oder Kollektorstrom (Gleichanteil);  $k_F$  – Funkelrauschkoeffizient (in Spice-Parameter **Kf**);  $A_F$  – Funkelrauschexponent, typ. 1...2 (in Spice-Parameter **Af**)).

## Effektiver Rauschstrom Funkelrauschen

Beispiel: Kollektorstrom  $I = 1 \text{ mA}$ , Frequenzbereich:  $f_u = 1 \text{ Hz}$  bis  $f_o = 1 \text{ MHz}$ , Spice-Parameter:  $A_F = 1,2$ ,  $k_F = 10^{-9} \text{ A}^{0,8} \text{ Hz}$  :

$$\begin{aligned} I_{\text{Reff.f.d}} &= \sqrt{\int_{f_u}^{f_o} \frac{k_F \cdot I^{A_F}}{f} \cdot df} = \sqrt{k_F \cdot I_D^{A_F} \cdot \ln\left(\frac{f_o}{f_u}\right)} \\ &= \sqrt{10^{-9} \text{ A}^{0,8} \text{ Hz} \cdot 1 \text{ mA}^{1,2} \cdot \ln(10^6)} = 1,8 \mu\text{A} \end{aligned}$$

Das 1/f-Rauschen stört bei niederfrequenten Signalen und vor allem bei der Verarbeitung von Gleichspannungen (Parameterdrift).

Frequenz, bis zu der 1/f Rauschen größer als Stromrauschen ist:

- Röhren:  $\approx 10 \text{ kHz}$
- Bipolartransistoren:  $\approx 1 \text{ kHz}$
- Sperrschicht-FETs  $\approx 100 \text{ Hz}$
- MOSFETS  $\approx 10 \text{ MHz}$



## Beispielrechnungen

Spice-Parameter:  $A_F = 1,4$ ,  $k_F = 2 \cdot 10^{-9} \text{A}^{0,8} \text{Hz}$ 

$$I_{\text{Reff.f.d}} =$$

	$I = 1 \text{ mA}$	$I = 10 \text{ mA}$	$I = 100 \text{ mA}$	$I = 1 \text{ A}$
$\frac{f_o}{f_u} = 10^4$				
$\frac{f_o}{f_u} = 10^5$				



## Rauschquellen & -transformation

## Rauschquellen und Rauschquellentransformation

Rauschen wird durch AC-Quellen mit entsprechender spektraler Rauschdichte (Spannung/Strom, konstante oder  $1/f$ -Dichte) modelliert und auf eine äquivalente Dichte am Schaltungsein- oder -ausgang umgerechnet.

Temperaturabhängiges Rauschen von Widerständen:

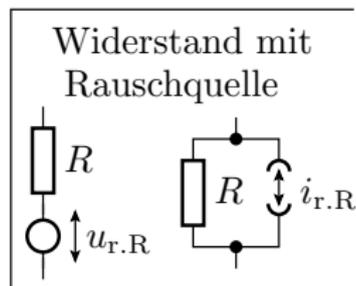
- Rauschspannungsdichte:

$$|\underline{u}_{r,R}(f)| = \sqrt{4 \cdot k_B \cdot T \cdot R}$$

- Rauschstromdichte:

$$|\underline{i}_{r,R}(f)| = \sqrt{\frac{4 \cdot k_B \cdot T}{R}}$$

( $k$  – Boltzmannkonstante;  $T$  – Temperatur).



Rauschen ist ein ungerichtetes Spannungs- oder Stromsignal.  
Addition unkorrelierter Rauschanteile nach Pythagoras.

## Temperaturunabhängiges Rauschen pn-Übergänge

- Stromrauschen:

$$|\underline{i}_{r.sd}(f)| = \sqrt{2 \cdot q \cdot I}$$

- $1/f$  - Rauschen:

$$|\underline{i}_{r.fd}(f)| = \sqrt{\frac{k_F \cdot I^{A_F}}{f}}$$

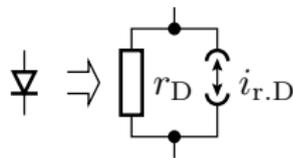
- gesamte Rauschstromdichte:

$$|\underline{i}_{r.d}(f)| = \sqrt{2 \cdot q \cdot I + \frac{k_F \cdot I^{A_F}}{f}}$$

( $q$  – Elementarladung;  $I$  – Basis- oder Kollektorstrom (Gleichanteil);  $k_F$  – Funkelrauschkoeffizient (in Spice-Parameter **Kf**);  $A_F$  – Funkelrauschexponent, typ. 1...2 (in Spice-Parameter **Af**)).

Bei der Simulation können Strom- und  $1/f$ -Anteile getrennt und gemeinsam betrachtet werden.

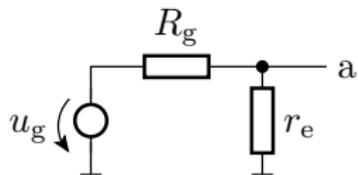
Kleinsignalersatz-  
schaltung Diode mit  
Rauschstromquelle



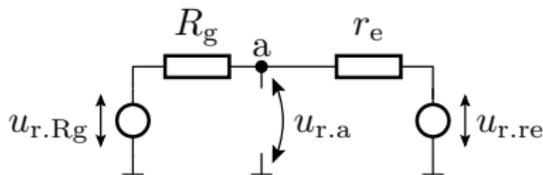
## Transformation von Rauschquellen

Beispiel: Signalquelle mit Innenwiderstand, die an eine Schaltung mit Eingangswiderstand angeschlossen wird.

Spannungsteiler z.B. an einem Verstärkereingang



Rauschersatzschaltung

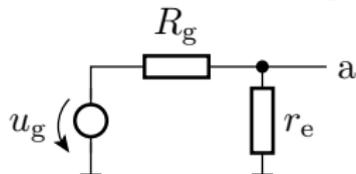


Umrechnung in einen Zweipol mit einer Signal-, einer Rauschquelle und einen rauschfreien Innenwiderstand:

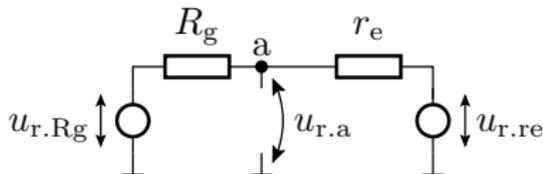
$$u_{g,a} = \frac{r_e}{R_g + r_e} \cdot u_g$$

$$R_{ers} = R_g \parallel r_e$$

Spannungsteiler z.B. an einem Verstärkereingang



Rauschersatzschaltung



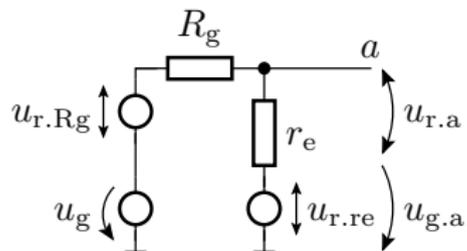
$$\begin{aligned}
 |\underline{u}_{r,a}| &= \sqrt{\left( |\underline{u}_{r,Rg}| \cdot \frac{r_e}{R_g + r_e} \right)^2 + \left( |\underline{u}_{r,re}| \cdot \frac{R_g}{R_g + r_e} \right)^2} \\
 &= \sqrt{4 \cdot k_B \cdot T \cdot R_g \cdot \left( \frac{r_e}{R_g + r_e} \right)^2 + 4 \cdot k_B \cdot T \cdot r_e \cdot \left( \frac{R_g}{R_g + r_e} \right)^2} \\
 &= \sqrt{4 \cdot k_B \cdot T \cdot R_{ers}}
 \end{aligned}$$

Die Schaltung rauscht am Ausgang so stark wie ihr Ersatzwiderstand.

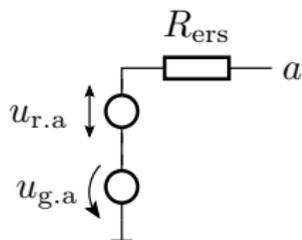
Die äquivalente Rauschdichte am Schaltungseingang erhält man durch Multiplikation der äquivalenten Rauschdichte am Ausgang mit dem Kehrwert der Übertragungsfunktion.



## Beispielrechnung



Ersatzschaltung



$$u_g = 1 \text{ mV}$$

$$R_g = 3 \text{ k}\Omega$$

$$r_e = 2 \text{ k}\Omega$$

$$T = 300 \text{ K}$$

$$\Delta f = 20 \text{ kHz}$$

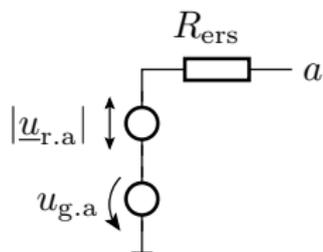
$R_{ers}$	$u_a$	$U_{\text{Reff.Rg}}$	$U_{\text{Reff.re}}$	$U_{\text{Reff.a}}$
	sqrt(			

## Transformation der Rauschdichte auf den Eingang

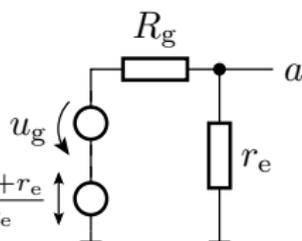
Multiplikation der Ausgangsrauschdichte mit dem Kehrwert der Übertragungsfunktion:

$$\frac{u_g}{u_{g,a}} = \frac{R_g + r_e}{r_e}$$

vereinfachter Zweipol mit der Rauschquelle am Ausgang



Originalschaltung mit der Rauschquelle am Eingang



$$|u_{r,e}| = |u_{r,a}| \cdot \frac{R_g + r_e}{r_e}$$

Äquivalente Rauschspannung am Eingang:

$$|u_{r,e}| = \sqrt{4kT \cdot R_{ers}} \cdot \frac{R_g + r_e}{r_e}$$



Gibt es ein Verhältnis  $k = R_g/r_e$ , bei dem das äquivalente Eingangsrauschen am geringsten ist?

$$\begin{aligned} |\underline{u}_{r,e}| &= \sqrt{4kT \cdot R_{\text{ers}}} \cdot \frac{R_g + r_e}{r_e} = \\ &= \sqrt{4kT \cdot \frac{R_g \cdot r_e}{R_g + r_e} \cdot \frac{R_g + r_e}{r_e}} = \sqrt{4kT \cdot \frac{(R_g + r_e) \cdot R_g}{r_e}} \end{aligned}$$

Einsetzen des Widerstandsverhältnisses  $k = R_g/r_e$

$$|\underline{u}_{r,e}| = \sqrt{4kT \cdot \frac{(R_g + k \cdot R_g) \cdot R_g}{k \cdot R_g}} = \sqrt{4kT \cdot R_g \frac{1+k}{k}}$$

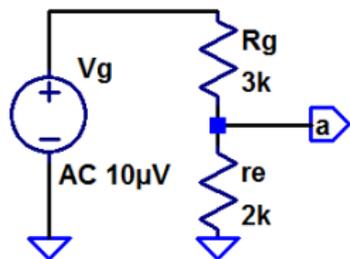
Es gibt kein Optimum, aber ein Eingangswiderstand kleiner als der Widerstand der Signalquelle erhöht das äquivalente Eingangsrauschen erheblich. Schwache Signale müssen zuerst möglichst rauscharm verstärkt werden.



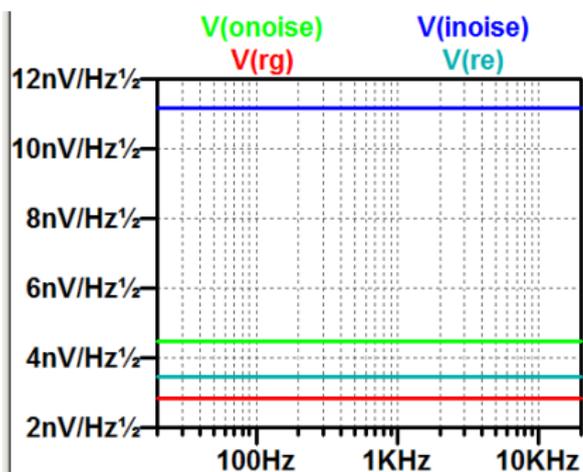
# Rauschanalyse

## Rauschanalyse

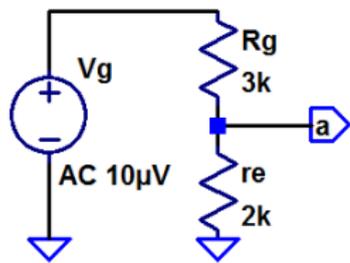
Zur Rauschanalyse sind an den Schaltungseingang eine Quelle anzuschließen, diese auszuwählen und der Frequenzbereich fest



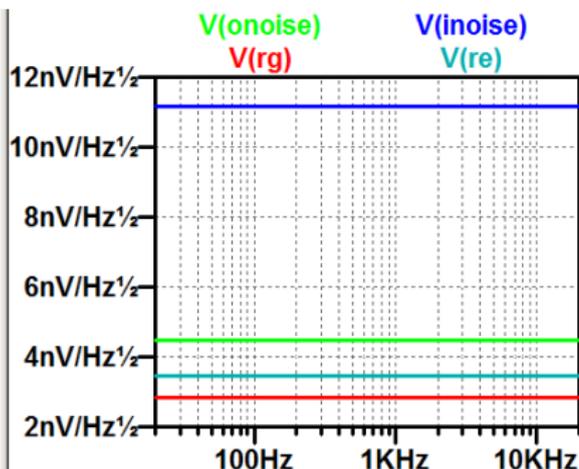
```
.meas noise noise_Rg integ V(Rg)
.meas noise noise_re integ V(re)
.meas noise noise_e integ V(onoise)
.meas noise noise_g integ V(inoise)
.noise V(a) Vg oct 10 20Hz 20kHz
```



( $V(\text{onoise})$ ,  $V(\text{inoise})$ ) – Rauschdichte am Ausgang bzw. Eingang;  
 $V(R_g)$ ,  $V(r_e)$  – Auf den Ausgang transformierte Rauschdichten  
 der Widerstände  $R_g$  und  $r_e$ ).



```
.meas noise noise_Rg integ V(Rg)
.meas noise noise_re integ V(re)
.meas noise noise_e integ V(onoise)
.meas noise noise_g integ V(inoise)
.noise V(a) Vg oct 10 20Hz 20kHz
```



```
.meas noise <Bezeichner> integ <Rauschdichte>
```

bestimmt die effektiven Rauschspannungen nach Gl. 3 (Wurzel Integral Quadrate) und schreibt die Ergebnisse ins »Error Log«:

```
noise_rg: INTEG(v(rg))=3.98712e-007 FROM 20 TO 20000
noise_re: INTEG(v(re))=4.88321e-007 FROM 20 TO 20000
noise_e: INTEG(v(onoise))=6.30419e-007 FROM 20 TO 20000
noise_g: INTEG(v(inoise))=1.57605e-006 FROM 20 TO 20000
```



Kontrolle der Ergebnisse:

- Die effektive Rauschspannung am Ausgang ergibt sich nach Gl. 4 aus dem Ersatzwiderstand am Ausgang und der betrachteten Bandbreite:

$$\begin{aligned}U_{\text{Reff.a}} &= \sqrt{4 \cdot k \cdot T \cdot (R_{\text{ers}}) \cdot \Delta f} \\&= \sqrt{4 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Ws}}{\text{K}} \cdot 300 \text{ K} \cdot (1 \parallel 2) \text{ k}\Omega \cdot (20 \text{ kHz} - 20 \text{ Hz})} \\&= 630 \text{ nV} \sqrt{\quad}\end{aligned}$$

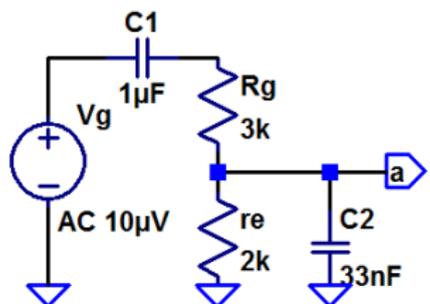
- Die gesamte effektive Rauschspannung ergibt sich über Pythagoras aus den Anteilen der beiden Widerstände:

$$630 \text{ nV} = \sqrt{300 \text{ nV} + 488 \text{ nV}} \sqrt{\quad}$$

- Die äquivalente Rauschspannung am Eingang ist die effektive Rauschspannung am Ausgang geteilt durch das Spannungsteilerverhältnis von 2/5:

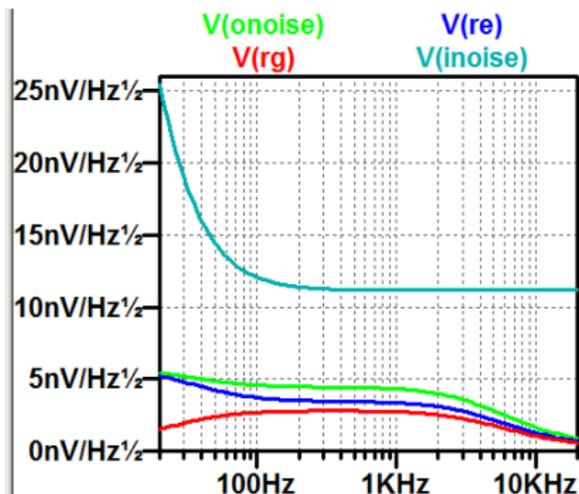
$$U_{\text{Reff.e}} = \frac{5 \cdot U_{\text{Reff.a}}}{2} = \frac{5 \cdot 630 \text{ nV}}{2} = 1,58 \mu\text{V} \sqrt{\quad}$$

## Frequenzabhängige Übertragungsfunktion



```

.meas noise noise_Rg integ V(Rg)
.meas noise noise_re integ V(re)
.meas noise noise_e integ V(onoise)
.meas noise noise_g integ V(inoise)
.noise V(a) Vg oct 10 20Hz 20kHz
    
```



Bei einer frequenzabhängigen Übertragungsfunktion sind auch die Verstärkungen und Dämpfungen der Rauschteile frequenzabhängig. Das äquivalente Eingangsruschen ist außerhalb des genutzten Frequenzbereichs deshalb so groß, weil dort die Übertragungsfunktion, durch die dividiert wird, klein ist.



ohne Kapazitäten:

```
noise_rg: INTEG(v(rg))=3.83661e-007 FROM 20 TO 20000  
noise_re: INTEG(v(re))=2.71289e-007 FROM 20 TO 20000  
noise_e: INTEG(v(onoise))=4.69887e-007 FROM 20 TO 20000  
noise_g: INTEG(v(inoise))=7.0483e-007 FROM 20 TO 20000
```

mit Kapazitäten:

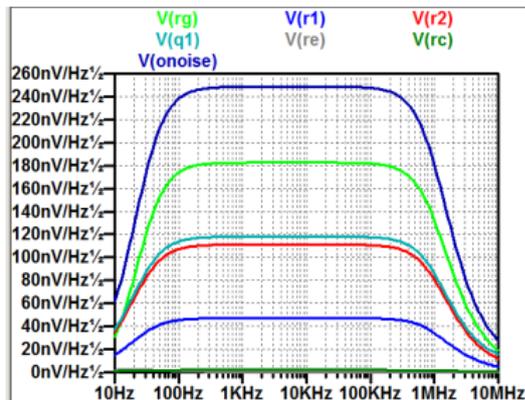
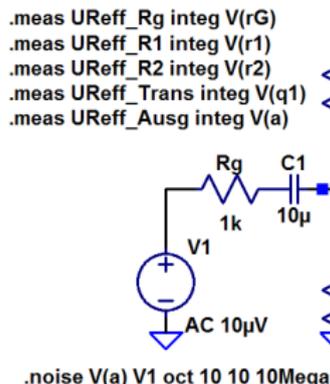
```
noise_rg: INTEG(v(rg))=2.07926e-007 FROM 20 TO 20000  
noise_re: INTEG(v(re))=2.56701e-007 FROM 20 TO 20000  
noise_e: INTEG(v(onoise))=3.30346e-007 FROM 20 TO 20000  
noise_g: INTEG(v(inoise))=1.57938e-006 FROM 20 TO 20000
```

Die Bandbegrenzung reduziert das Rauschen etwas.



# Verstärker

## Rauschanalyse eines Transistorverstärkers



Die Rauschquellen mit dem größten äquivalenten Ausgangsrauschen sind der Innenwiderstand der Signalquelle, der Transistor und die beiden Widerstände des Basisspannungsteilers. Das Transistormodell hat offenbar kein  $1/f$ -Rauschen<sup>6</sup>.

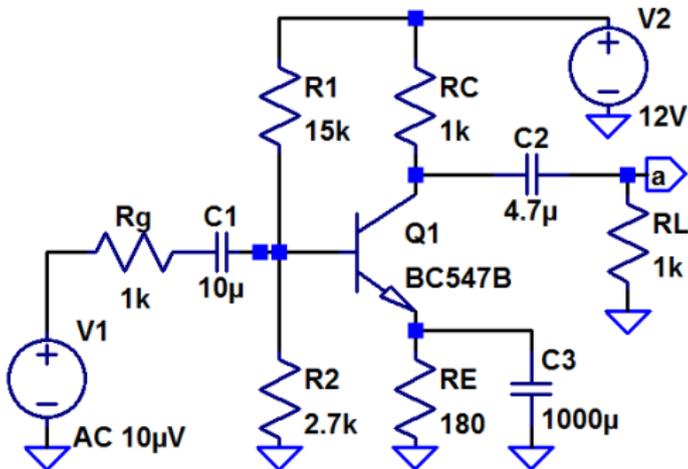
<sup>6</sup>Das Modell des BC547B ist ohne Parameterangaben für  $K_f$  und  $A_f$ .



Ausgabe im »Error Log«:

```
ureff_rg: INTEG(v(rg))=0.000226876 FROM 10 TO 1e+007  
ureff_r1: INTEG(v(r1))=5.85794e-005 FROM 10 TO 1e+007  
ureff_r2: INTEG(v(r2))=0.000138073 FROM 10 TO 1e+007  
ureff_trans: INTEG(v(q1))=0.000149514 FROM 10 TO 1e+007  
ureff_ausg: INTEG(v(onoise))=0.000310401 FROM 10 TO 1e+007  
vu: MAX(gain)=44.8319 FROM 10 TO 1e+007
```

Rauschquelle	$U_{\text{Reff}}$ an $a$
$R_G$	$227 \mu\text{V}$
$R_1$	$58 \mu\text{V}$
$R_2$	$138 \mu\text{V}$
Transistor	$150 \mu\text{V}$
gesamt	$310 \mu\text{V}$





## SNR und Rauschzahl

## Signal-Rausch-Abstand (SNR – signal noise ratio)

Signal-Rausch-Abstand: Verhältnis der Leistung des Nutzsignals zur Leistung des Rauschsignals an einem Lastwiderstand.

Identisch mit Verhältnis der Effektivwertquadrate:

$$SNR = \frac{U_{\text{eff}}^2}{U_{\text{Reff}}^2}$$

Für einen Effektivwert der Ausgangsspannung  $U_{\text{eff.a}} = 1 \text{ mV}$  und im Beispiel  $U_{\text{Reff.a}} = 310,4 \mu\text{V}$ :

$$SNR = \left( \frac{1 \text{ mV}}{310,4 \mu\text{V}} \right)^2 = 10,4$$

Auf Folie 137 ist die Verstärkung im mittleren Bereich 44. Ein Eingangssignal von  $20 \mu\text{V}$  wäre noch auswertbar. Möglichkeiten zur Erhöhung des SNR: Schaltung optimieren 50%, auf  $0^\circ\text{C}$  kühlen 10%, Bandbreite auf 1 MHz verringern 300%.



## Rauschzahl

Relative Verschlechterung des Signal-Rausch-Abstands durch eine (Verstärker-) Schaltung.

- Es gibt immer ein unvermeidbares Grundrauschen durch den Innenwiderstand des Generators, das mit verstärkt wird, und
- ein gesamtes Rauschen am Verstärkerausgang.

Im Beispiel ist bei Ausgangsspannung  $U_{\text{eff.a}}^2 = 1 \text{ mV}$

$$SNR = \frac{U_{\text{eff.a}}^2}{U_{\text{Reff.a}}^2} = \left( \frac{1 \text{ mV}}{310,4 \mu\text{V}} \right)^2 = 10,4$$

und wenn es außer  $R_g$  keine Rauschquelle geben würde:

$$SNR_{Rg} = \frac{U_{\text{eff.a}}^2}{U_{\text{Reff.a}}^2 (R_g)} = \left( \frac{1 \text{ mV}}{226,9 \mu\text{V}} \right)^2 = 19,4$$

Rauschzahl:

$$F = \frac{SNR_{Rg}}{SNR} = \frac{U_{\text{Reff.a}}^2}{U_{\text{Reff.a}}^2 (R_g)} = \frac{19,4}{10,4} = 1,87$$



# Aufgaben



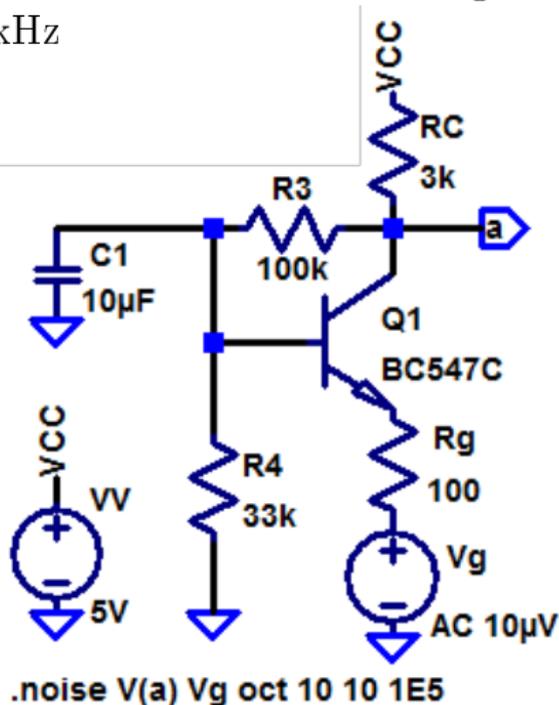
## Aufgabe 3.10: Kontrollfragen Rauschen

- Welche Maßeinheiten haben die effektive Rauschspannung und die Rauschspannungsdichte?
- Wie groß ist die effektive Rauschspannung an einem Widerstand von  $1\text{ k}\Omega$  im Frequenzband von  $1\text{ kHz}$  bis  $10\text{ kHz}$  maximal in einem Temperaturbereich von  $0^\circ\text{C}$  bis  $80^\circ\text{C}$ ?
- Wie groß ist die Rauschstromdichte des Basis-Emitter-Übergangs eines Transistors bei einem Basisstrom vom  $1\text{ }\mu\text{A}$ ?
- Wie groß sind die effektive Rauschspannung und der effektive Rauschstrom an einem Widerstand von  $1\text{ k}\Omega$  bei einer Temperatur von  $300\text{ K}$  im Frequenzbereich von  $0$  bis  $1\text{ MHz}$ ?

## Aufgabe 3.11: Rauschen

Bestimmen Sie für den Transistorverstärker in der Abbildung im Frequenzbereich von 20 Hz bis 20 kHz

- 1 die stationäre Ausgangsspannung im Arbeitspunkt,
- 2 die Verstärkung,
- 3 den Ausgangswiderstand,
- 4 die effektive Rauschspannung am Ausgang,
- 5 den Signalrauschabstand am Ausgang und
- 6 die Rauschzahl des Verstärkers.





## Literatur