Elektronik II, Foliensatz 1
Wiederholung bis Bauteiltoleranzen

G. Kemnitz

Institut für Informatik, Technische Universität Clausthal

12. Juli 2013

Inhalt des Foliensatzes

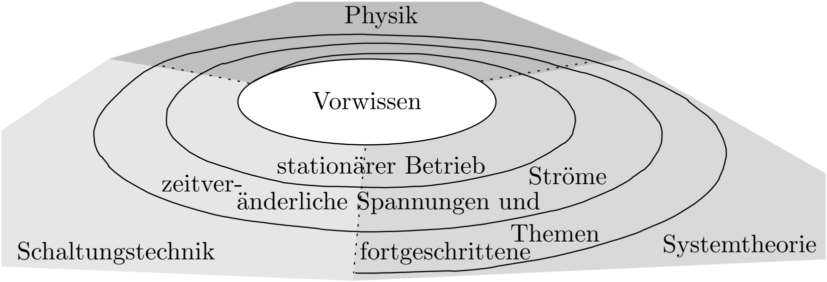
Einleitung

- Die Elektronik entwickelt sich sehr schnell.
- Welches Wissen ist auch noch in 10 bis 20 Jahren nützlich?
  - Die physikalischen und technischen Grundlagen.
  - Grundtechniken für Modellbildung, Simulation und Entwurf.
  - Erarbeiten von Wissen aus Büchern etc.
  - gesundes Einschätzungsvermögen, was möglich und was Phantasie ist.
- Grundsäulen der Wissensvermittlung:
  - physikalische Grundlagen: Strom, Spannung, Widerstand, Halbleiter, Leitungen
  - Systemtheorie: Mathematik, lineare Systeme, Frequenzraum, ...
  - Schaltungstechnik

Wiederholung, Kontrolfragen, Aufgaben

Lernprozess als Iteration

Elektronik 1:



Wichtige Erkenntnisse aus der physikalischen Sicht:

- Solange Schaltungen mit Schaltplänen beschreibar sind, spielen die Geometrie und damit auch elektrische und magnetische Felder keine Rolle.

- Es es eine Beschränkung möglich auf:
  - Maschsatz
  - Knotensatz
  - Black-Box-Modelle für Bauteile.
- Für Halbleiterbauteile wurden in Elektronik I stark vereinfachte Modelle eingeführt, Schaltungen damit analysiert und die Modell physikalisch untermauert.
- Elektrisch lange Leitungen: Wellengleichungen, Ausbreitung, Reflexion

Weiterführung in Elektronik II:

- genauere Nachbildung der physikalischen Eigenschaften in Simulationsmodellen
- weitere physikalische Effekte, z.B. Temperatureinfluss, Rauschen, ...
- bisher nicht modellierte Bauteileigenschaften.

Fragen zu Wiederholung:

- Was ist Spannung und was ist Strom?
- Was besagen der Maschen- und der Knotensatz?
- Unter welcher Bedingung sind Elektronen in Halbleitern beweglich?
- Was sind bewegliche Löcher?
- Wie wird die Dichte der beweglichen Elektronen und Löcher in einem Halbleiter eingestellt?
- Spannungsänderungen zwischen Schaltungspunkten setzen eine dazu proportionale Ladungsänderungen voraus. Wie wird dieser Zusammenhang beschrieben und mit was für einem Schaltungselement wird er nachgebildet?

- Stromänderungen in Leitungen verursachen einen dazu proportionalen Spannungsabfall. Welche physikalische Größe beschreibt dieses Phenomen und mit welchen Bauteil wird es in einer Schaltung berücksichtigt?
- Was ist Eigen- und was ist Gegeniduktivität?
- Was ist eine elektrisch lange Leitung? Nennen Sie wichtigen Eigenschaften elektrisch langer Leitungen.

Wichtige Erkenntnisse aus der Systemtheorie

- Die Berechnung der Ströme und Spannungen in einer Schaltung erfordert die Lösung (großer) Gleichungssysteme.
- Mathematisch nur für lineare Systeme beherrschbar.
- Annäherung nichtlinearer Kennlinien durch lineare Kennlinienäste.
- Nachbildung von Kapazitäten und Induktivitäten durch Quellen, die ihre Werte in diskreten Zeitschritten ändern.
- Abschätzung von Zeitabläufen durch Rückführung auf geschaltete RC-Glieder.
- Für Quellenspannnungen /- ströme vom Typ $\underline{U} \cdot e^{j\omega t}$ / $\underline{I} \cdot e^{j\omega t}$ vereinfachen sich lineare Differentialgleichungssysteme zu linearen Gleichungssystemen.
- Jeder Spannungs- bzw. Stromverlauf lässt sich in eine Summe solcher komplexen Signale zerlegen und durch seinen Amplituden und Phasenfrequenzgang beschreiben.

Weiterführung der Systemtheorie in Elektronik II

Genauere Modelle und Arbeit mit dem Simulator.

Gleichstromanalyse (DC-Analyse):

- Kennlinienen und DC-Transferfunktion
- Arbeitspunkt, Kleinsignalmodell
- Sensivitätsanalyse: Verhalten der Schaltung bei Variation der Bauteilparameter
- Monte-Carlo-Analyse (stochastisches Verfahren)

Wechselstromanalyse (AC-Analyse):

- Amplituden und Phasenfrequenzgang.
- Klirrfaktor
- Rauschsignale und Rauschanalyse
- passive und aktive Filter

Zeitdiskrete Berechnung von Signalverläufen

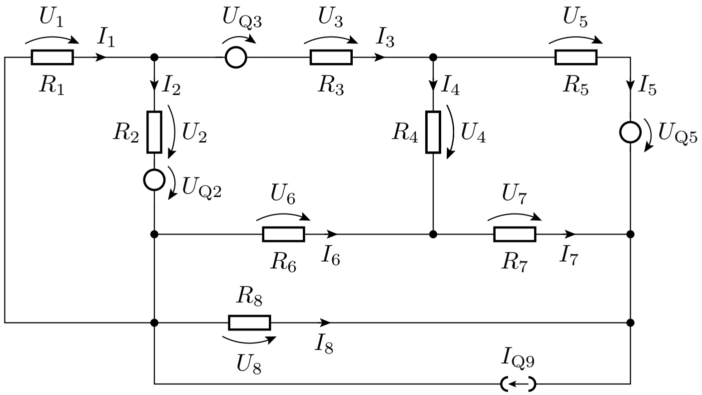
- Arbeit mit dem Simulator.

Fragen zu Wiederholung:

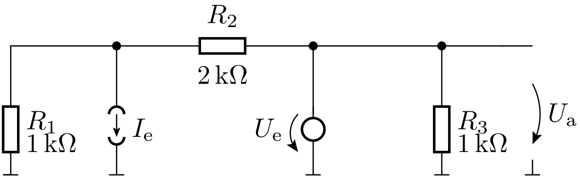
- Wie können beim Aufstellen der Maschen und Knotengleichungen linear Abhängigkeiten vermieden werden?
- Welchen Problem muss bei einer Schaltung aus Bauteilen mit 2 bis n Anschlüssen gelöst werden, bevor die Spannungen und Ströme mit Hilfe von Maschen- und Knotengleichungen bestimmt werden können?
- Wie lauten die Strom-Spannungs-Beziehungen an den Zweipolen: (Konstant-) Spannungsquelle, (Konstant-) Stromquelle, Widerstand, Kapazität und Induktivität?
- Was besagt der Überlagerungssatz?

Übungsaufgaben

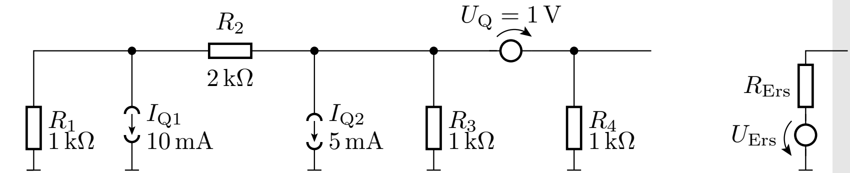
- Stellen Sie eine ausreichend große Menge von linear unabhängigen Gleichungen auf, um in der nachfolgenden Schaltung alle Spannungen und Ströme zu berechnen.



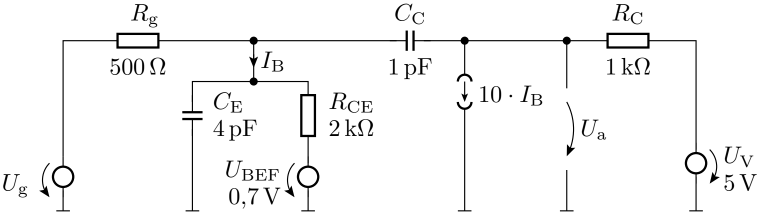
- Berechnen Sie mit Hilfe des Helmholzschen Überlagerungsprinzips die Ausgangsspannung U_a in Abhängigkeit von U_e und I_e.



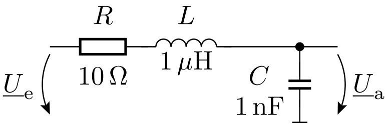
- Berechnen Sie mit dem Helmholzschen Überlagerungsprinzip R_{ers} und U_{ers} für den nachfolgenden Zweipol.



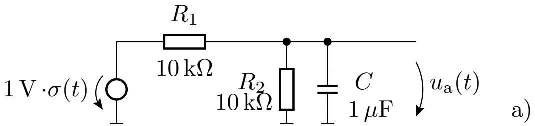
- Entwickeln Sie für die nachfolgende Schaltung die Ersatzschaltungen für $\omega = 0$ und $\omega > 0$.

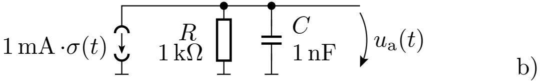


- Berechnen Sie die Ausgangsspannung in Abhängigkeit von der Eingangsspannung und der Frequenz.



- Mit welcher Zeitkonstante τ laden sich die Kapazitäten um? Welchen Wert haben die Spannungen über den Kapazitäten vor dem Sprung und lange nach dem Sprung?





Schaltungstechnik

In Elektronik I wurden behandelt mit vereinfachten Modellen:

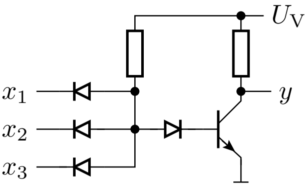
- Verstärkergrundschaltungen
- Schaltungen zur Spannungs- und Stromversorgung
- Logikgatter

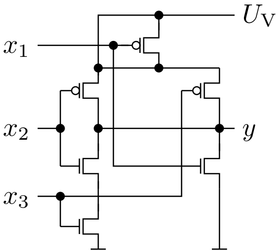
Weiterführung in Elektronik II: Dieselben Schaltungstypen mit

- genaueren Modellen
- gezielter Entwurf
- professionelle Lösungen.

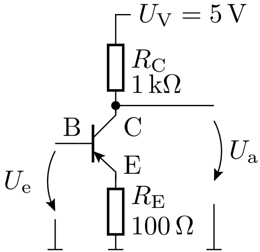
Fragen zu Wiederholung:

- Welche logischen Funktion bildet die nachfolgenden Gatterschaltungen nach?

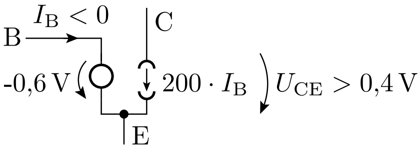




- Zeichen Sie die lineare Ersatzschaltung der nachfolgenden Transistorschaltung mit der gegeben Ersatzschaltung. Berechnen Sie die Verstärkung v_{U}. In welchem Bereich der Eingangsspannung gilt die Ersatzschaltung?



Ersatzschaltung und Gültigkeitsbereich für den Transistor



DC-Analyse

Berechnung des Arbeitspunkts

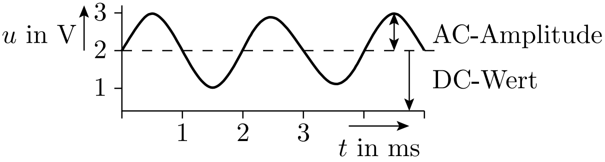
DC- / AC-Trennung

Aufspaltung der zu verarbeitenden Signale in

- DC-Wert (Gleichanteil) und
- AC-Teil (zeitveränderlicher (Wechselgrößen-) Anteil).

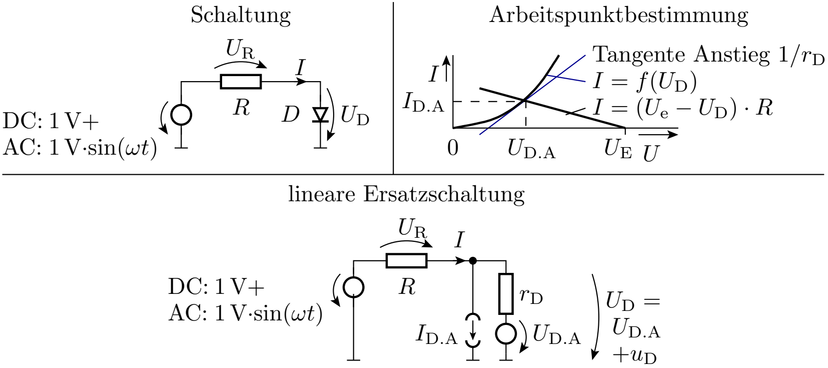
Beispiel:

$$u(t) = \underbrace{1\,\mathrm{V}}_{\text{DC-Wert}} \underbrace{+1\,\mathrm{V}\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{1\,\mathrm{ms}}\cdot t\right)}_{\text{AC-Teil}}$$



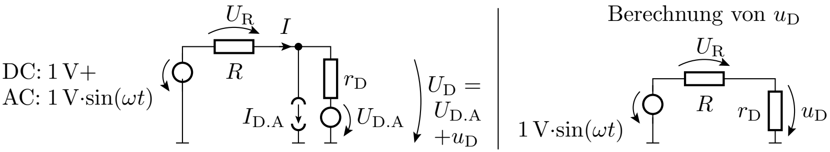
Getrennte Schaltungsanalyse für den Gleich- und Wechselspanungsanteil setzt nach Überlagerungssatz Linearität voraus.

Linearisierung im Arbeitspunkt

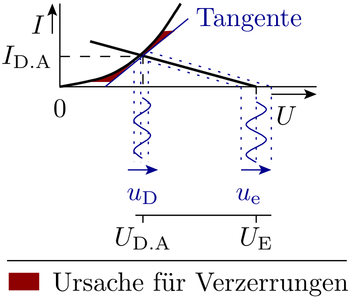


- Arbeitspunktbestimmung mit dem DC-Wert
- Annäherung nichtlinearere Elemente durch die Tangente im Arbeitspunkt.

Kleinsignalmodell für die AC-Berechnung

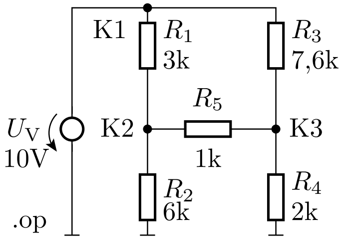


- Für die AC-Berechnung DC-Anteile weglassen.
- Gute Näherung für kleine AC-Signale.
- Große AC-Signale werden verzerrt.



Arbeitspunkt einer Brückenschaltung

Entspricht der bisherigen Gleichspannungsanalyse. Berechnung der Knotenpotentiale und Zweigströme.



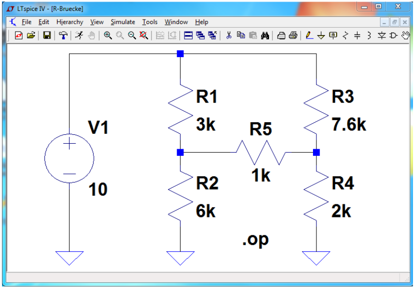
Mit Simulator LT-Spice (siehe Übung):

- graphische Schaltungseingabe
- Simulationskommando »op« für »operation point«.
- Simulation starten.

Ergebnis:

- Netzliste der eingegebenen Schaltung
- Berechnete Ströme und Spannungen.

Netzliste



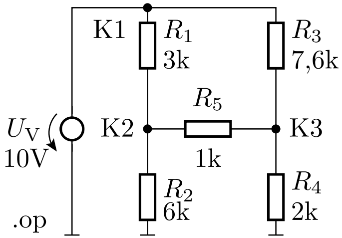
Netzliste:

```
R1 N001 N002 3k
R2 N002 0    6k
R3 N001 N003 7.6k
R4 N003 0    2k
R5 N003 N002 1k
V1 N001 0    10
.op
```

Spalte 1: Bauteilname; Spalte 2-3: Knoten; Spalte 4: Parameterwert in Ω bzw. V

- Die Knotennummern vergibt der Simulator.
- Der Bezugsknoten (Masse) hat Nummer null.
- Alle Knoten müssen eine Gleichspannungsverbindung zu Masse haben.

Simulationsergebnis



Potentiale aller Knoten

```
V(n001):  10       voltage
V(n002):  4.66667  voltage
V(n003):  3.66667  voltage
```

Ströme durch alle Bauteile:

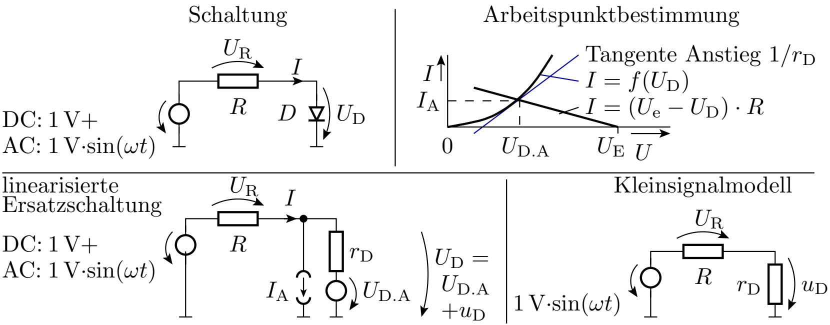
```
I(R5):  -0.001        device_current
I(R4):   0.00183333   device_current
I(R3):   0.000833333  device_current
I(R2):   0.000777778  device_current
I(R1):   0.00177778   device_current
I(V1):  -0.00261111   device_current
```

Probe:

$$R_2 = \frac{U_{\mathrm{R2}}}{I_{\mathrm{R2}}} = \frac{4{,}66667\,\mathrm{V}}{0{,}000777778\,\mathrm{A}} = 6\,\mathrm{k\Omega}$$

Berechnung der Transferfunktion

Kleinsignalmodell



Das Kleinsignalmodell

- ist die im Arbeitspunkt linarisierte Ersatzschaltung ohne DC-Quellen.
- gute Näherung für die Berechung kleiner Wechsel- (AC-) Größen.

Transferfunktion

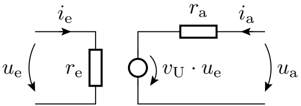
In einem linearisierten, gleichanteilfreien Modell sind Ausgabesignale Linearkombinationen der Eingabesignale:

$$u_{\mathrm{a}}(t) = k_1 \cdot u_{\mathrm{e1}}(t) + k_2 \cdot u_{\mathrm{e2}}(t) +$$

Die Abbildung <u>eines</u> Eingabesignals auf <u>ein</u> Ausgabesignal lässt sich durch ein »Zweitor« oder »Vierpol« beschreiben:

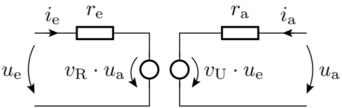
- rückwirkungsfrei $u_{\mathrm{e}} \neq f(u_{\mathrm{a}})$ (typ. für Verstärker)

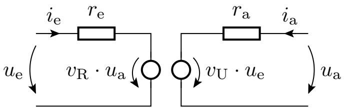
$$\begin{aligned} i_{\mathrm{e}} &= \frac{u_{\mathrm{e}}}{r_{\mathrm{e}}} \\ u_{\mathrm{a}} &= v_{\mathrm{U}} \cdot u_{\mathrm{e}} + r_{\mathrm{a}} \cdot i_{\mathrm{a}} \end{aligned}$$



- mit Rückwirkung $u_{\mathrm{e}} = f(u_{\mathrm{a}})$ (Widerstandsnetzwerk)

$$\begin{aligned} i_{\mathrm{e}} &= \frac{u_{\mathrm{e}} - v_{\mathrm{R}} \cdot u_{\mathrm{a}}}{r_{\mathrm{e}}} \\ u_{\mathrm{a}} &= v_{\mathrm{U}} \cdot u_{\mathrm{e}} + r_{\mathrm{a}} \cdot i_{\mathrm{a}} \end{aligned}$$





$$i_\mathrm{e} = \frac{u_\mathrm{e} - v_\mathrm{R} \cdot u_\mathrm{a}}{r_\mathrm{e}}$$

$$u_\mathrm{a} = v_\mathrm{U} \cdot u_\mathrm{e} + r_\mathrm{a} \cdot i_\mathrm{a}$$

Berechnung der vier Parameter:

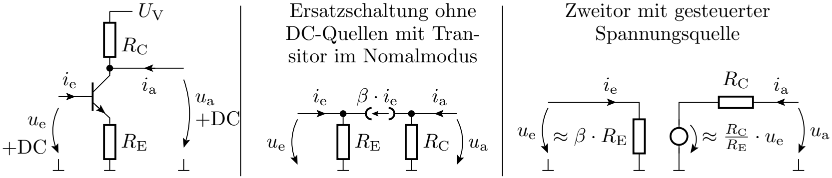
$$r_\mathrm{e} = \left.\frac{u_\mathrm{e}}{i_\mathrm{e}}\right|_{u_\mathrm{a}=0}$$

$$v_\mathrm{R} = \left.\frac{u_\mathrm{e}}{u_\mathrm{a}}\right|_{i_\mathrm{e}=0}$$

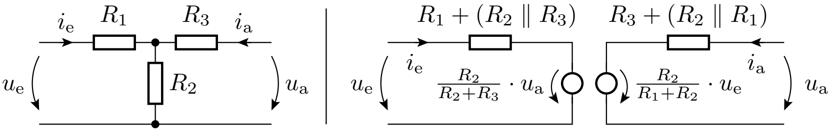
$$r_\mathrm{a} = \left.\frac{u_\mathrm{a}}{i_\mathrm{a}}\right|_{u_\mathrm{e}=0}$$

$$v_\mathrm{U} = \left.\frac{u_\mathrm{a}}{u_\mathrm{e}}\right|_{i_\mathrm{a}=0}$$

- rückwirkungsfreier Verstärker als Zweitor

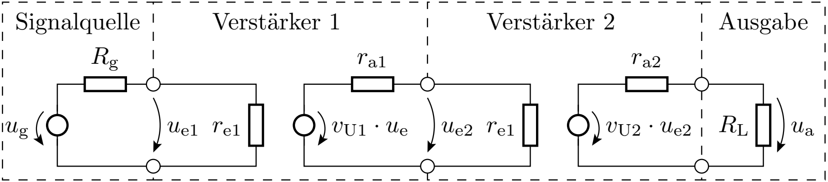


- Widerstandsnetzwerk als Zweitor



  - Ersatzwiderstand: Widerstand, wenn die Spannung auf der anderen Seite null ist.
  - Ersatzquellspannung: Anschlussspannung, wenn der Strom auf derselben Seite null ist.

Verkettung von Zweitoren



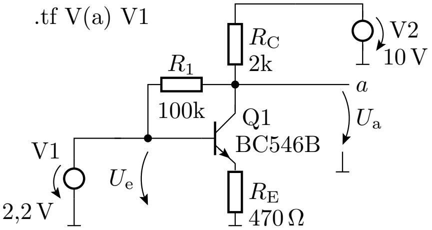
$$u_g \cdot \frac{r_{e1}}{R_g + r_{e1}} \cdot v_{U1} \cdot \frac{r_{e2}}{r_{a1} + r_{e2}} \cdot v_{U2} \cdot \frac{R_L}{R_L + r_{a2}} = u_a$$

Beschreibung der Signalverarbeitung als Folge von

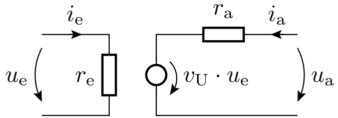
- Dämpfungsgliedern (Spannungsteilern) und
- Verstärkern.

Berechnung der Transferfunktion

(Parameter eines rückwirkungsfreien Zweitors.)



Analyseergebnis



$v_U = -4{,}051$	(transfer function)
$r_e = 16{,}97\,\mathrm{k\Omega}$	(input impedance)
$r_a = 1{,}957\,\mathrm{k\Omega}$	(output impedance)

Vorgehen:

- Schaltung eingeben
- Analyseart »tr« für »transfer function« auswählen
- Ausgabesignal V(a)[1] und Eingabequelle V1 festlegen.

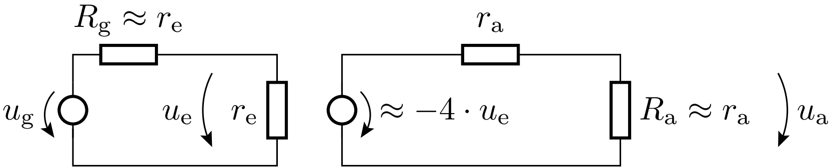
Ergebnis hängt von dem mit V1 eingestellten Arbeitspunkt ab.

[1] »voltage« von a

Was besagt das Ergebnis?

In der Regel wählt man

- Generatorwiderstand gleich Eingangswiderstand und
- Lastwiderstand gleich Ausgangswiderstand.



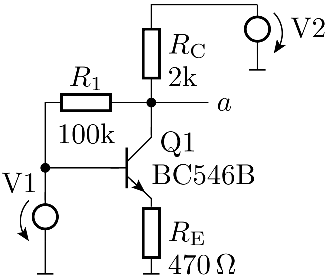
Die Eingangsspannung wird zweimal halbiert und einmal um den Faktor ≈ -4 verstärkt:

$$u_a \approx -u_g$$

Berechnung von Kennlinien

Kennlinienberechnung (DC sweep)

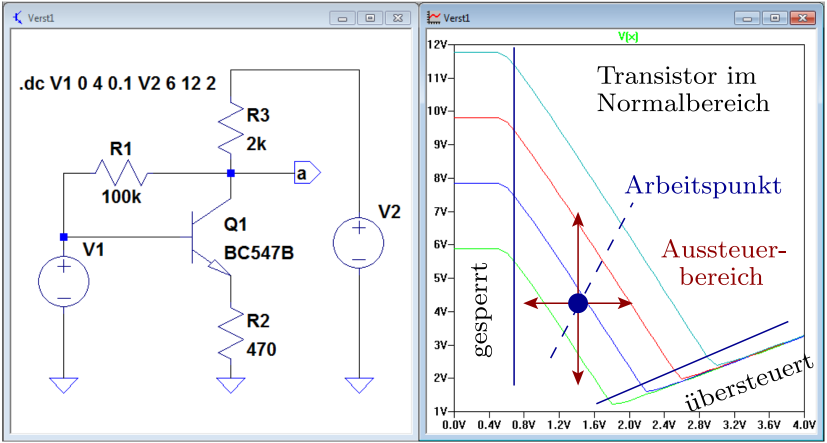
- Kennlinie: Abbildung einer Ein- auf einer Ausgabegröße.
- Kennlinienschar: Mehrere Kennlinienen in Abhängigkeit von weitereren Eingabegrößen.
- Beispiel: Berechnung $U_\mathrm{a} = f\,(\mathrm{V1},\,\mathrm{V2})$



Wiederhole für V2=6V bis 12V in 2V Schritte
  je einen Graf
  wiederhole für V1=0 bis 5V in 0,1V Schritten
    berechne alle Ströme und Spannungen

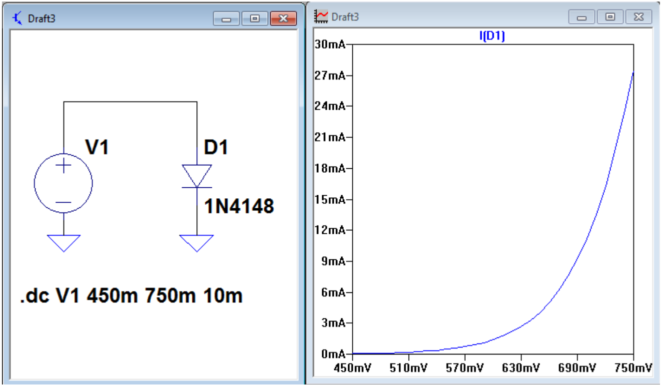
.dc V1 0 5 0.1 V2 6 12 2

- Benötigt z.B. zur Arbeitspunktbestimmung.



- Q1 gesperrt: $U_{\mathrm{a}} =$V2
- Q1 übersteuert: $U_{\mathrm{a}} = \mathrm{V1} - U_{\mathrm{BEF}} + U_{\mathrm{CEX}}$
- Q1 Normalbetrieb: Verstärkung ca. -4
- Arbeitspunkt: Mitte Normalbereich

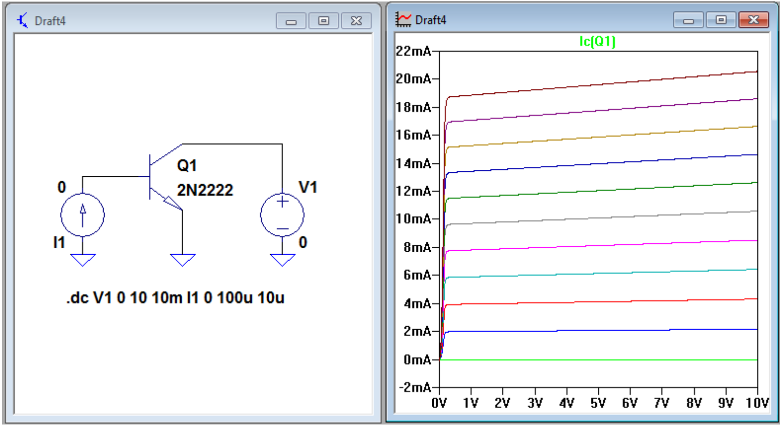
Diodenkennline



- Näherungsweise exponentieller Verlauf:

$$I_{\mathrm{D}} \sim e^{\frac{U_{\mathrm{D}}}{U_{\ldots}}}$$

Transistorkennline



Enspricht nur grob dem Verhalten der bisherigen Ersatzschaltung.

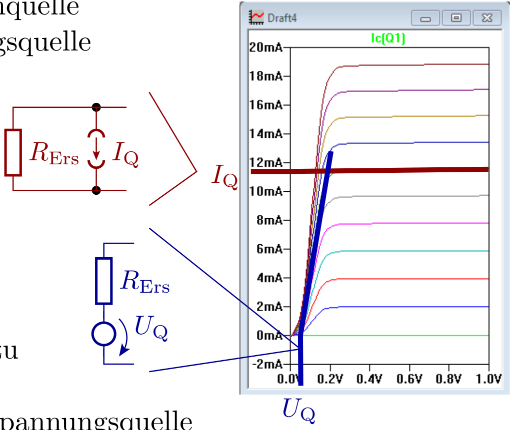
Modellierung

Bisheriges Modell:

- Normalmodus Stromquelle
- Sättigung: Spannungsquelle

Genauere Annäherung:

- Im Normalmodus nimmt I_C mit U_{CE} zu $\Rightarrow$ zusätzlicher R_{Ers} in parallel zur Ersatzstromquelle.
- In der Sättigung nimmt U_{CE} mit I_C zu $\Rightarrow$ zusätzlicher R_{Ers} in Reihe zur Ersatzspannungsquelle



- Weitere Modellverbesserungen folgen später.

Aufgaben und Kontrollfragen

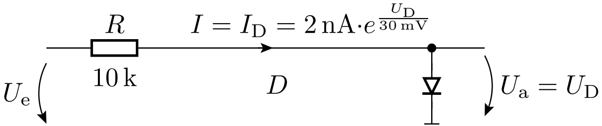
Kontrollfragen

- Was ist ein Arbeitspunkt?
- Was ist ein Signal? Was ist der DC- und was ist der AC-Anteil eines Signals.
- Was ist ein Kleinsignalmodell? Bezieht sich das »klein« auf den DC- oder AC-Anteil?
- Zeichnen Sie die Schaltung, die durch folgende Netzliste beschrieben wird:

```
V1 N001    0  10
R1 N001 N002 1k
R2    0 N002 2k
R3 N002 N003 1k
R4    0 N003 1k
```

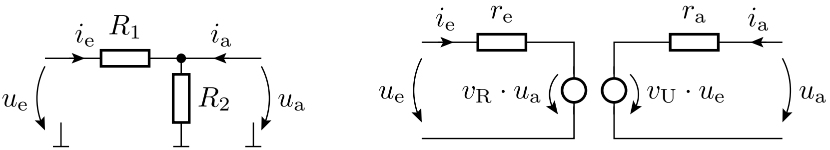
Kleinsignalersatzschaltung RD-Glied

1. Wie groß sind die Ein- und Ausgangsspannung im Arbeitspunkt $I = 1\,\mathrm{mA}$?
2. Bestimmen der Kleinsignalersatzschaltung.
3. Wie groß ist die Amplitude des AC-Ausgangssignal bei einer Eingangsamplitude von $10\,\mathrm{mV}$?



Zweitore, Transferfunktion

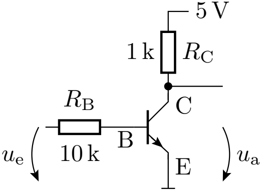
Berechnen Sie für die linke Schaltung (Spannungsteiler) die Parameter r_{e}, r_{a}, v_{U} und v_{R} in der Ersatzschaltung rechts.



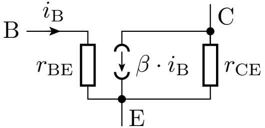
Arbeitpunkt und Transferfunktion Verstärker

Für den nachfolgenden Transistorverstärker wurden messtechnisch im Arbeitspunkt folgende Ersatzschaltungsparameter bestimmt: $r_{\mathrm{e}} = 12\,\mathrm{k}\Omega$, $r_{\mathrm{a}} = 0{,}9\,\mathrm{k}\Omega$ und $v_{\mathrm{U}} = -20$:

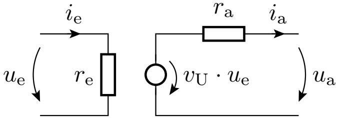
einfacher Transistorverstärker



Ersatzschaltung Transistor



Ersatzschaltung gesamt



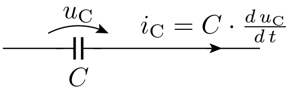
1. Komplettieren Sie die gesamte Ersatzschaltung.
2. Wie groß sind die Parameter r_{BE}, r_{CE} und β des Transistors?

AC-Analyse

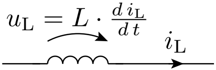
AC-Analyse

Abbildung zeitabhängiger Eingaben auf zeitabhängige Ausgaben.
Zusätzliche Berücksichtigung

- der Ströme durch Kapazitäten:



- und Induktionsspannungen:



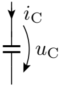
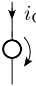
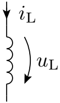
Zwei universelle Berechnungsverfahren

- zeitdiskrete Simulation und
- Analyse im Frequenzbereich.

Zeitdiskrete Simulation

Zeitdiskrete Simulation

- Nachbildung von C und L durch zeitveränderliche Quellen:

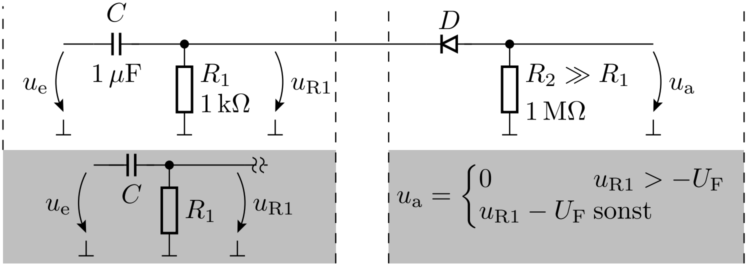
	Original	Ersatz
Kapazität	 i_{C}, u_{C}	 i_{C} $u_{\mathrm{C}}(n+1) = u_{\mathrm{C}}(n) + \frac{\Delta t}{C} \cdot i_{\mathrm{C}}(n)$
Induktivität	 i_{L}, u_{L}	 u_{L} $i_{\mathrm{L}}(n+1) = i_{\mathrm{L}}(n) + \frac{\Delta t}{L} \cdot u_{\mathrm{L}}(n)$

- Berechnung in diskreten Zeitschritten:

```
Wiederhole für jeden Zeitschritt:
    stationäre Schaltungsanalyse
    Berechnen der Quellwerte für den Folgeschritt
```

- Auch für nichtlineare Schaltungen möglich.

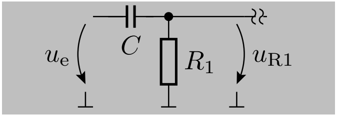
Impulsgatter



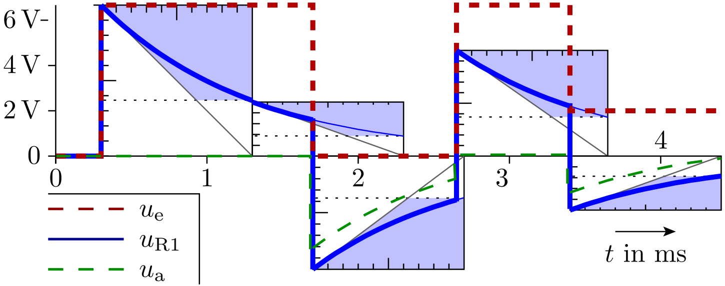
$$u_a = \begin{cases} 0 & u_{R1} > -U_F \\ u_{R1} - U_F & \text{sonst} \end{cases}$$

Abschätzen der Funktion:

- Wegen $R_2 \gg R_1$ Abschätzung u_{R1} unter Vernachlässigung von D und R_2 als geschaltetes RC-Glied mit $\tau = R_1 \cdot C = 1\,\mathrm{ms}$.
- Für negative $u_{R1} < -U_F$ subtrahiert die Diode etwa die Einschaltspannung.



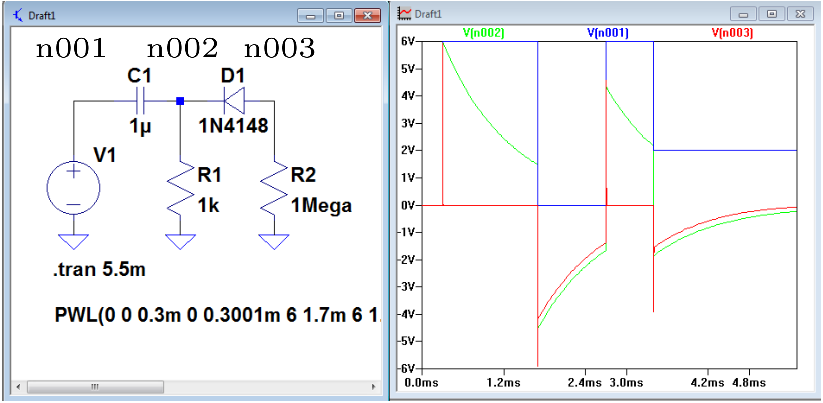
$$u_a = \begin{cases} 0 & u_{R1} > -U_F \\ u_{R1} - U_F & \text{sonst} \end{cases}$$



Beschreibung des stückenweise linearen Eingabesignals:

t in ms	0	0,3	0,3001	1,7	1,7001	2,7	2,7001	3,4	3,4001
u_e in V	0	0	6	6	0	0	6	6	2

Simulation



Abweichung vom geschätzen Verhalten:

- Nadelpulse auf u_a(rote Kurve). Kapazität im Diodenmodell?

Programmierung der Signalquellen

Spannungs- und Stromquellen können für die zeitdiskrete Simulation eine breite Palette von Signalverläufen bereitstellen.

- periodischer Pulse mit den Parametern:
  - Einschaltzeit, Flankenanstieg und -abfall.
- Stückweise linear mit den Parameter:
  - Zeit-Wert-Punkte, auch als Datei
- Sinus mit den Parametern:
  - DC-Offset, Amplitude, Frequenz
  - Startverzögerung, Dämpfung, Startphase
  - Anzahl der Zyklen
- Exponentialfunktion
- Modulierte Signale

Frequenzgang

Frequenzbereich

Schaltungsanalyse für komplexe e-Funktionen:

$$\underline{X}(\omega)\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t} = |\underline{X}(\omega)|\cdot(\cos(\omega\cdot t+\varphi(\underline{X}(\omega))) + j\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi(\underline{X}(\omega))))$$

Repräsentiert zusammen mit dem konjugiert komplexen Zeitsignal $\underline{X}(-\omega)\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t}$ ein skaliertes, phasenverschobenes Kosinussignal.

- Proportionalität von $\underline{U}$ und $\underline{I}$ auch an C und L:

$$\begin{aligned}\underline{X}_{\mathrm{C}} &= \frac{\underline{U}_{\mathrm{C}}}{\underline{I}_{\mathrm{C}}} = \frac{1}{j\omega C}\\ \underline{X}_{\mathrm{L}} &= \frac{\underline{U}_{\mathrm{L}}}{\underline{I}_{L}} = j\omega L\end{aligned}$$

- Strom- und Spannungsberechnung durch Lösung eines frequenzabhänigen Gleichungssystems.

$\omega = 2\cdot\pi\cdot f$ – Kreisfrequenz; $\varphi(\dots)$– Phase von ...

Amplituden- und Phasenfrequenzgang

- Komplexe Widerstände, Übertragungsfunktionen, ... linearer Systeme sind Brüche von Termen $\left(1+j\cdot\frac{f}{f_0}\right)$, z.B.:

$$\underline{X}=\frac{1+\frac{j\cdot f}{10\,\mathrm{Hz}}}{\left(1+\frac{j\cdot f}{1\,\mathrm{kHz}}\right)\cdot\left(1+\frac{j\cdot f}{100\,\mathrm{kHz}}\right)}$$

Für Überschläge:

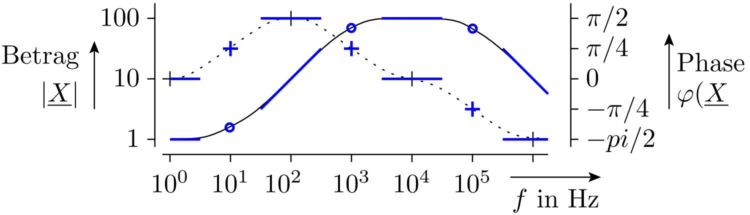
$$\left(1+j\cdot\frac{f}{f_0}\right)\approx\begin{cases}1 & \text{für f}\ll f_0\\ 1+j & \text{für f}=f_0\\ j\cdot\frac{f}{f_0} & \text{für f}\geq f_0\end{cases}$$

f	$<3\,\mathrm{Hz}$	$10\,\mathrm{Hz}$	$30\,\mathrm{Hz}\ldots 300\,\mathrm{Hz}$	$1\,\mathrm{kHz}$
$\underline{X}$	1	$1+j$	$j\cdot\frac{f}{10\,\mathrm{Hz}}$	$\frac{j\cdot 100}{1+j}=\frac{100\cdot(1+j)}{\sqrt{2}}$
$\lvert\underline{X}\rvert$	1	$\sqrt{2}$	$\frac{f}{10\,\mathrm{Hz}}$	$\frac{100}{\sqrt{2}}$
$\varphi(\underline{X})$	0	$1+j\mapsto\frac{\pi}{4}$	$j\mapsto\frac{\pi}{2}$	$1+j\mapsto\frac{\pi}{4}$

$$\underline{X} = \frac{1 + \frac{j \cdot f}{10\,\mathrm{Hz}}}{\left(1 + \frac{j \cdot f}{1\,\mathrm{kHz}}\right) \cdot \left(1 + \frac{j \cdot f}{100\,\mathrm{kHz}}\right)}$$

f	$3\,\mathrm{kHz} \ldots 30\,\mathrm{kHz}$	$100\,\mathrm{kHz}$	$< 300\,\mathrm{Hz}$
$\underline{X}$	100	$\frac{100}{1+j} = \frac{100 \cdot (1-j)}{\sqrt{2}}$	$\frac{100}{\frac{j \cdot f}{100\,\mathrm{kHz}}} = -\frac{j \cdot 10\,\mathrm{MHz}}{f}$
$\lvert\underline{X}\rvert$	100	$\frac{100}{\sqrt{2}}$	$\frac{10\,\mathrm{MHz}}{f}$
$\varphi(\underline{X})$	0	$1 - j \mapsto -\frac{\pi}{4}$	$-j \mapsto -\frac{\pi}{2}$

Betrags- und Phasenfrequenzgang (logarithmisch):



Dezibel

Kennzeichnung des dekadischen Logarithmus des Verhältnisses zweier Energie- oder Leistungsgrößen:

$$L = 10 \cdot \lg\left(\frac{P_2}{P_1}\right)\ \mathrm{dB}$$

Für die Quadrate der Verhältnisse der Effektivwerte von Strom oder Spannung:

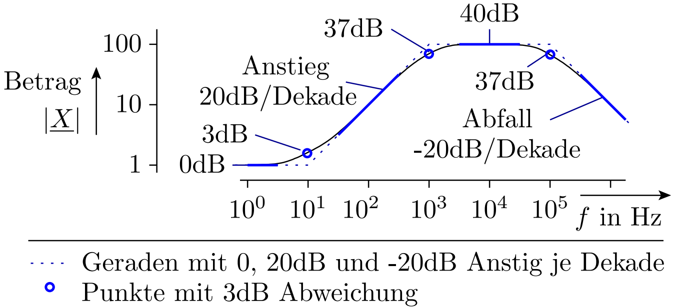
$$L = 10 \cdot \lg\left(\frac{U_{\mathrm{eff.2}}^2}{U_{\mathrm{eff.1}}^2}\right)\ \mathrm{dB} = 20 \cdot \lg\left(\frac{U_{\mathrm{eff.2}}}{U_{\mathrm{eff.1}}}\right)\ \mathrm{dB}$$

$\frac{P_2}{P_1}$	0,25	0,5	1	2	4	100
$\frac{U_{\mathrm{eff.2}}}{U_{\mathrm{eff.1}}}$	0,5	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	10
L	≈ -6	≈ -3	0	≈ 3	≈ 6	20

Für Abschätzungen setzt sich der Amplitudenfrequenzgang (Betragsfunktion) zusammen:

- aus Geradenstücken, deren Anstieg ein ganzzahliges Vielfaches von 20dB ist, und
- Punkten an den Knicken mit 3dB Abstand.

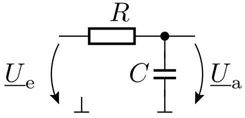
$$\underline{X} = \frac{1+\frac{j\cdot f}{10\,\mathrm{Hz}}}{\left(1+\frac{j\cdot f}{1\,\mathrm{kHz}}\right)\cdot\left(1+\frac{j\cdot f}{100\,\mathrm{kHz}}\right)}$$



RCL-Glieder

RC-Spannungsteiler (Tiefpass)

Spektralanteile mit tiefen Frequenzen können passieren (Kapazität sperrt). Spektralanteile mit hohen Frequenzen werden gedämpft (Kapazität leitet).



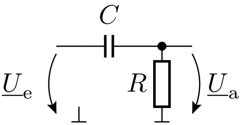
$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{\frac{1}{j\cdot\omega\cdot C}}{R + \frac{1}{j\cdot\omega\cdot C}} = \frac{1}{1 + j\cdot\omega\cdot R\cdot C} = \frac{1}{1 + j\cdot\frac{f}{f_0}}$$

$f_0 = 1/2\pi\cdot R\cdot C$ – Übergangsfreqenz. Charakteristische Werte:

	$f \ll f_0$	$f = f_0$	$f \gg f_0$
$\underline{U}_a/\underline{U}_e$	1	$\frac{1-j}{\sqrt{2}}$	$-j\cdot\frac{f_0}{f}$
$\lvert\underline{U}_a/\underline{U}_e\rvert$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{f_0}{f}$
$\varphi(\underline{U}_a) - \varphi(\underline{U}_e)$	0	$1-j \mapsto -\frac{\pi}{4}$	$-j \mapsto -\frac{\pi}{2}$

CR-Spannungsteiler (Hochpass)

Spektralanteile mit tiefen Frequenzen werden gedämpft (Kapazität sperrt). Spektralanteile mit hohen Frequenzen können passieren (Kapazität leitet).

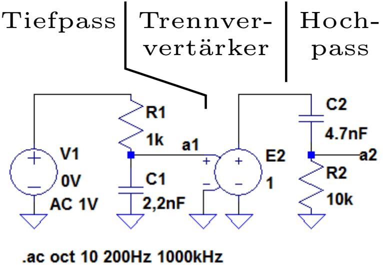


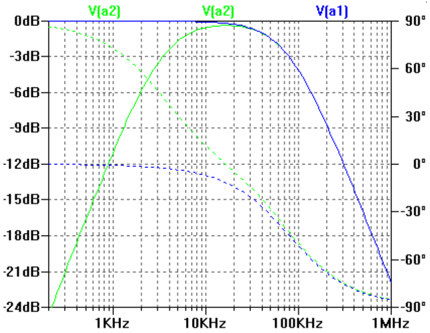
$$\frac{\underline{U}_{\mathrm{a}}}{\underline{U}_{\mathrm{e}}} = \frac{R}{R + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot R \cdot C}} = \frac{1}{1 - j \cdot \frac{f_0}{f}}$$

$f_0 = 1/2\pi \cdot R \cdot C$ – Übergangsfreqenz. Charakteristische Werte:

	$f \ll f_0$	$f = f_0$	$f \gg f_0$
$\underline{U}_{\mathrm{a}}/\underline{U}_{\mathrm{e}}$	$j \cdot \frac{f}{f_0}$	$1 + j$	1
$\lvert\underline{U}_{\mathrm{a}}/\underline{U}_{\mathrm{e}}\rvert$	$\frac{f}{f_0}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\varphi(\underline{U}_{\mathrm{a}}) - \varphi(\underline{U}_{\mathrm{e}})$	$j \mapsto \frac{\pi}{2}$	$1 + j \mapsto \frac{\pi}{4}$	0

RC-Glieder mit Trennverstärker

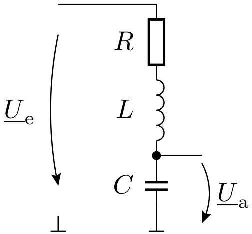




$$\frac{\underline{U}_{\mathrm{a1}}}{\underline{U}_{\mathrm{e}}} = \frac{1}{1 - j \cdot \frac{f}{f_1}} \text{ mit } f_1 = 2 \cdot \pi \cdot 1\,\mathrm{k}\Omega \cdot 2{,}2\,\mathrm{nF} = 72\,\mathrm{kHz}$$

$$\frac{\underline{U}_{\mathrm{a2}}}{\underline{U}_{\mathrm{a1}}} = \frac{1}{1 - j \cdot \frac{f_2}{f}} \text{ mit } f_2 = 2 \cdot \pi \cdot 10\,\mathrm{k}\Omega \cdot 4{,}7\,\mathrm{nF} = 3{,}4\,\mathrm{kHz}$$

Reihenschwingkreis (Bandpass)



Nach Spannungsteilergesetz:

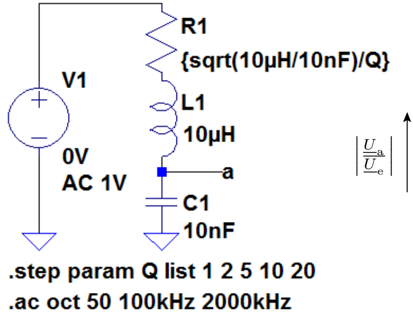
$$\begin{aligned}\underline{U}_\mathrm{a} &= \underline{U}_\mathrm{e} \cdot \frac{\frac{1}{j\cdot\omega\cdot C}}{R+j\cdot\omega\cdot L+\frac{1}{j\cdot\omega\cdot C}} \\ &= \underline{U}_\mathrm{e} \cdot \frac{1}{1+j\cdot\frac{f}{Q\cdot f_0}-\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}\end{aligned}$$

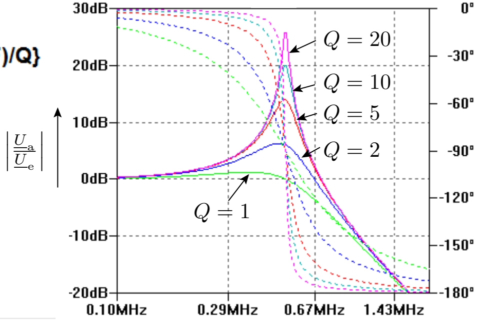
($f_0 = 1/2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}$ – Resonanzfrequenz; $Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$ – Güte).

Charakteristische Werte:

	$f \ll f_0$	$f = f_0$	$f \gg f_0$
$\underline{U}_\mathrm{a}/\underline{U}_\mathrm{e}$	1	$-j \cdot Q$	$-\left(\frac{f_0}{f}\right)^2$
$\lvert\underline{U}_\mathrm{a}/\underline{U}_\mathrm{e}\rvert$	1	Q	$\left(\frac{f_0}{f}\right)^2$
$\varphi(\underline{U}_\mathrm{a}) - \varphi(\underline{U}_\mathrm{e})$	0	$-j \mapsto -\frac{\pi}{2}$	$-1 \mapsto -\pi$

Simulation des Frequenzgangs



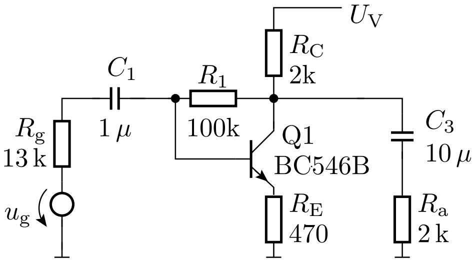


Resonanzfrequenz:

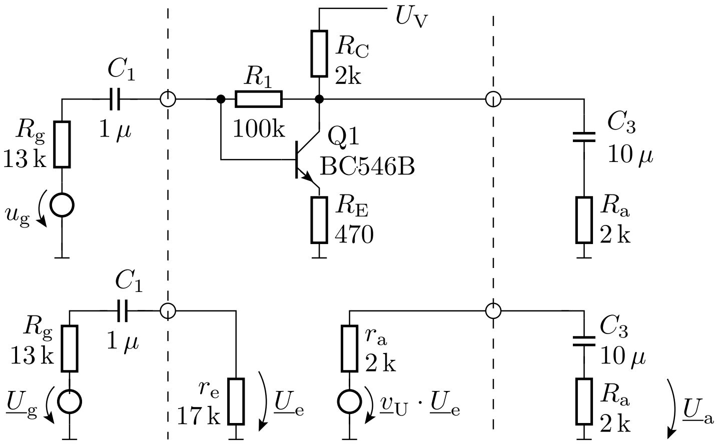
$$f_0 = 1/2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C} = 503\,\mathrm{kHz}\surd$$

Verstärker

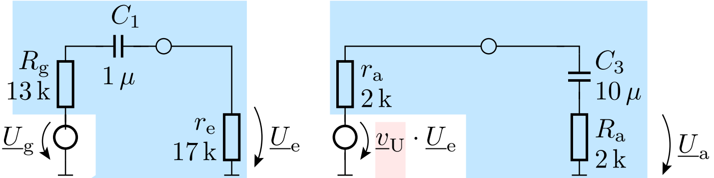
Frequenzgang eines Transistorverstärkers



- Die Kapazitäten C_1und C_3 entkoppeln den Ein- und Ausgang gleichspannungsmäßig und begrenzen den Frequenzbereich nach unten.
- Die Transistorschaltung zwischen C_1und C_3 kann durch ein Zweitor mit $r_e = 17\,k$, $r_a \approx 2\,k$ und $v_U \approx -4$ ersetzt werden (Rechnung auf Folie Zweipolparameterberechnung)



- Der Transistor begrenzt das Übertragungsband mit $\omega_{0.T}$ (Übergangsfrequenz des Transistorverstärkers) nach oben.
- Das Ein- und das Ausgangs-RC-Glied begrenzen das Übertrgungsband mit $\omega_{0.1}$ und $\omega_{0.2}$ nach unten.



$$\underline{U}_g \cdot \frac{r_e}{r_e+R_g} \cdot \frac{1}{1+j\cdot\frac{\omega_{0.1}}{\omega}} \cdot (-4) \cdot \frac{1}{1+j\cdot\frac{\omega}{\omega_{0.v}}} \cdot \frac{R_a}{r_a+R_a} \cdot \frac{1}{1+j\cdot\frac{\omega_{0.2}}{\omega}} = \underline{U}_a$$

- Übergangsfrequenzen der RC-Glieder:

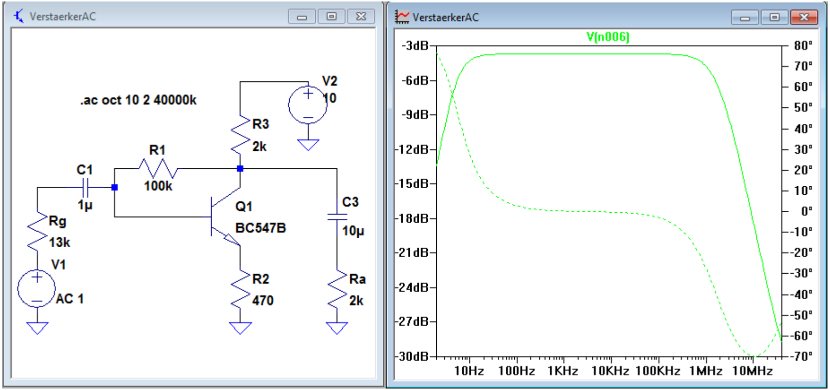
$$f_{0.1} = \frac{1}{2\pi\cdot 30\,\mathrm{k\Omega}\cdot 1\,\mu\mathrm{F}} = 5{,}3\,\mathrm{Hz}$$

$$f_{0.2} = \frac{1}{2\pi\cdot 4\,\mathrm{k\Omega}\cdot 10\,\mu\mathrm{F}} = 4{,}0\,\mathrm{Hz}$$

Verstärkung im mittleren Bereich (z.B. 1 kHz):

$$|\underline{v}| = \left|\frac{17\,\mathrm{k\Omega}}{30\,\mathrm{k\Omega}}\cdot(-4)\cdot\frac{2\,\mathrm{k\Omega}}{4\,\mathrm{k\Omega}}\right| = 1{,}133\ \ (\approx 1\,\mathrm{dB})$$

Simulationsergebnis



- Untere Bandgrenze ca. 5 Hz $\surd$.
- Verstärkung ca. -4 dB statt 1 dB (?).

Übergangs- und Grenzfrequenzen eines Verstärkers

Verstärker ohne C- und L-Beschaltung haben im allgemeinen für niedrige Frequenzen eine konstante Verstärkung und ab einer Frequenz f_0 wie ein RC-Glied einen Verstärkungsabfall von 20dB pro Dekade:

$$\underline{v} = \frac{v_0}{1 + j \cdot \frac{f}{f_0}} \tag{1}$$

- Die Übergangsfrequenz ist die Frequenz f_0, bei der Betrag der Verstärkung auf $\frac{1}{\sqrt{2}}$ abgefallen ist.
- Die Grenzfrequenz ist die Frequenz, bei der der Betrag der Verstärkung auf 1 abgefallen ist:

$$f_{\mathrm{g}} = f\big|_{|\underline{v}=1|}$$

Für Verstärker mit Frequenzgang nach Gl. 1:

$$\left| v_0 \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \frac{f}{f_0}} \right| = 1 \;\Rightarrow f_{\mathrm{g}} \approx v_0 \cdot f_0$$

Spektralanalyse

Fouriertransformation

Jedes bandbegrenzte periodische Signal lässt sich als Summe komplexer Exponentialterme darstellen:

$$x(t) = \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \underline{X}(m) \cdot e^{j \cdot m \cdot \omega_0 \cdot t}$$

- $f_0 = 1/T$ – Grundfrequenz des Signals
- T – Periode des Signals
- $\underline{X}(m)$ – Spektrakwert bestehend aus Betrag und Phase
- $\left(\frac{N}{2} - 1\right) \cdot f_0$ – höchste Frequenz, für die der Spektralwert $\neq 0$ sein darf[2].
- Die Berechnung der N Spektralwerte erfordert N (äquidistante) Zeitwerte.
- N linear unabhängige Gleichungen mit N Unbekannten; numerisch lösbar.

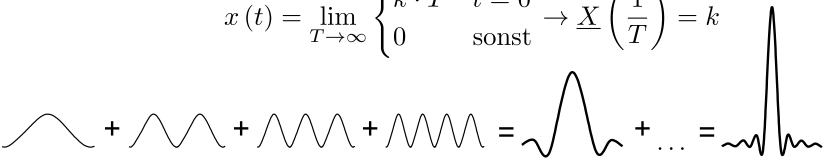
[2] Sonst ist das berechnete Spekrum nur eine Näherung.

- Für reele $x(t)$ sind alle Spektralwertpaare Paare $\underline{X}(m)$, $\underline{X}(-m)$ zueinander konjugiert komplex und $\underline{X}\left(-\frac{N}{2}\right) = 0$:

$$x(t) = X(0) + 2 \cdot \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}-1} \left|\underline{X}(m)\right| \cdot \cos\left(m \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot t + \mathrm{Phase}\left(\underline{X}(m)\right)\right)$$

  $X(0)$ – Gleichanteil.
- Annäherung nichtperiodischer Signale durch
  - $T \to \infty$ und $f_0 = 1/T \to 0$
  - diskrete Spektralfunktion → kontinuierliche Spektralfunktion, z.B. Impuls:

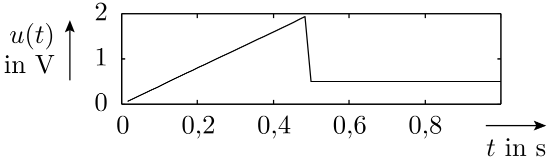
$$x(t) = \lim_{T \to \infty} \begin{cases} k \cdot T & t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \to \underline{X}\left(\frac{1}{T}\right) = k$$



Beispiel

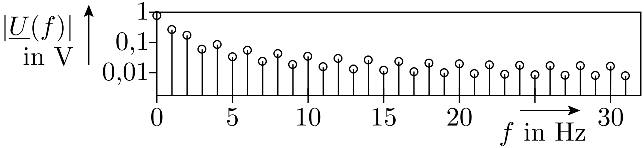
- Stückweise lineare Funktion mit den Eckpunkten 0,0; ... und Periode 1
- Erzeugung und Darstellung der Abtastfolge mit Matlab

```
TP = 1;                      % Periodendauer in s
N  = 2^6;                    % Abtastwerte je Periode
u  = [ ...  ];               % Vorgabe der N Abtastwerte
t  = (0:N-1)*TP/N;           % Folge der N Zeitwerte
subplot(3,1,1); plot(t,u);   % Darstellung der Zeitfunktion
```

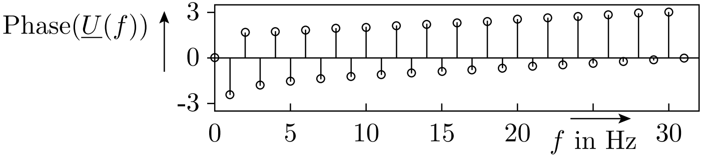


- Berechnung des Spektrums

```
U = fft(u)/N;                            % Berechnung des Spektrums
f = (0:N/2-1)/TP;                        % Vektor der positiven Freq.
subplot(3,1,2); stem(f, abs(U(1:N/2))s); % Betrag der Spektralwerte
```

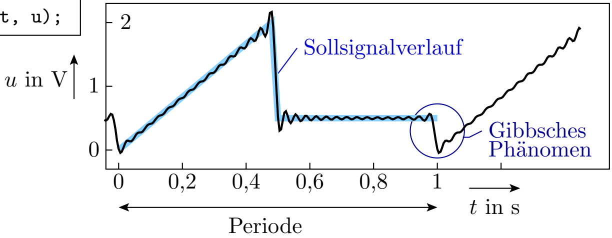



```
subplot(3,1,3); stem(f, angle(U(1:N/2)));   % Phasenverschiebung
                                            % der Spektralwerte
```



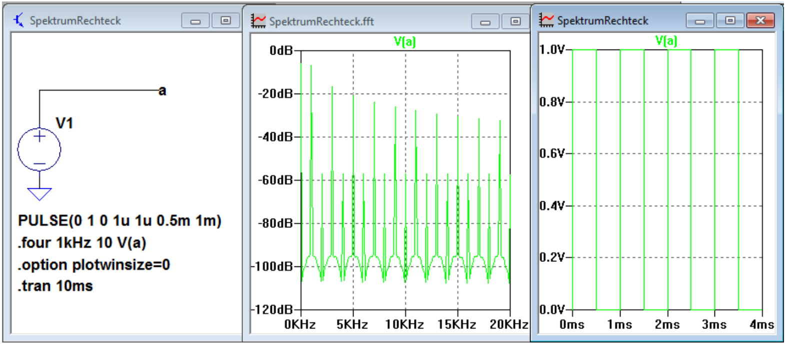
- Nicht stetige Zeitfunktionen haben kein bandbegrenztes Spektrum. Berechnung des Zeitsignals zum berechneten Spektrum:

```
for n=1:300                      % für 300 Zeitwert
 t(n)=(n-10)/200;                % Abtastzeitpunkt festlegen
 u(n)=U(1);                      % Wert mit Gleichanteil initialisieren
 for m=2:32                      % für die 31 Spektralterme mit f > 0
  u(n)=u(n)+2*real(U(m)*e^(j*2*pi*f(m)*t(n)));
 end;                            % doppelten Realteil hinzufügen
end;
plot(t, u);
```



- Gibbsches Phänomen: Ripple an Unstetigkeitsstellen.

Spektrumberechnung mit LTSpice



- Zeitdiskrete Simulation
- Dartstellungs des Spektrum mit Menü: »view«, »fft«, Auswahl des Signals.

Mit der zusätzlichen Spice-Anweisung

```
.four 1kHz 10 V(a)
```

werden die Spektralwerte für 1kHz und 10 Oberwellen berechnet und im ErrLog-File gespeichert:

Harmonic Number	Frequency [Hz]	Fourier Component	Normalized Component	Phase [degree]	Normalized Phase [deg]
1	1.000e+03	6.366e-01	1.000e+00	-0.36°	0.00°
2	2.000e+03	2.000e-03	3.142e-03	89.28°	89.64°
3	3.000e+03	2.122e-01	3.333e-01	-1.08°	-0.72°
4	4.000e+03	2.000e-03	3.141e-03	88.56°	88.92°
5	5.000e+03	1.273e-01	2.000e-01	-1.80°	-1.44°
6	6.000e+03	2.000e-03	3.141e-03	87.84°	88.20°
7	7.000e+03	9.092e-02	1.428e-01	-2.52°	-2.16°
8	8.000e+03	2.000e-03	3.141e-03	87.12°	87.48°
9	9.000e+03	7.070e-02	1.111e-01	-3.24°	-2.88°
10	1.000e+04	1.999e-03	3.141e-03	86.40°	86.76°

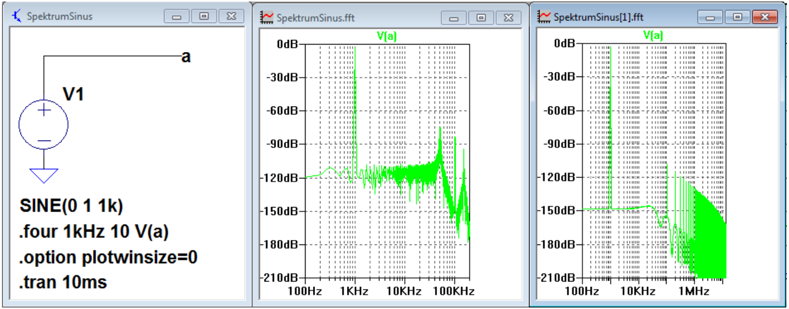
Die Option

```
.option plotwinsize=0
```

deaktiviert eine interen Datenkomprimierung. Ohne diese Deaktivierung entstehen zu große numerische Fehler.

- Das Spektrum eines Sinussignal ist nur für eine Frequenz ungleich null.

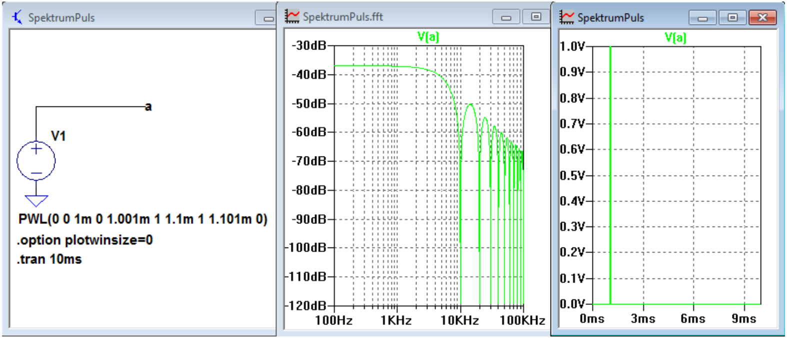
mit Kompression ohne Kompression



- Mit der Option sind die Berechnungsfehler der Spektralwerte, die null sein müssten, um durchschnittlich etwa 30 dB geringer [3].

[3] Quelle und weitere Genauigkeitsverbesserrung: http://www.audio-perfection.com/spice-ltspice/distortion-measurements-with-ltspice.html

Das Spektrum eines Impulses



- bis zur Frequenz $\gg 1/2\pi \cdot$Pulsebreite$\ll$ konstant.

Klirrfaktor

Spektrum und Nichtlinearität

- Im Frequenzbereich wird ein im Arbeitspunkt linearisiertes System betrachtet.
- Alternative: Annäherung einer Kennlinie im Arbeitspunkt x_0 durch eine Tailorreihe:

$$f\left(x-x_0\right)=\underbrace{f\left(x_0\right)+\frac{f'\left(x_0\right)}{1!}\cdot x}_{\text{lineare Näherung}}+\underbrace{\frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\cdot x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\cdot x^n+}_{\text{vernachlässigte nichtlineare Anteile}}$$

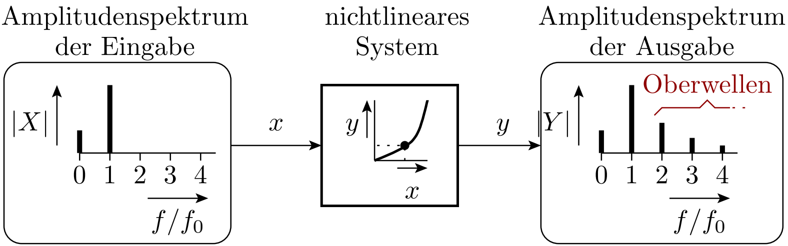
mit x als Signal, das sich als Summer von Kosinussignalen

$$|\underline{X}|\cdot\cos\left(\omega t+\varphi\left(\underline{X}\right)\right)$$

darstellen lässt.

- Die n-te Potenzen eines Kosinussignal lässt sich in eine Summe von Kosinussignalen mit bis zur n-fachen Frequenz darstellen:

$$\cos(\omega t)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos((n-2k) \cdot \omega \cdot t)$$



- Zu jedem Spektralanteil im Eingangssignal entstehen Oberwellen mit einem ganzzahligen Vielfachen der Frequenz.

Herleitung:

$$\cos\left(\omega t\right)^{n}=\frac{1}{2^{n}}\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)\cos\left(\left(n-2k\right)\cdot\omega\cdot t\right)$$

$$\cos\left(\omega\cdot t\right)^{n} = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{j\cdot\omega\cdot t}+e^{-j\cdot\omega\cdot t}\right)^{n}$$

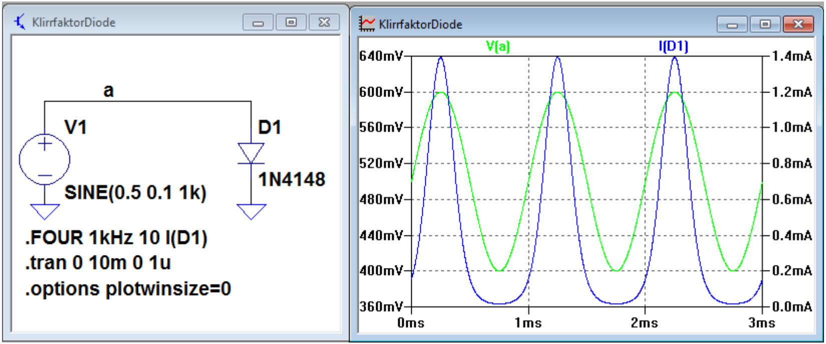
Nach dem Binomischen Lehrsatz:

$$\left(e^{j\cdot\omega\cdot t}+e^{-j\cdot\omega\cdot t}\right)^{n} = \sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)\cdot\underbrace{e^{j\cdot\omega\cdot t\cdot(n-k)}\cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t\cdot k}}_{e^{j\cdot\omega\cdot t\cdot(n-2k)}}$$

Summe enthält paarweise konjugiert komplexe Terme, z.B für $n=4$:

k	0	1	2	3	4
Exponent: $n-2k$	4	2	0	-2	-4
$\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)$	1	4	6	4	1

Signalverzerrung an einer Diode



- Die Strom-Spannungskennlinie einer Diode ist näherungsweise eine Exponentialfunktion.
- Der untere Teil wird gestaucht und der obere gestreckt.

- Spektralwerte des Diodenstroms berechnet mit:

```
.four 1kHz 10 V(a)
```

Harmonic Number	Frequency [Hz]	Fourier Component	Phase [degree]
1	1.000e+03	5.927e-04	0.01°
2	2.000e+03	2.740e-04	-89.99°
3	3.000e+03	9.073e-05	-179.98°
4	4.000e+03	2.303e-05	90.03°
5	5.000e+03	4.649e-06	0.03°
6	6.000e+03	7.509e-07	-89.96°
7	7.000e+03	9.288e-08	-179.96°
8	8.000e+03	6.882e-09	89.99°
9	9.000e+03	4.010e-10	-178.20°
10	1.000e+04	2.657e-10	90.08°

Total Harmonic Distortion: 48.864496%

Klirrfaktor (Harmonic Distortion)

- Maß der Verzerrung. Bei Audiosignalen als »klirren« wahrnehmbar.
- Anteil der Energie der Oberwellen an der Gesamtenergie. Verhältnis der Effektivwerte:

$$k = \sqrt{\frac{\sum_{i=2}^{\infty} \left|\underline{X}\left(i \cdot f_0\right)\right|^2}{\sum_{i=1}^{\infty} \left|\underline{X}\left(i \cdot f_0\right)\right|^2}}$$

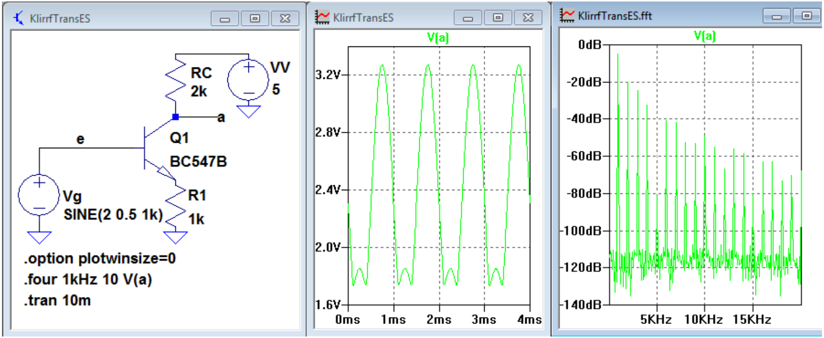
- Im Beispiel:

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{\left(2{,}740e \cdot 10^{-4}\right)^2 + \left(9{,}073 \cdot 10^{-5}\right)^2 + \ldots}{\left(5{,}927 \cdot 10^{-4}\right)^2 + \left(2{,}740e \cdot 10^{-4}\right)^2 + \left(9{,}073 \cdot 10^{-5}\right)^2 + \ldots}} \\ &= 48{,}8 \end{aligned}$$

- Das Ergebnis steht unter den Spektralwerten im SPICE Error Log:

```
Total Harmonic Distortion: 48.864496%
```

Der Klirrfaktor eines Verstärkers



- Für zu große Werte der Eingangsspannung geht der Transistor in die Übersteuerung.
- Änderung der Verstärkung von -2 nach 1.

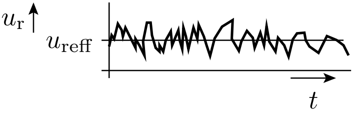
Fourier-Koeffizienten und Klirrfaktor aus dem SPICE Error Log:

Harmonic Number	Frequency [Hz]	Fourier Component	Normalized Component	Phase [degree]
1	1.000e+03	7.883e-01	1.000e+00	-180.00°
2	2.000e+03	1.396e-01	1.770e-01	-90.04°
3	3.000e+03	8.518e-02	1.081e-01	179.96°
4	4.000e+03	3.380e-02	4.287e-02	90.03°
5	5.000e+03	1.275e-04	1.618e-04	44.24°
6	6.000e+03	1.318e-02	1.671e-02	89.62°
7	7.000e+03	1.124e-02	1.426e-02	-0.06°
8	8.000e+03	3.207e-03	4.068e-03	-88.60°
9	9.000e+03	3.201e-03	4.060e-03	-1.90°
10	1.000e+04	4.716e-03	5.983e-03	-90.54°

Total Harmonic Distortion: 21.307795%

Rauschen

Rauschen

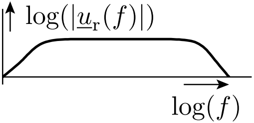


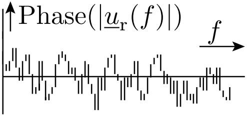
Ein Rauschsignal ist ein Zufallssignal, verursacht durch die thermische Bewegung der Ladungsträger.

- Kenngröße Effektivwert / Leistungsmittelwert: quadratischer Mittelwert im betrachteten Zeitfenster:

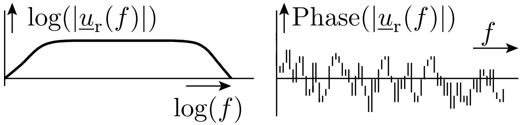
$$u_{\text{reff}}^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} u_{\text{r}}^2 \cdot dt$$

- Im Spektralbereich hat Rauschen einen vorhersagbaren Amplituden- und einen zufälligen Phasenfrequenzgang:





Effektivwertberechnung aus dem Spektrum



Das Quadrat des Effektivwertes ist das Integral über alle Effektivwertquadrate:

$$u_{\mathrm{reff}}^2 = \int_{f_\mathrm{u}}^{f_\mathrm{o}} |\underline{u}_\mathrm{r}(f)|^2 \cdot df$$

$$i_{\mathrm{reff}}^2 = \int_{f_\mathrm{u}}^{f_\mathrm{o}} |\underline{i}_\mathrm{r}(f)|^2 \cdot df$$

($|\underline{u}_\mathrm{r}(f)|$ – Betrag Rauschspannungsdichte; $|\underline{i}_\mathrm{r}(f)|$ – Betrag Rauschstromdichte; f_u, f_o – untere und obere Grenze des Frequenzbereichs, für den das Rauschen bestimmt wird).

Rauschquellen

Ursache für das Rauschen sind thermische Bewegung der Ladungsträger. Rauscharten:

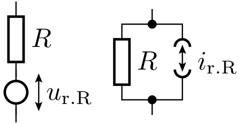
- weißes Rauschen: Rauschdichte für alle Frequenzen gleich.
- 1/f-Rauschen: Rauschdichte nimmt umgekehrt proportional mit der Frequenz ab.

Elektronische Schaltungen haben eine begrenzte Bandbreite. Es interessiert nur das Rauschen im genutzten Frequenzbereich.

Widerstände haben eine temperaturabhängige Rauschleistung.

- Rauschspannungsdichte:
$$|\underline{u}_{\mathrm{r.R}}(f)| = \sqrt{4 \cdot k \cdot T \cdot R}$$
- Rauschstromdichte:
$$|\underline{i}_{\mathrm{r.R}}(f)| = \sqrt{\frac{4 \cdot k \cdot T}{R}}$$

Widerstand mit Rauschquelle



(k – Boltzmannkonstate; T – Temperatur).

pn-Übergänge generieren einen vom (Diffusions-) Strom abhängigen Rauschstrom:

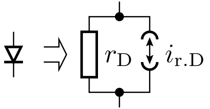
- weißes Rauschen:

$$|\underline{i}_{\mathrm{r.sd}}(f)| = \sqrt{2 \cdot q \cdot I_{\mathrm{D}}}$$

- $1/f$ – Rauschen (Schrotrauschen):

$$|\underline{i}_{\mathrm{r.fd}}(f)| = \sqrt{\frac{k_{1/f} \cdot I_{\mathrm{D}}^{\gamma_{1/f}}}{f}}$$

Kleinsignalersatzschaltung Diode mit Rauschstromquelle

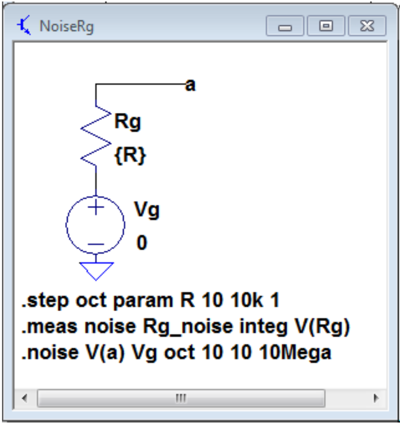


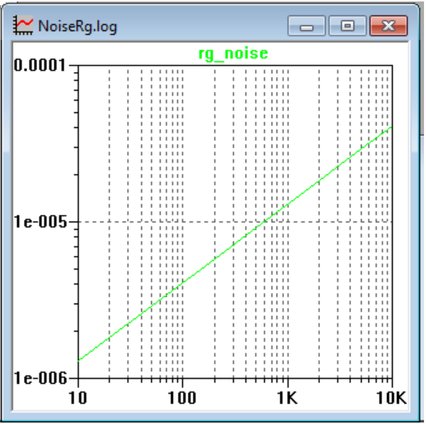
(q – Elementarladung; I_{D} – Diodenstrom; $k_{1/f}$ – Schrotrauschkoeffizient, experimentell zu bestimmen (in Spice Kf); $\gamma_{1/f}$ – Schrotrauschexponent, typ 1...2 (in Spice Af)).

- Der Simulator berechnet für jede Rauschquelle einzeln und für alle Rauschquellen zusammen die verursachten effektiven Rauschspannung- /-stromdichten am Schaltungsausgang.
- Berechnung der Effektivwerte $u/i_{\mathrm{reff}} = \sqrt{\int_{f_{\mathrm{u}}}^{f_{\mathrm{o}}} (...)^2 \cdot df}$ mit »integ« oder »strg-mouseklick«

Signalquelle mit Innenwiderstand

- Simulation zur Bestimmen der effektiven Rauschspannung für unterschiedliche Generatorwiderstände im Frequenzbereich von 10 Hz bis 10 MHz.



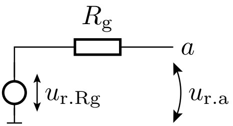


Kontrolle des Simulationsergebnisses

In der Schaltung entsteht weißes Rauschen an R_g ($T = 300\,\mathrm{K}$):

$$\begin{aligned} u_\mathrm{reff}(R_\mathrm{g}) &= \sqrt{\int_{f_\mathrm{u}}^{f_\mathrm{o}} 4 \cdot k \cdot T \cdot R_\mathrm{g} \cdot (f_\mathrm{o} - f_\mathrm{u})} \\ &= \sqrt{4 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K} \cdot 300\,\mathrm{K} \cdot R_\mathrm{g} \cdot (10\,\mathrm{MHz} - 10\,\mathrm{Hz})} \\ &= 4{,}07 \cdot 10^{-7}\sqrt{\mathrm{W}} \cdot \sqrt{R_\mathrm{g}} \end{aligned}$$

R_g in Ω	10	100	1k	10k
$u_\mathrm{reff}(R_\mathrm{g})$ in µV	1,29	4,07	12,9	40,7

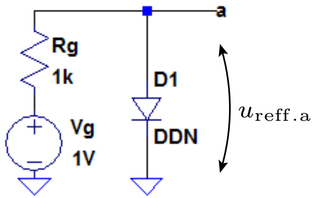


- Die Rauschspannungsquelle liegt in Reihe zum Ausgang:

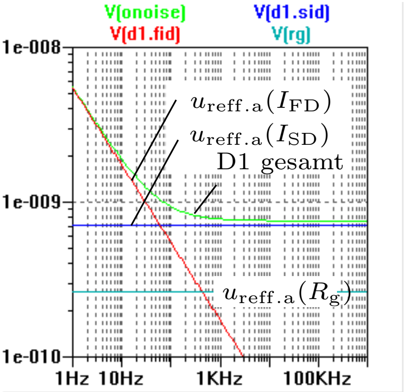
$$u_\mathrm{reff.a} = u_\mathrm{reff}(R_\mathrm{g})$$

- Rechenergebnis identisch mit Simulationsergebnis. $\surd$

Rauschen an einer Diode

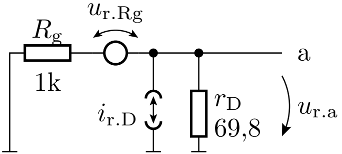


.noise V(a) Vg oct 10 1 1Mega
.model DDN D(Kf=1e-15 Af=1.5)



Kennwerte Arbeitspunkt	Rauschanteile $f = 1\,\mathrm{Hz}$ bis $1\,\mathrm{MHz}$
$I_{\mathrm{D}} = 371\,\mu\mathrm{A}$	$u_{\mathrm{reff.a}}\,(R_{\mathrm{g}}) = 266\,\mathrm{nV}$
$r_{\mathrm{D}} = 69{,}8\,\Omega;\ r_{\mathrm{a}} = r_{\mathrm{D}} \parallel R = 65{,}2\,\Omega$	$u_{\mathrm{reff.a}}\,(I_{\mathrm{SD}}) = 711\,\mathrm{nV}$ (weißes R.)
$g = \frac{r_{\mathrm{D}}}{R+r_{\mathrm{D}}} = 0{,}0652$	$u_{\mathrm{reff.a}}\,(I_{\mathrm{FD}}) = 20{,}5\,\mathrm{nV}$ (Funkelr.)

Kontrolle



- Rauschspannung an R_g (Frequenzbereich 1 Hz bis 1 MHz):

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{reff}}\left(R_\mathrm{g}\right) &= \sqrt{4\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}\cdot 300\,\mathrm{K}\cdot 1\,\mathrm{k\Omega}\cdot(1\,\mathrm{MHz}-1\,\mathrm{Hz})} = \\ &= 4{,}07\,\mu\mathrm{V} \end{aligned}$$

- multipliziert mit dem Spannungsteilerverhältnis $g=\frac{r_\mathrm{D}}{R+r_\mathrm{D}}$:

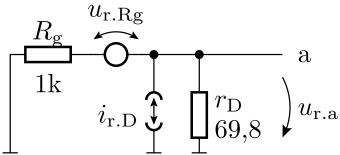
$$u_{\mathrm{reff.a}}\left(R_\mathrm{g}\right) = u_{\mathrm{reff}}\left(R_\mathrm{g}\right)\cdot g = 266\,\mathrm{nV}\ \surd$$

- Weißes Rauschen von D1:

$$\begin{aligned} i_{\mathrm{reff}}\left(I_\mathrm{SD}\right) &= \sqrt{2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\cdot 370\,\mu\mathrm{A}\cdot(1\,\mathrm{MHz}-1\,\mathrm{Hz})} \\ &= 10{,}9\,\mathrm{nA} \end{aligned}$$

- multipliziert mit dem Ausgangswiderstand $r_\mathrm{a}=65{,}2\,\Omega$:

$$u_{\mathrm{reff.a}}\left(I_\mathrm{SD}\right) = 710\,\mathrm{nV}\ \surd$$



- 1/f-Rauschen der Diode:

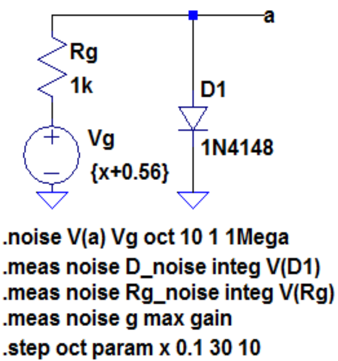
$$i_{\mathrm{reff}}\left(I_{\mathrm{FD}}\right) = \sqrt{\int_{f_{\mathrm{u}}}^{f_{\mathrm{o}}} \frac{k_{1/f}\cdot I_{\mathrm{D}}^{\gamma_{1/f}}}{f}\cdot df} = \sqrt{k_{1/f}\cdot I_{\mathrm{D}}^{\gamma_{1/f}}\cdot \ln\left(\frac{f_{\mathrm{o}}}{f_{\mathrm{u}}}\right)}$$
$$= \sqrt{10^{-15}\sqrt{\mathrm{A}}\cdot I_{\mathrm{D}}^{1,5}\cdot \ln\left(10^{6}\right)} = 314\,\mathrm{pA}$$

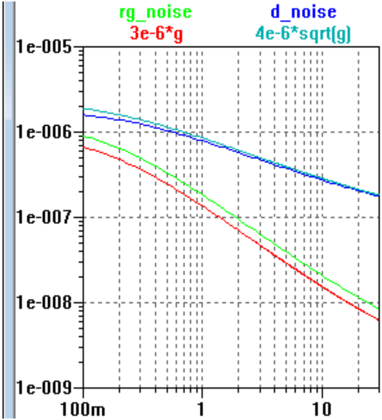
- multipliziert mit dem Ausgangswiderstand $r_{\mathrm{a}} = 65{,}2\,\Omega$:

$$u_{\mathrm{reff.a}}\left(I_{\mathrm{FD}}\right) = 20{,}5\,\mathrm{nV}\ \checkmark$$

Rauschen als Funktion von I_D

- Änderung von I_D über die Generatorspannung
- Diodenmodell ohne 1/f-Rauschen (Kf=0)





Interpretation des Ergebnisses

- $u_{\mathrm{reff}}\left(R_{\mathrm{g}}\right)$ ist wie im Experiment zuvor $4{,}07\,\mu\mathrm{V}$. Der am Ausgang ankommende Teil nimmt ab mit:

  $$g=\frac{r_{\mathrm{D}}}{R_{\mathrm{g}}+r_{\mathrm{D}}}$$

  Kontrolle: paraller Verlauf zu $3\,\mu\mathrm{V}\cdot g$
- Die Diode verursacht an a eine effektive Rauschspannung

  $$u_{\mathrm{reff.a}}\left(I_{\mathrm{SD}}\right)\approx 4\,\mu\mathrm{V}\cdot\sqrt{g}$$

  geteilt durch den Ausgangswiderstand

  $$r_{\mathrm{a}}=R_{\mathrm{g}}\parallel r_{\mathrm{D}}=g\cdot R_{\mathrm{g}}\approx r_{\mathrm{D}}$$

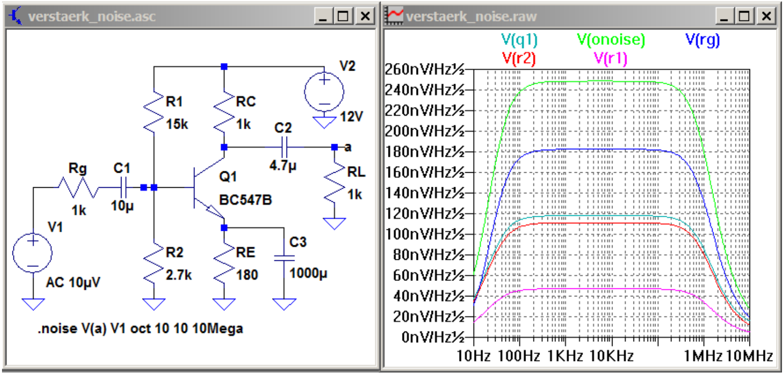
  beträgt der Rauschstrom der Diode:

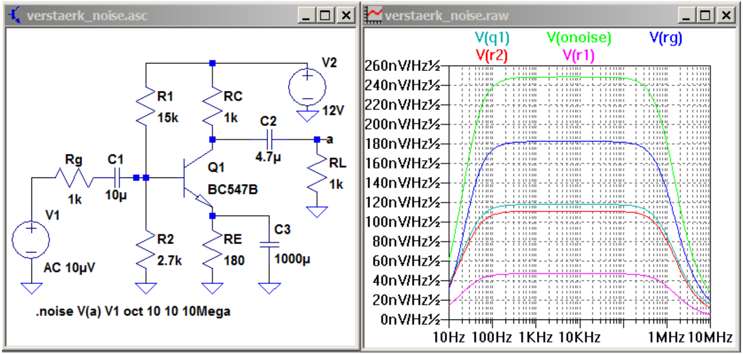
  $$\sqrt{2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,I_{\mathrm{D}}\cdot 1\,\mathrm{MHz}}\approx\frac{4\,\mu V}{\sqrt{R_{\mathrm{g}}\cdot r_{\mathrm{D}}}}$$

  Ok. wenn $\frac{1}{r_{\mathrm{D}}}=\frac{d\,I_{\mathrm{D}}}{d\,U_{\mathrm{D}}}\sim I_{\mathrm{D}}$ d.h. $I_{\mathrm{D}}\sim e^{U_{\mathrm{D}}}$ gilt.

Rauschanalyse an einem Verstärker

Bei der Rauschanalyse mit Spice ist immer eine Signalquelle und ein Ausgang anzugeben. Berechnet werden die Rauschdichten und -effektivwerte für alle Einzelquellen und für alle Quellen zusammen sowie der Betrag der Verstärkung g.





Effektive Rauschspannung an a mit »Strg+Mouseklick«:

Quelle	Q1	R_g	R_1	R_2	gesamt
$u_{\text{reff.a}}$ (Quelle) in µV	149,5	226,9	58,6	138,1	310,4

$$\text{Probe: } \sqrt{149,5^2 + 226,9^2 + 58,6^2 + 138,1^2} = 310,4\surd$$

Alle wichtigen Rauschquellen erfasst.

Signal-Rausch-Abstand (SNR – signal noise ratio)

Signalrauschabstand: Verhältnis der Leistung des Nutzsignal zur Leistung des Rauschsignals an einem Lastwiderstand. Identisch mit Verhältnis der Effektivwertquadrate:

$$SNR = \frac{u_{\mathrm{eff}}^2}{u_{\mathrm{reff}}^2}$$

Für einen Effektivwert der Ausgangsspannung $u_{\mathrm{eff.a}}^2 = 1\,\mathrm{mV}$ und im Beispiel $u_{\mathrm{reff.a}} = 310{,}4\,\mu\mathrm{V}$:

$$SNR = \left(\frac{1\,\mathrm{mV}}{310{,}4\,\mu\mathrm{V}}\right)^2 = 10{,}4$$

Rauschzahl

Relative Verschlechterung des Signal-Rausch-Abstands durch eine (Verstärker-) Schaltung.

- Es gibt immer ein unvermeidliches Grundrauschen durch den Innenwiderstand des Generators, das mit verstärkt wird, und
- ein gesamtes Rauschen am Verstärkerausgang.

Im Beispiel ist bei Ausgangsspannung $u_{\text{eff.a}}^2 = 1\,\text{mV}$

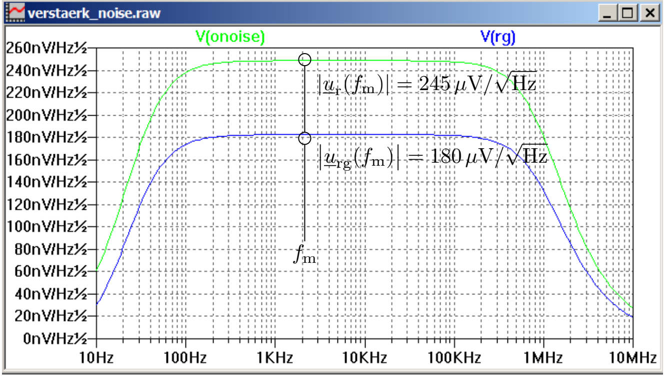
$$SNR = \frac{u_{\text{eff.a}}^2}{u_{\text{reff.a}}^2} = \left(\frac{1\,\text{mV}}{310{,}4\,\mu\text{V}}\right)^2 = 10{,}4$$

und wenn es außer R_{g} keine Rauschquelle geben würde:

$$SNR_{\text{Rg}} = \frac{u_{\text{eff.a}}^2}{u_{\text{reff.a}}^2\,(R_{\text{g}})} = \left(\frac{1\,\text{mV}}{226{,}9\,\mu\text{V}}\right)^2 = 19{,}4$$

Rauschzahl:

$$F = \frac{SNR_{\text{Rg}}}{SNR} = \frac{u_{\text{reff.a}}^2}{u_{\text{reff.a}}^2\,(R_{\text{g}})} = \frac{19,4}{10,4} = 1{,}87$$

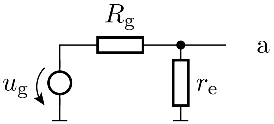


Für Breitbandverstärker etwa gesamte Rauschspannungsdichte zur Rauschspannungsdichte bezüglich R_{g} ins Quadrat für Frequenzen f_{m} im mittleren Nutzfrequenzbereich:

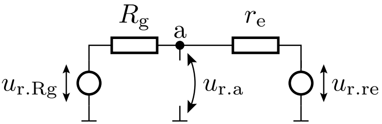
$$F \approx \frac{\left|\underline{u}_{\mathrm{r}}\left(f_{\mathrm{m}}\right)\right|^2}{\left|\underline{u}_{\mathrm{rg}}\left(f_{\mathrm{m}}\right)\right|^2} = \left(\frac{245\,\mu\mathrm{V}/\sqrt{\mathrm{Hz}}}{180\,\mu\mathrm{V}/\sqrt{\mathrm{Hz}}}\right)^2 = 1{,}85$$

Beeinflusst eine Spannungsteiler die Rauschzahl?

Spannungsteiler z.B. an einem Verstärkereingang



Rauschersatzschaltung



$$u_{\mathrm{reff.a}} = u_{\mathrm{reff.Rg}} \cdot \frac{r_e}{R_g + r_e} + u_{\mathrm{reff.re}} \cdot \frac{R_g}{R_g + r_e}$$

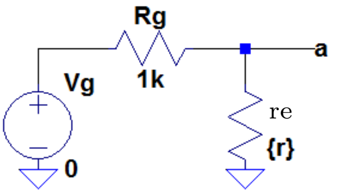
Rauschzahl:

$$F = \left(\frac{u_{\mathrm{reff.a}}}{u_{\mathrm{reff.a}}(R_g)}\right)^2 = \left(1 + \frac{u_{\mathrm{reff.re}} \cdot R_g}{u_{\mathrm{reff.Rg}} \cdot r_e}\right)^2$$

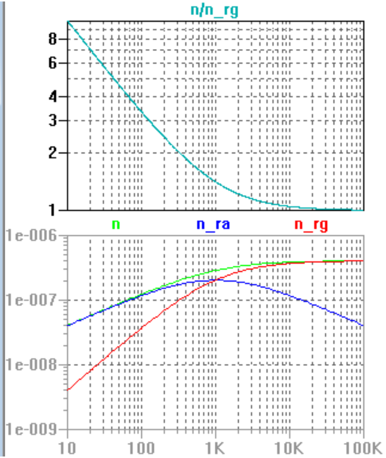
$$F = \left(1 + \frac{\sqrt{4 \cdot k \cdot T \cdot r_e \cdot f_B} \cdot R_g}{\sqrt{4 \cdot k \cdot T \cdot R_g \cdot f_B} \cdot r_e}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{\frac{R_g}{r_e}}\right)^2$$

Für kleine Eingswiderstände Zunahme $F \sim 1/r_e$

Experiment zur Kontrolle




```
.step oct param r 10 100k 10
.noise V(a) Vg oct 10 10 10k
.meas noise n_rg integ V(Rg)
.meas noise n_ra integ V(re)
.meas noise n  integ V(onoise)
.meas noise g max gain
```

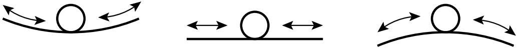


Die Kurve »n/n_rg« entspricht $\sqrt{F}$. Abnahme mit $\sqrt{1/r_{\mathrm{e}}}\surd$.

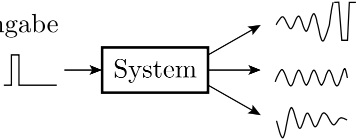
Stabilität

Stabilität

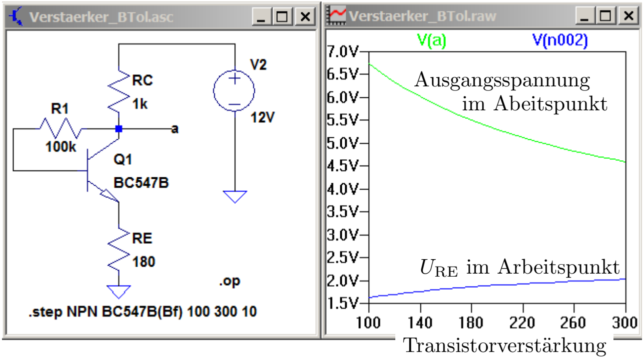
- Ein System, das nach einer Anregung in seinen ursprünglichen Zustand von selbst zurückkehrt, heißt stabil.



- Im Zeitbereich: Stabil, wenn nach Anregung mit einem Impuls der Ursprungszustand wieder von selbst erreicht wird.
- Komplexe Systeme schwingen bei Anregung:



- In der Systemtheorie und Regelungstechnik gibt es für lineare Systeme ein einfach zu überprüfendes



Stabilitätskriteriu

»Die Pole müssen im Laplace-Raum in der linken Halbebene liegen.«

Laplace-Raum

- Ein lineares System hat eine gebrochen rationale Übertragungsfunktion bezüglich $j\omega$:

$$\underline{X}\left((\omega)\right) = \frac{a_n \cdot (j\omega)^n + a_{n-1} \cdot (j\omega)^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m \cdot (j\omega)^m + b_{m-1} \cdot (j\omega)^{m-1} + \ldots + b_0}$$

- Bei der Laplace-Transformation wird $j\omega$ um einen Dämpfungsterm erweitert zu:

$$s = \alpha + j\omega$$

  Übertragungsfunktion im Laplace-Raum:

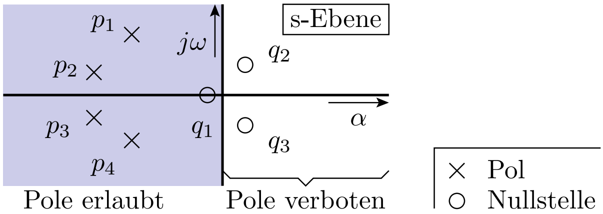
$$\underline{X}\left(s\right) = \frac{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \ldots + b_0}$$

  Die Funktion hat n Nullstellen und m – Polstellen, die reel oder konjugiert komplex sein können.

- Darstellung einer gebrochen rationalen Übertragungsfunktion durch n Nullstellen, m – Polstellen und einen Faktor:

$$\underline{X}\left(s\right)=\frac{a_n}{b_m}\cdot\frac{\left(s-q_1\right)\cdot\left(s-q_1\right)\cdot\ldots\left(s-q_m\right)}{\left(s-p_1\right)\cdot\left(s-p_1\right)\cdot\ldots\left(s-p_m\right)}$$

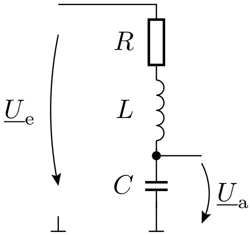
- Pole und Nullstellen in der s-Ebene:



Fakt 1

Ein System ist stabil, wenn alle Pole in der linken Halbebene liegen. Rezept: Ersetze $j\omega$ durch s. Bestimme Pole. Kontrolliere $\alpha=\Re\left\{s\right\}<0$. Theorie siehe Reglungstechnik.

Beispiel: Pole eines Schwingkreises



Nach Spannungsteilergesetz:

$$\begin{aligned} \underline{U}_\mathrm{A} &= \underline{U}_\mathrm{E} \cdot \frac{\frac{1}{s\cdot C}}{R+s\cdot L+\frac{1}{s\cdot C}} \\ &= \underline{U}_\mathrm{E} \cdot \frac{1}{1+\alpha\cdot\frac{s}{\omega_0}+\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2} \\ \text{mit} \quad & \alpha = R\cdot\sqrt{\frac{C}{L}}, \omega_0 = 1/\sqrt{L\cdot C} \end{aligned}$$

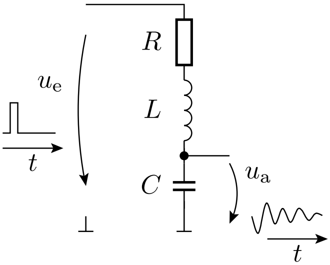
Polstellen:

$$q_{1/2} = \omega_0 \cdot \left(-\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1}\right)$$

Für $\alpha > 0$, d.h. für $R > 0$ liegen die Pole immer in der linken Halbebene. Für $\alpha \geq 2$ sind sie reel und für $\alpha < 2$ konjugiert komplex.

Fakt 2

Ein Schwingkreis mit $R > 0$ ist stabil und erzeugt für kleine α eine abklingende Schwingung und bei großem α abklingende stetiges Ausgabesignal.



Zusatzbemerkungen

- Von vielen Schaltungen wird Stabilität verlangt: Verstärker, insbesondere auch rückgekoppelte mit Operationsverstärkern, Spannungs- und Stromquellen, ...
- Die lineare Ersatzschaltung hängt vielfach vom Arbeitspunkt ab. Unterschiedliche Arbeitspunkte, unterschiedliche Übertragungsfunktionen und unterschiedliche Pole.
- Stabilitätskontrolle für alle erreichbaren Arbeitsbereiche erforderlich.
- Über Simulation ist Unstabilität erkennbar:
  - Im Zeitbereich, wenn das System nach Anregung mit einem Puls nicht in den Ausgangszustand (Arbeitspunkt) zurückkehrt.
  - Im Frequenzbereich: auszuprobieren, z.B. durch Simulation eines Schwingkreises mit $R = 0$

Aufgaben und Kontrollfragen

Kontrollfragen Frequenzbereich

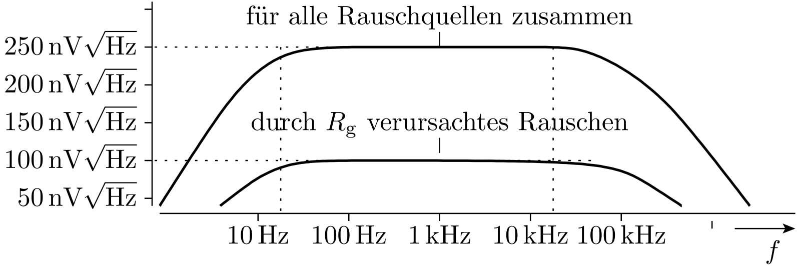
- Sind die bei der Analyse im Frequenzbereich berechneten Imaginäranteile der Ströme und Spannungen in einer Schaltung messbar und, wenn ja, wie?
- Wie könnte man messtechnisch eine komplexe Spannung $\underline{U}$ für eine Frequenz ω bestimmen? Was braucht man dafür für Geräte, was muss man an den Geräten einstellen, was liest man ab?

Kontrollfragen Rauschen

- Welche Maßeinheiten haben die Rauschspannungs- und die Rauschstromdichte?
- Wie groß ist die Rauschspannungsdichte am Generatorwiderstand einer Signalquelle?
- Wie groß ist die Rauschstromdichte des Basis-Emitter-Übergangs eines Transistors bei einem Basisstrom vom 1 µA?
- Wie groß sind die effektive Rausschpannung und der effektive Rauschstrom an einem Widerstands von 1 kΩ bei einer Temperatur von 300 K im Frequenzbereich von 0 bis 1 MHz?
- Hängt die spektrale Rauschleistung eines Widerstands von seinem Widerstandswert ab?

Aufgabe Rauschen

Für einen Verstärker hat der Simulator folgende spektralen Rauschdichten für den Ausgang berechnet.



1. Wie groß ist der Signal-Rausch-Abstand bei einer effektiven Ausgangsspannung des Nutzsignals von 1 mV?
2. Wie groß ist die Rauschzahl des Verstärkers?

Aufgabe Frequenzgang

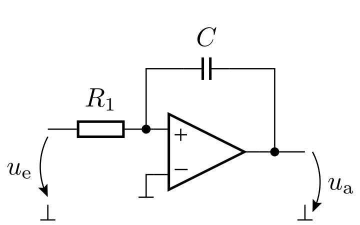
- Gegeben ist die komplexe Übertragungsungsfunktion eines Verstärkers:

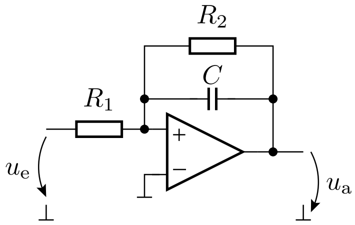
$$\underline{v} = \frac{1 + \frac{j \cdot f}{10\,\mathrm{Hz}}}{\left(1 + \frac{j \cdot f}{1\,\mathrm{kHz}}\right) \cdot \left(1 + \frac{j \cdot f}{100\,\mathrm{kHz}}\right)}$$

1. Schätzen Sie Betrag und Phase für die 7 Frequenzen 1 Hz, 10 Hz, 100 Hz, 1 kHz, 10 kHz, 100 kHz, 1 MHz.
2. Skizzieren Sie damit den Amplituden- und den Phasenfrequenzgang.

Aufgabe Stabilität

Sind die beiden nachfolgenden Schaltungen mit Operationsverstärkern stabil?





1. Kehren die Schaltungen nach Anregungung mit einem Impuls in den Arbeitspunkt $u_a = 0$ zurück?
2. Wo liegen die Pole im Laplace-Raum?
3. Liegen sie alle in der linken Halbeebene?

Bauteiltoleranzen

Bauteiltoleranzen

Die Parameter elektronischer Bauteile (Widerstand, Kapazität, Verstärkung, ...) streuen:

- fertigungsbedingt
- in Abhängigkeit von Umgebungsedingungen (Temperatur, Feuchte,...) und

verändern sich bei Alterung.

- Eine professionelle Schaltung ist so zu entwerfen, dass sie für alle zulässigen Variationen von Parameterwerten funktioniert.
- Dazu zählt auch die Festlegung der zulässigen Bauteiltoleranzen.

E-Reihe

- Toleranz: in der Regel $\pm$-Bereich in Prozent relativ zum Nennwert.
- Für Widerstände, Kondensatoren Werteabstufung nach E-Reihe, z.B. E3, E6, E12, ...
- Nummer der E-Reihe ist die Zahl der Werte je Dekade:

Serie	Werte je Dekade	Toleranz
E3	1, 2,2, 4,7	$\mp 50\%$
E6	1, 1,5, 2,2, 3.3, 4,7, 6.8	$\mp 20\%$
E12	1, 1,2, 1,5, 1,8, 2,2, 2,7 3.3, 3,9, 4,7, ...	$\mp 10\%$

Die E-Reihen E24, E48, ..., E192 haben je doppelt so viele Werte und die halbe Toleranz der E-Reihe davor.

Festlegung der Toleranzbereiche

Ausgangspunkt: Schaltungsentwurf, der mit den Nennwerten der Bauteilparameter funktioniert. Weiteres Vorgehen:

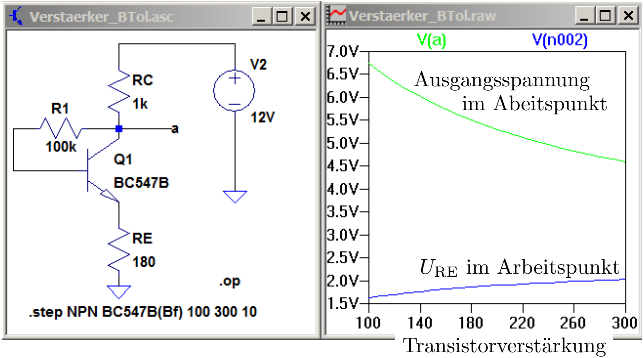
- Definition der wesentlichen Kenngrößen der Schaltung, z.B. Verstärkung, Eingangswiderstand, Stromverbrauch, Bandbreite, ...
- Festlegung der Toleranzbereiche für diese Kenngrößen.
- Sensivitätsanalyse: Untersuchung, wie sich Änderungen einzelner Parameter auf die wichtigen Kenngrößen der Schaltung abbilden.
- Festlegung der Toleranzen entsprechend Sensibilität: je sensibler desto geringer die Toleranz.
- Kontrolle durch Monte-Carlo-Simulation oder Worst-Case-Analyse.
- Wenn Schaltungskenngrößen nicht im zulässigen Bereich, Toleranzen der Bauteilparameter verringern.

Sensibilitätsanalyse

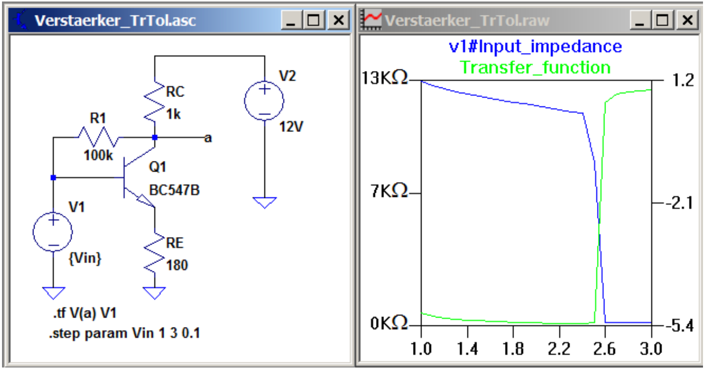
Simulation unter Variation eines Parameters:

```
.step <Parameter> <Anfangswert> <Endwert>
  <Schrittweite>
```

Beispiele: Arbeitspunkt unter Variation der Verstärkung.



Kleinsignalparameter »Eingangswiderstand« und »Verstärkung« in Abhängigkeit von dem mit V_1 eingestellten Arbeitspunkt:

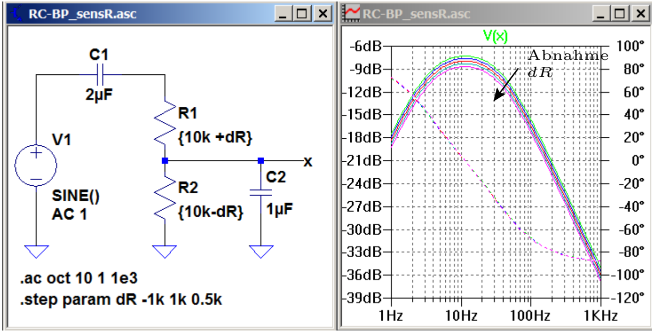


- Im Bereich $V_1 = 0$ bis 2,4 V gibt es eine geringe Abhängigkeit.
- Ab $V_1 > 2{,}5$ V wechselt der Arbeitsbereich. Die Verstärkung wechselt auf ≈ 1. Eingangswiderstand nimmt sprunghaft ab.

Man kann auch

- die Werte mehrere Parameter aneinander koppeln (proportionale Änderung, gegenläufige Änderung, ...) und
- Kennlinien für jeden Parameterwert bestimmen.

Beispiel: Frequenzgang eines RC-Filters in Abhängigkeit einer Widerstandsabweichung dR:



Ändert offenbar nur die Ausgabeamplitude bei ansonsten gleichem Amplituden- und Phasenfrequenzgang.

Monte-Carlo-Simulation

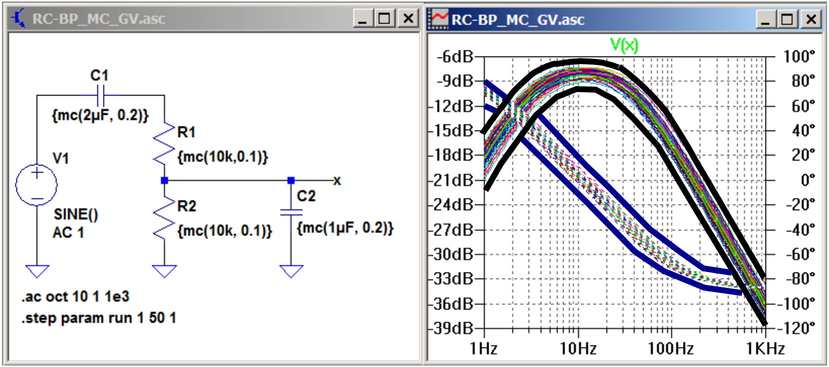
Bei vielen unkorrelierten Parametern lässt sich nur eine Stichprobe möglicher Wertevariationen simulieren.

- Ersatz der Parameterwerte durch eine Funktion für eine zufällige Auswahl:

```
{mc(<μ>, <t>)}          * Gleichverteilung
{normal(<μ>, <σ>}       * Normalverteilung
```

  (μ – Nennwert; t – $\pm$-Bereich; σ – Standardabweichung).
- Zählschleife, im nachfolgenden Beispiel für run=1 bis 50, Schrittweite 1

Ergebnis: Eine Menge möglicher Kennlinien, um die sich ein Toleranzschlauch legen lässt.



Toleranzschlauch Phasenfrequenzgang

Toleranzschlauch Amplitudenfrequenzgang

- Wenn die Toleranzschläuche für den Amplituden- und Phasenfrequenzgang zu groß sind, Bauteiltoleranzen verringern.

Worst-Case-Analyse

Im Simulator lassen sich zusätzliche Variablen und Funktionen definieren, mit denen:

- Kenngröße wie die Bandbreite
- Maximal und Minima

bestimmt werden können. Damit lassen sich auch automatisch die

- ungünstigsten Kennlinien oder
- Verteilungen

aus einer großen Menge von Simulationsergebnissen zufälligen Parameterwerten bestimmen.

Kontrollfragen

- Es wird ein Widerstand von $3\,\mathrm{k\Omega}$ und $8{,}8\,\mathrm{k\Omega}$ mit einer zulässigen Toleranz von $\pm 2\%$ benötigt. Aus welcher E-Reihe würden Sie die Widerstände nehmen und welche Nennwerte würden Sie wählen?
- In welchem Bereich muss in der Transistorschaltung auf Folie 128 die Verstärkung liegen, damit die Ausgangsspannung im Arbeitspunkt vom Nennwert $U_\mathrm{a} = 5\,\mathrm{V}$ nicht mehr als $\pm 20\%$ abweicht.