



Elektronik I, Foliensatz 7

2.4 Frequenzraum

G. Kemnitz

Institut für Informatik, TU-Clausthal (E1-F7)
27. Januar 2016



Frequenzraum

- 1.1 Fouriertransformation
- 1.2 FFT/Matlab
- 1.3 komplexe U, I, R
- 1.4 Schaltung \Rightarrow Gleichungssystem
- 1.5 Handwerkszeug
- 1.6 Transistorverstärker
- 1.7 Operationsverstärker
- 1.8 Aufgaben



Frequenzraum

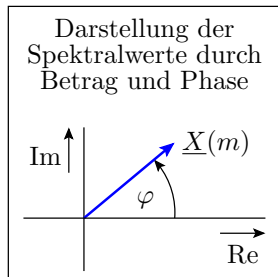


Frequenzraum, Spektrum

Funktionsraum, in dem ein periodisches Zeitsignal als Summe komplexer Exponentialfunktionen dargestellt wird:

$$x(t) = \sum_{m=-M}^M \underline{X}(m) \cdot e^{j \cdot m \cdot \omega_0 \cdot t}$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_P}$	Kreisgrundfrequenz
T_P	Signalperiode
$j = \sqrt{-1}$	imaginäre Einheit
$\underline{X}(m)$	Spektralwerte, Spektrum
$m = f \cdot T_P$	Frequenzindex
f	Frequenz





Wozu Signaldarstellung im Frequenzraum?

Das Spektrum eines Signals:

- ist eine Funktion mit der Frequenz als Argument.
- Diese Funktion ist eine umkehrbar eindeutige Darstellung des Signals:

$$x(t) \longleftrightarrow \underline{X}(f)$$

- Kapazitäten und Induktivitäten verhalten sich im Frequenzraum wie frequenzabhängige Widerstände.
- Lineare Systeme aus Quellen, R , C und L bilden sich auf ein lineares frequenzabhängiges Gleichungssystem ab.

Fakt 1

Der Frequenzraum ist ein Mittel zur Beschreibung linearer Schaltungen mit zeitveränderlichen Quellen, R , C und L durch ein lineares Gleichungssystem statt durch ein DGL-System.



Fouriertransformation



Fouriertransformation

- Mathematische Grundlage der Signaldarstellung im Frequenzraum ist die Fouriertransformation.
- Eine Funktion $f(a)$ mit der Perioden $2 \cdot \pi$ wird durch eine Fourierreihe

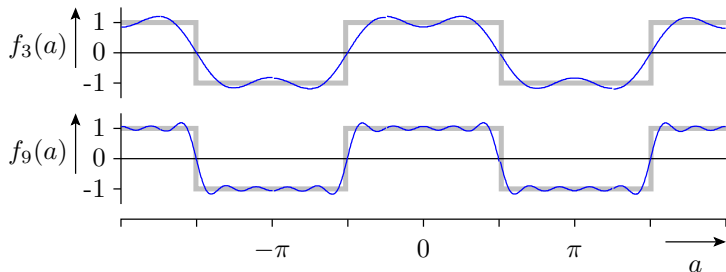
$$f(a) = \sum_{m=0}^{\infty} X_m \cdot \cos(m \cdot a + \varphi_m)$$

(X_m – Amplitude; φ_m – Phasenverschiebung) angenähert.

- Nichtperiodische Signale werden durch ein Signal mit unendlicher Periode angenähert.

Beispiel: Fourierreihe einer Rechteckfunktion

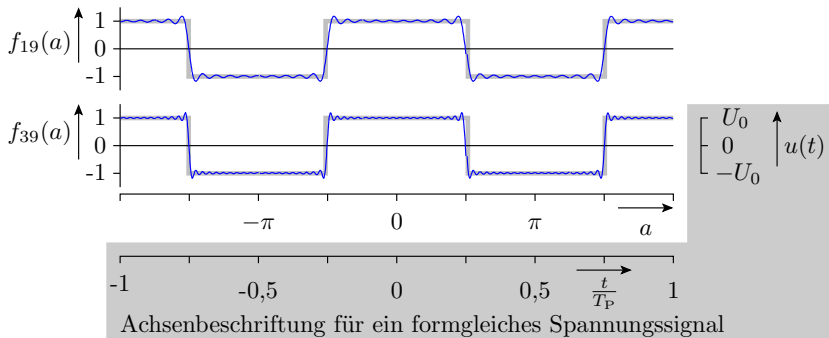
- $f_3(a) = \frac{4}{\pi} \cdot \left(\cos(a) - \frac{\cos(3 \cdot a)}{3} \right)$
- $f_9(a) = \frac{4}{\pi} \cdot \left(\cos(a) - \frac{\cos(3 \cdot a)}{3} + \frac{\cos(5 \cdot a)}{5} - \frac{\cos(7 \cdot a)}{7} + \frac{\cos(9 \cdot a)}{9} \right)$



- $f_M(a) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^M \sin\left(\frac{\pi \cdot m}{2}\right) \cdot \frac{\cos(m \cdot a)}{m}$



$$\blacksquare f_M(a) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^M \sin\left(\frac{\pi \cdot m}{2}\right) \cdot \frac{\cos(m \cdot a)}{m}$$



- Formgleiches Spannungssignal:

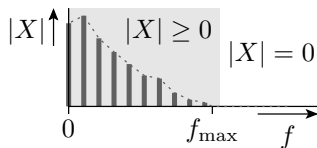
$$u(t) = \frac{4 \cdot U_0}{\pi} \cdot \sum_{m=1}^M \sin\left(\frac{\pi \cdot m}{2}\right) \cdot \frac{\cos(m \cdot \omega_0 \cdot t)}{m}$$

$(\omega_0 = \frac{2\pi}{T_P} - \text{Kreisgrundfrequenz}; T_P - \text{Signalperiode}).$



Bandbegrenzung

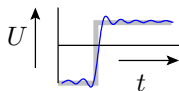
Band:
bandbegrenzt: Frequenzbereich
 $X_m = 0$ für $f_m > f_{\max}$



Fakt 2

Alle Spannungen und Ströme in realen Schaltungen sind bandbegrenzt.

- u_C und i_L können sich nur stetig ändern.
- Eingebaute und unvermeidliche parasitäre C und L bewirken Bandbegrenzung.
- Bandbegrenzter Sprung:
 - Sprung abzüglich der Kosinusterme der Frequenzen $f_m > f_{\max}$



Übergang zur komplexen Exponentialfunktion

- Zusammenfassung (X_m, φ_m) zu einer komplexen Zahl \underline{X}_m

Definition der komplexen e-Funktion:	$e^{ja} = \cos(a) + j \cdot \sin(a)$ $e^{-ja} = \cos(a) - j \cdot \sin(a)$
umgestellt nach $\cos(a)$	$\cos(a) = \frac{1}{2} \cdot (e^{ja} + e^{-ja})$

- Ersatz der Kosinusterme der Fourierreihe:

$$X_m \cdot \cos(m \cdot \omega_0 \cdot t + \varphi_m) = \underline{X}(m) \cdot e^{j \cdot m \cdot \omega_0 \cdot t} + \underline{X}(-m) \cdot e^{-j \cdot m \cdot \omega_0 \cdot t}$$

$$\text{mit } \underline{X}(m) = \frac{X_m}{2} \cdot e^{j \cdot \varphi_m} \text{ und } \underline{X}(-m) = \frac{X_m}{2} \cdot e^{-j \cdot \varphi_m}$$

- Fourierreihe mit komplexen e-Funktionen:

$$x(t) = \sum_{m=-M}^M \underline{X}(m) \cdot e^{j \cdot m \cdot \omega_0 \cdot t}$$



Fourierreihe mit komplexen e-Funktionen

$$x(t) = \sum_{m=-M}^M \underline{X}(m) \cdot e^{j \cdot m \cdot \omega_0 \cdot t}$$

- (M – Frequenzindex des Signalanteils mit der höchsten auftretenden Frequenz) neue Summationsgrenzen:

$$-M \leq m \leq M$$

- Die Spektralwerte der negativen Frequenzen $\neq 0$ sind die konjugiert komplexen Spektralwerte der positiven Frequenzen und betragsmäßig halb so groß wie die Amplituden der Kosinusterme:

$$\underline{X}(m) = \frac{X_m}{2} \cdot e^{j \cdot \varphi_m} \quad \text{und} \quad \underline{X}(-m) = \frac{X_m}{2} \cdot e^{-j \cdot \varphi_m}$$

- der Gleichanteil bleibt:

$$\underline{X}(0) = X_0$$

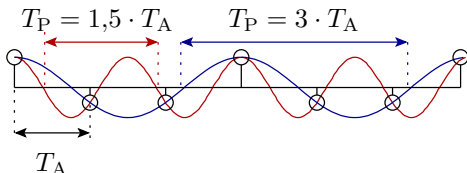
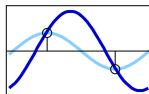
Abtasttheorem

Der Signalanteil mit der höchsten Frequenz muss mehr als zweimal je Periode abgetastet werden:

$$N > 2 \cdot M$$

Bei Verletzung des Abtasttheorems

- sind im Grenzfall $N = 2 \cdot M$ Amplitude und Phase des Signalanteils mit der höchsten Frequenz nicht eindeutig festgelegt.
- Für $N < 2 \cdot M$ gibt es ein Kosinussignal mit geringerer Frequenz mit derselben Abtastfolge (Aliasing):





Ausgangspunkt für die Herleitung der Fouriertransformation ist die Fourierreihe eines bandbegrenzten Signals:

$$x(t) = \sum_{m=-M}^M \underline{X}(m) \cdot e^{j \cdot m \cdot \omega_0 \cdot t}$$

Abtastzeitpunkte:	$t_n = \frac{n \cdot T_P}{N}$
Kreisgrundfrequenz:	$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_P}$
Exponent:	$m \cdot \omega_0 \cdot t_n = \frac{2\pi \cdot m \cdot n}{N}$
Abtasttheorem:	$M < \frac{N}{2}$
Indexerweiterung:	$\underline{X}\left(-\frac{N}{2}\right) = 0$

Für jeden Zeitpunkt $t_n = n \cdot T_A$ beträgt der Zeitwert:

$$x(t_n) = x(n) = \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \underline{X}(m) \cdot e^{j \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot m \cdot n}{N}}$$



- Die Berechnung von N Zeitwerten $x(n)$ aus N Spektralwerten $\underline{X}(m)$ erfolgt über die Lösung eines linearen Gleichungssystems aus N Gleichungen mit N Unbekannten:

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} \underline{X}(-\frac{N}{2}) \\ \underline{X}(-\frac{N}{2} + 1) \\ \vdots \\ \underline{X}(\frac{N}{2} - 1) \end{pmatrix}$$

Q $-N \times N$ -Matrix mit den komplexen Koeffizienten:

$$q_{mn} = e^{j \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot m \cdot n}{N}}$$

Die Determinante beträgt

$$\det(Q) = N$$

Sie ist somit ungleich null. Damit ist die Transformation umkehrbar.



Berechnung der Spektralwerte aus der Abtastfolge:

$$\begin{pmatrix} \underline{X}\left(-\frac{N}{2}\right) \\ \underline{X}\left(-\frac{N}{2} + 1\right) \\ \vdots \\ \underline{X}\left(\frac{N}{2} - 1\right) \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

\mathbf{Q}^{-1} $-N \times N$ -Matrix mit den komplexen Koeffizienten:

$$q_{mn} = \frac{1}{N} \cdot e^{-j \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot m \cdot n}{N}}$$

Fakt 3

Die Berechnung der Spektralwerte für eine Abtastfolge eines bandbegrenzten Signals erfolgt über die Lösung eines linearen Gleichungssystems.

Die praktische Berechnung erfolgt in der Regel über

- die FFT (Fast Fourier Transformation) und
- die IFFT (Inverse Fast Fourier Transformation).



FFT/Matlab

Von der Matrixmultiplikation zur FFT

- Zirkulare Verschiebung der Spektralwerte der negativen Frequenzen um N Indexpositionen in den positiven Bereich:

$$x(n) = \underbrace{\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} \underline{X}(m) \cdot e^{j \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot m \cdot n}{N}}}_{\text{für } 0 \leq m < \frac{N}{2} \text{ (positive Freq.)}} + \underbrace{\sum_{m=+\frac{N}{2}}^{N-1} \underline{X}(m-N) \cdot e^{j \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot (m-N) \cdot n}{N}}}_{\text{für } -\frac{N}{2} \leq m < 0 \text{ (negative Freq.)}}$$

Der hinzukommende Faktor $e^{-\frac{j \cdot 2 \pi \cdot N \cdot n}{N}}$ ist eins und entfällt.

- Mit $\underline{X}(m-N) = \underline{X}(m)$ bleibt die Gleichheit erhalten. Die Transformationsvorschrift mit dem zirkular verschobenen Spektralvektor

$$x(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \underline{X}(m) \cdot e^{j \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot m \cdot n}{N}}$$

liefert dieselbe Zeitfolge.



$$x(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \underline{X}(m) \cdot e^{j \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot m \cdot n}{N}}$$

- Darstellung der Exponentialterme als Potenzen der Hilfsvariablen

$$v = e^{j \cdot \frac{2 \cdot \pi}{N}}$$

Ergebnis:

$$x(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \underline{X}(m) \cdot v^{m \cdot n}$$

- Aus historischen oder numerischen Gründen wird statt der Spektralwerte deren N -facher Wert benutzt:

$$\underline{W}(m) = N \cdot \underline{X}(m)$$



Die inverse zeitdiskrete Fouriertransformation (IFFT) berechnet die Abtastfolge für den Vektor aus den N -fachen Spektralwerten der positiven Frequenzen und den N -fachen zirkular in den positiven Bereich verschobenen negativen Frequenzen:

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix} = \mathbf{V} \cdot \begin{pmatrix} \underline{W}(0) \\ \underline{W}(1) \\ \vdots \\ \underline{W}(N-1) \end{pmatrix}$$

mit:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{N} \cdot \begin{pmatrix} v^0 & v^1 & \dots & v^{N-1} \\ v^0 & v^2 & \dots & v^{2 \cdot (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v^0 & v^{N-1} & \dots & v^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

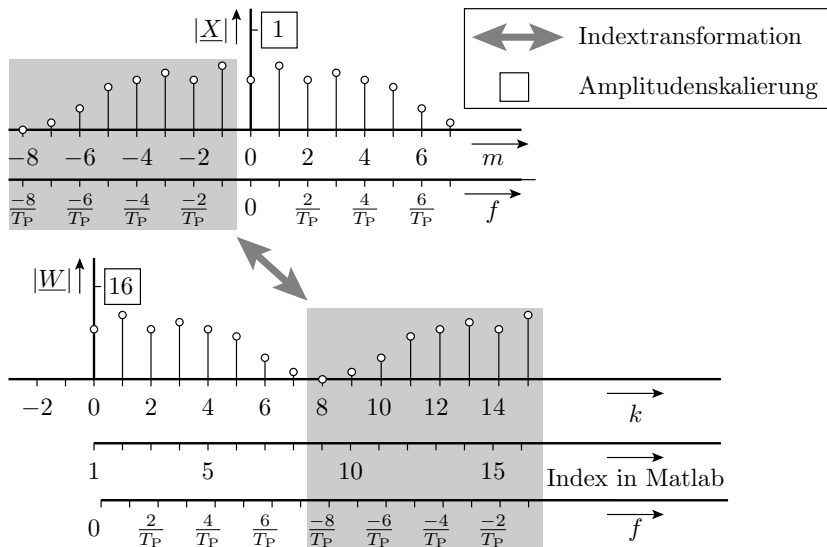


Die zeitdiskrete Fouriertransformation ist die inverse Operation (Umkehrung) davon:

$$\begin{pmatrix} \underline{W}(0) \\ \underline{W}(1) \\ \vdots \\ \underline{W}(N-1) \end{pmatrix} = N \cdot V^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

mit:

$$N \cdot V^{-1} = \begin{pmatrix} v^0 & v^{-1} & \dots & v^{-(N-1)} \\ v^0 & v^2 & \dots & v^{-2 \cdot (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v^0 & v^{-(N-1)} & \dots & v^{-(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

Umrechnung Transformationsergebnis \Leftrightarrow Spektrum

Schnelle Fouriertransformation (FFT)

- Die FFT (Fast Fourier Transformation) ist ein Algorithmus, der durch geschicktes Ausklammern die Anzahl der komplexen Multiplikationen und Additionen von N^2 auf im günstigsten Fall $N \cdot \log_2(N)$ reduziert¹.
- Für die IFFT (Inverse Fast Fourier Transformation) gilt dasselbe, nur mit inverser Transformationsmatrix.
- Matlab-Funktionen:

```
W=fft(x); % fast fourier transformation
```

```
x=ifft(W); %
```

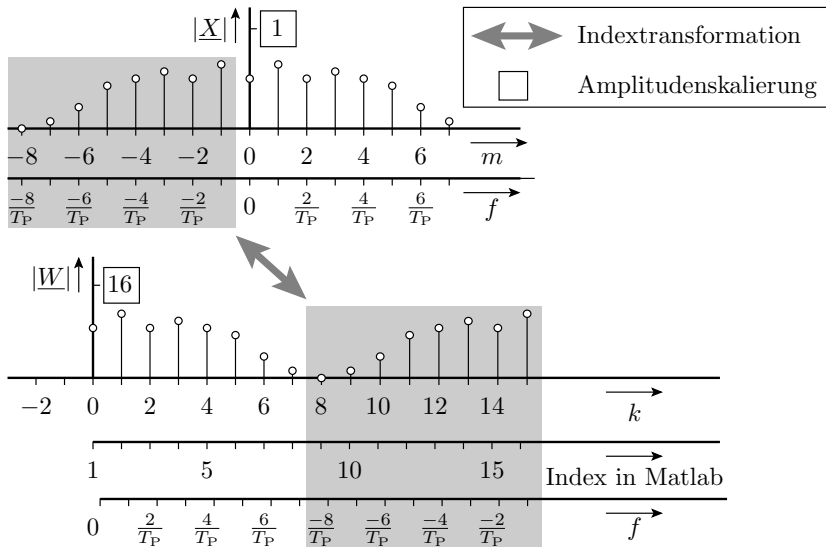
```
inverse fast fourier transformation
```

(x – Abtastfolge; W – transformierter Frequenzvektor).

¹Der günstigste Fall ist, wenn N eine Zweierpotenz ist. Die bevorzugten Werte für die Anzahl der Abtastpunkte sind entsprechend 16, 32, 64, 128, 256, 1024, ...



- In Matlab beginnt die Indexzählung mit Eins:

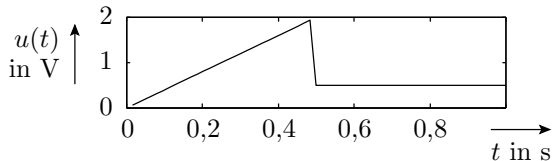




Beispiel für die Berechnung und Darstellung eines Spektrums

- Eingabe und Darstellung der Abtastfolge des Zeitsignals

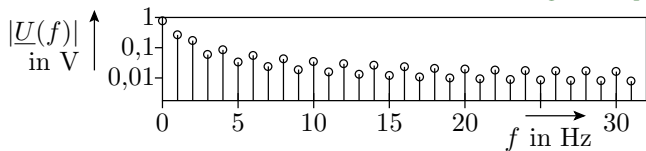
```
TP = 1; % Periodendauer in s
N = 2^6; % Abtastwerte je Periode
u = [...]; % Vorgabe der N Abtastwerte
t = (0:N-1)*TP/N; % Folge der N Zeitwerte
subplot(3,1,1); plot(t,u); % Darstellung der Zeitfunktion
```



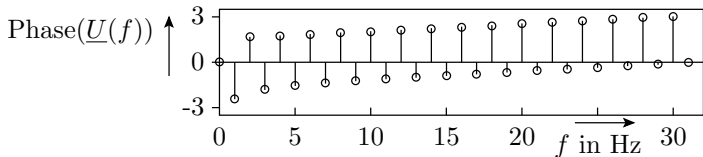


■ Berechnung und Darstellung des Spektrums

```
U = fft(u)/N; % Berechnung des Spektrums  
f = (0:N/2-1)/TP; % Vektor der positiven Freq.  
subplot(3,1,2); stem(f, abs(U(1:N/2))s); % Betrag der Spektralwerte
```



```
subplot(3,1,3); stem(f, angle(U(1:N/2))); % Phasenverschiebung  
% der Spektralwerte
```

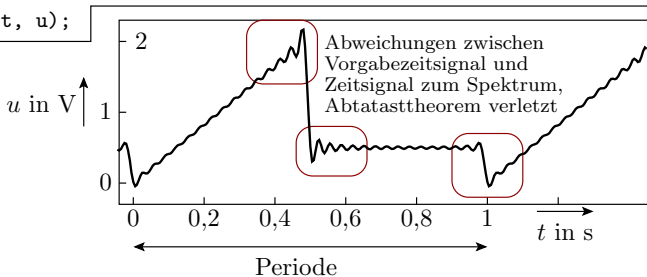




Wurde das Abtasttheorem eingehalten?

- Zeitfunktion für 300 statt 64 Abtastwerten je Periode:

```
for n=1:300                                % für 300 Zeitwert
    t(n)=(n-10)/200;                        % Abtastzeitpunkt festlegen
    u(n)=U(1);                              % Wert mit Gleichanteil initialisieren
    for m=2:32                              % für die 31 Spektraltermine mit  $f > 0$ 
        u(n)=u(n)+2*real(U(m)*e^(j*2*pi*f(m)*t(n)));
    end;                                    % doppelten Realteil hinzufügen
end;
plot(t, u);
```





komplexe U, I, R



Komplexe Spannungen und Ströme

- Die folgende Theorie basiert auf dem Überlagerungssatz und gilt nur für lineare Systeme.
- In linearen Systemen können alle periodischen Quellenwerte in eine Summe komplexer Exponentialterme vom Typ

$$\begin{aligned}u(t) &= \underline{U}(\omega) \cdot e^{j\omega t} \\i(t) &= \underline{I}(\omega) \cdot e^{j\omega t}\end{aligned}$$

($\underline{U}(\omega)$ – komplexe Spannung; $\underline{I}(\omega)$ – komplexer Strom; ω – Kreisfrequenz) zerlegt und die Berechnung der gesuchten Ströme und Spannungen für jede Kreisfrequenz ω extra durchgeführt werden.

- Die Gesamtströme und -spannungen sind dann die Summe der Ströme und Spannungen für jede Kreisfrequenz ω , für die die berechneten komplexen Ströme bzw. Spannungen ungleich null sind.



Komplexer Widerstand $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$

Widerstand $u = R \cdot i$:

$$\begin{aligned}\underline{U} \cdot e^{j\omega t} &= R \cdot \underline{I} \cdot e^{j\omega t} \\ \underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} &= R\end{aligned}$$

Kapazität $i = C \cdot \frac{du}{dt}$:

$$\begin{aligned}\underline{I} \cdot e^{j\omega t} &= C \cdot \underline{U} \cdot \frac{d(e^{j\omega t})}{dt} = j\omega C \cdot \underline{U} \cdot e^{j\omega t} \\ \underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} &= \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}\end{aligned}$$

Induktivität $u = L \cdot \frac{di}{dt}$:

$$\begin{aligned}\underline{U} \cdot e^{j\omega t} &= L \cdot \underline{I} \cdot \frac{d(e^{j\omega t})}{dt} = j\omega L \cdot \underline{I} \cdot e^{j\omega t} \\ \underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} &= j\omega L\end{aligned}$$

Zeigerdarstellung

Komplexe Spannungen, Ströme und Widerstände besitzen einen Betrag und eine Phase und lassen sich als Zeiger in der komplexen Ebene darstellen. Für den komplexen Widerstand:

$$|\underline{Z}| \cdot e^{j\varphi_Z} = \frac{|\underline{U}| \cdot e^{j\varphi_U}}{|\underline{I}| \cdot e^{j\varphi_I}}$$

ist der Betrag

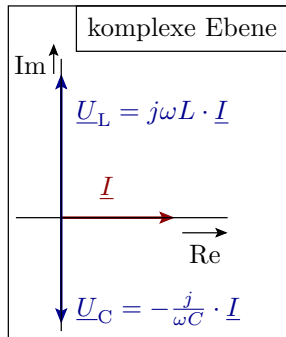
$$|\underline{Z}| = \frac{|\underline{U}|}{|\underline{I}|}$$

und beträgt die Phase:

$$\varphi_Z = \varphi_U - \varphi_I$$

An der Kapazität ist die Spannung zum Strom um $\pi/2$ verzögert.

An der Induktivität eilt die Spannung dem Strom um $\pi/2$ voraus.





Gibt es wirklich imaginäre Spannungen und Ströme?

- Für die Spektralanteile der einzelnen positiven und negativen Frequenzen ja, in einem reellen Signal jedoch nicht.

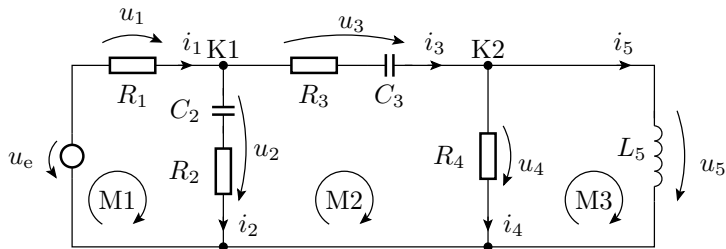
Warum?

- Weil ein reelles Zeitsignal zu jedem Spektralwert einer positiven Frequenz auch noch den konjugiert komplexen Spektralwert der negativen Frequenz enthält, so dass sich die Imaginäranteile immer paarweise gegenseitig aufheben.



Schaltung \Rightarrow Gleichungssystem

Kirchhoffsche Sätze für komplexe \underline{U} und \underline{I}



$$\text{K1 :} \quad i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$\text{K2 :} \quad i_3 - i_4 - i_5 = 0$$

$$\text{M1 :} \quad u_1 + u_2 = u_e$$

$$\text{M2 :} \quad -u_2 + u_3 + u_4 = 0$$

$$\text{M3 :} \quad -u_4 + u_5 = 0$$



$$i_1 = \underline{I}_1 \cdot e^{j\omega t}$$

$$i_2 = \underline{I}_2 \cdot e^{j\omega t}$$

$$i_3 = \underline{I}_3 \cdot e^{j\omega t}$$

$$i_4 = \underline{I}_4 \cdot e^{j\omega t}$$

$$i_5 = \underline{I}_5 \cdot e^{j\omega t}$$

$$u_1 = \underline{U}_1 \cdot e^{j\omega t} = R_1 \cdot \underline{I}_1 \cdot e^{j\omega t}$$

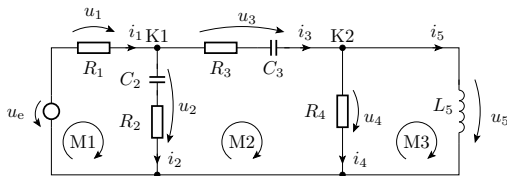
$$u_2 = \underline{U}_2 \cdot e^{j\omega t} = \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right) \cdot \underline{I}_2 \cdot e^{j\omega t}$$

$$u_3 = \underline{U}_3 \cdot e^{j\omega t} = \left(R_3 + \frac{1}{j\omega C_3} \right) \cdot \underline{I}_3 \cdot e^{j\omega t}$$

$$u_4 = \underline{U}_4 \cdot e^{j\omega t} = R_4 \cdot \underline{I}_4 \cdot e^{j\omega t}$$

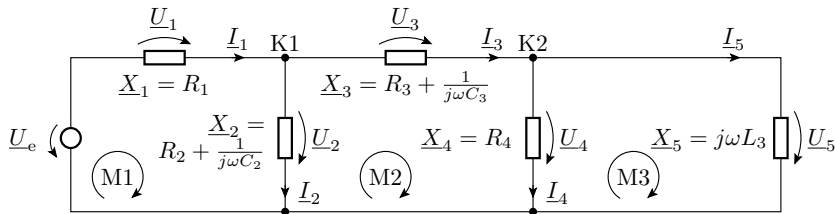
$$u_5 = \underline{U}_5 \cdot e^{j\omega t} = j\omega L_5 \cdot \underline{I}_5 \cdot e^{j\omega t}$$

$$u_e = \underline{U}_e \cdot e^{j\omega t}$$



Der zeitabhängige Term $e^{j\omega t}$ kürzt sich aus allen Knoten- und Maschengleichungen heraus.

Die kirchhoffschen Sätze gelten auch für die komplexen Spannungen und Ströme:



$$\begin{pmatrix}
 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\
 R_1 & \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right) & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right) & \left(R_3 + \frac{1}{j\omega C_3}\right) & R_4 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -R_4 & j\omega L_5
 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{U}_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Zusammenfassung

- Die Schaltungsanalyse im Frequenzbereich erfolgt nach demselben Formalismus wie für den stationären Zustand, nur dass die Spannungen, Ströme und Widerstände durch die komplexen Spannungen, Ströme und Widerstände ersetzt sind.

Schaltungsanalyse für periodische Eingabesignale:

- Eingabe: Zeitsignal \Rightarrow Abtastfolge.
- Berechnung des Spektrums aus der Abtastfolge.
- Wiederhole für alle Frequenzen des Spektrums²:
 - Berechnung der gesuchten komplexen Ströme und Spannungen.
- Rücktransformation der gesuchten Größen in eine Zeitfolge.

²Eine zeitdiskreten Analyse wiederholt die Lösung des Gleichungssystems für alle Abtastzeitpunkte. Rechenaufwand vergleichbar hoch.



Stationärer Betrieb als Sonderfall $\omega = 0$

- Basisfunktion:

$$e^{j \cdot 0 \cdot t} = 1$$

- komplexe Spannung \Rightarrow stationäre Spannung:

$$\underline{U} \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot 0 \cdot t} = U$$

- komplexer Strom \Rightarrow stationärer Strom:

$$\underline{I} \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot 0 \cdot t} = I$$

- Induktivität \Rightarrow Verbindung:

$$\underline{X}_L = j \cdot 0 \cdot L = 0$$

- Kapazität \Rightarrow Unterbrechung

$$\underline{X}_C = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{1}{j \cdot 2\pi \cdot f \cdot C} \rightarrow \infty$$

Die Schaltungsanalyse für den stationären Betrieb entspricht im Frequenzbereich dem Sonderfall $\omega = 0$ (bzw. $m = 0$).



Handwerkszeug



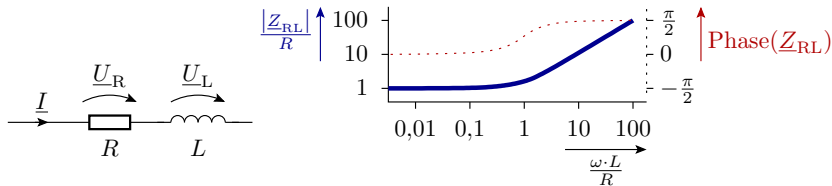
Schaltungsumformungen und Vereinfachungen

Aus der Gültigkeit der kirchhoffschen Sätze für die komplexen Spannungen und Ströme folgt, dass auch der gesamte Werkzeugkasten für die Schaltungsanalyse auf die Schaltungsmodellierung mit komplexen Spannungen und Strömen übertragbar ist.

Zusammenfassen komplexer Widerstände

■ Reihenschaltung

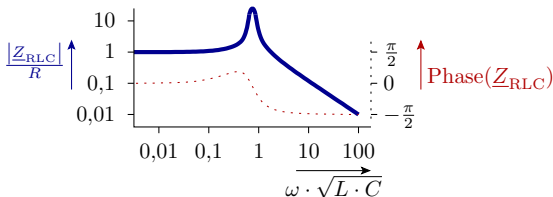
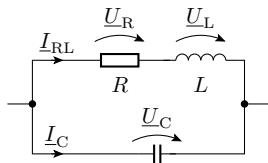
$$\frac{U_{\text{ges}}}{\underline{I}} = \underline{Z}_{\text{ges}} = \frac{U_1}{\underline{I}} + \frac{U_2}{\underline{I}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$



$$\underline{Z}_{RL} = R + j \cdot \omega \cdot L$$

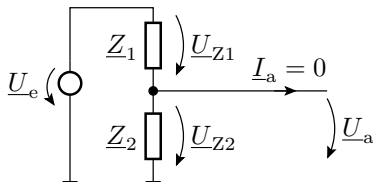
■ Parallelschaltung

$$\frac{\underline{I}_{\text{ges}}}{\underline{U}} = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{ges}}} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}} + \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$$



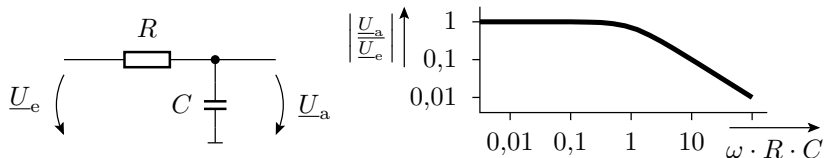
$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\text{RLC}} &= \underline{Z}_{\text{RL}} \parallel \underline{Z}_{\text{C}} = \frac{1}{\frac{1}{R+j\omega\cdot L} + j\omega\cdot C} \\ &= \frac{R + j\omega\cdot L}{1 + j\omega\cdot R\cdot C - \omega^2\cdot L\cdot C} \end{aligned}$$

Spannungsteiler



$$\underline{U}_a = \underline{U}_e \cdot \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

Frequenzgang eines RC-Glieds

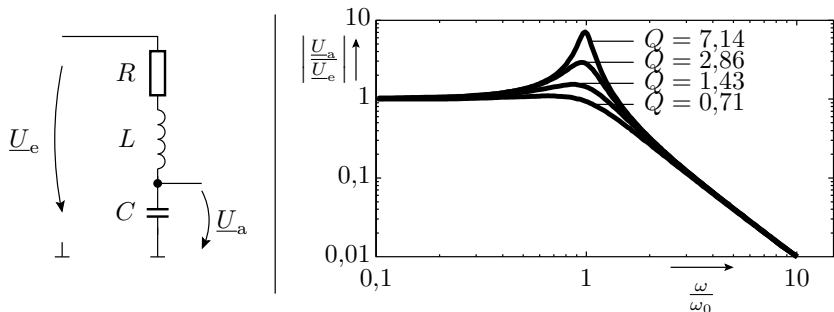


- $\underline{Z}_1 = R$ und $\underline{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C}$:

$$\underline{U}_a = \underline{U}_e \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\underline{U}_e}{1 + j \cdot \omega \cdot R \cdot C}$$

Für niedrige Frequenzen ist die Ausgangsspannung gleich der Eingangsspannung. Für hohe Frequenzen nimmt ihr Betrag umgekehrt proportional mit der Frequenz ab.

RLC-Spannungsteiler



$$\underline{U}_a = \underline{U}_e \cdot \frac{\frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}{R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}} = \underline{U}_e \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \frac{\omega}{Q \cdot \omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \quad (1)$$

$Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$ - Güte, $\omega_0 = 1/\sqrt{L \cdot C}$ - Resonanzfrequenz. Mit $Q \approx 1$ ist das ein Tiefpass und mit $Q \gg 1$ ein Bandpass.



Transistorverstärker

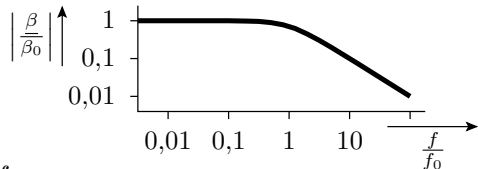
Der Frequenzgang der Stromverstärkung

Die Verstärkung eines Bipolartransistors hat eine ähnliche Frequenzabhängigkeit wie die Übertragungsfunktion eines RC-Gliedes:

$$\underline{\beta} = \beta_0 \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \frac{f}{f_0}}$$

β_0 – Grundverstärkung

f_0 – Grenzfrequenz



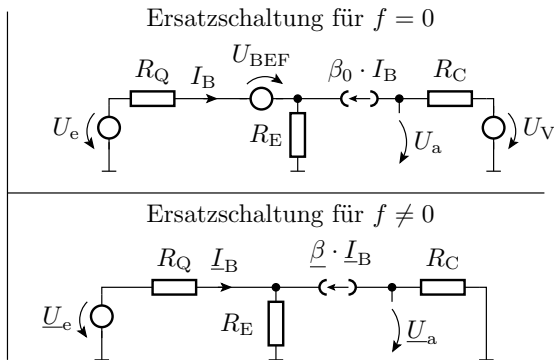
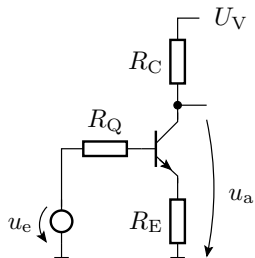
Für hohe Frequenzen $f \gg f_0$:

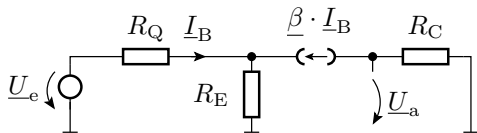
$$\underline{\beta} \approx \beta_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \frac{f}{f_0}} = -j \cdot \frac{\beta_0 \cdot f_0}{f} = -j \cdot \frac{f_T}{f}$$

$f_T = \beta_0 \cdot f_0$ – Transitfrequenz (Frequenz für $|\underline{\beta}| = 1$).

Der Frequenzgang der Verstärkung eines Verstärkers

- Beim Aufbau eines Transistorverstärkers wird die Verstärkung der Gesamtschaltung durch externe Widerstände eingestellt.
- Dabei gilt tendenziell: Verstärkung \downarrow Grenzfrequenz \uparrow





$$\underline{U}_e = (R_Q + R_E \cdot (1 + \underline{\beta})) \cdot \underline{I}_B$$

$$\underline{U}_a = -R_C \cdot \underline{\beta} \cdot \underline{I}_B$$

$$= -\frac{R_C \cdot \underline{\beta} \cdot \underline{U}_e}{R_Q + R_E \cdot (1 + \underline{\beta})}$$

$$= -\frac{R_C \cdot \underline{U}_Q}{(R_Q + R_E) \cdot \frac{1}{\underline{\beta}} + R_E}$$

$$\frac{1}{\underline{\beta}} = \frac{1}{\beta_0} + \frac{j \cdot f}{f_T}$$

$$\underline{U}_a = - \frac{R_C \cdot \underline{U}_e}{(R_Q + R_E) \cdot \left(\frac{1}{\beta_0} + \frac{j \cdot f}{f_T} \right) + R_E} = \frac{v_{U0} \cdot \underline{U}_e}{1 + \frac{j \cdot f}{f_{V0}}} \quad (2)$$

Für niedrige Frequenzen beträgt die Verstärkung:

$$v_{U0} = - \frac{R_C}{(R_Q + R_E) \cdot \frac{1}{\beta_0} + R_E} \approx - \frac{R_C}{R_E}$$

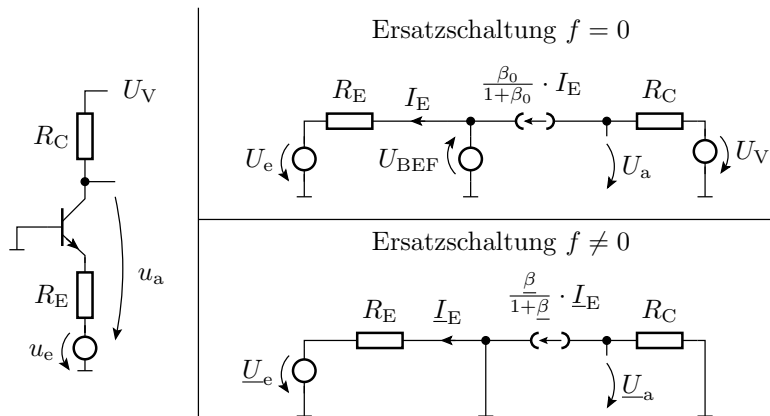
Die Grenzfrequenz der Spannungsverstärkung f_{V0} , bei der die Verstärkung auf das $v_{U0}/\sqrt{2}$ abgesunken ist, beträgt:

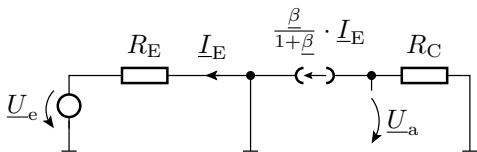
$$f_{V0} = \frac{f_T \cdot \left((R_Q + R_E) \cdot \frac{1}{\beta_0} + R_E \right)}{(R_Q + R_E)} \approx f_T \cdot \frac{R_E}{R_Q + R_E}$$

Für einen Quellenwiderstand $R_Q \ll R_E$ ist die Grenzfrequenz der Spannungsverstärkung nahezu die Transistfrequenz f_T der Stromverstärkung des Transistors. Für eine hochohmige Quelle ist die Grenzfrequenz wesentlich geringer.

Basisschaltung

- Die Basis liegt (für $f \neq 0$) auf dem Bezugspotenzial.
- Transistorverstärker für hohe Frequenzen und Bandbreiten.





$$\underline{I}_E = -\frac{\underline{U}_e}{R_E}$$

$$\underline{U}_a = -\frac{\underline{\beta} \cdot R_C \cdot \underline{I}_E}{1 + \underline{\beta}} = \frac{R_C \cdot \underline{U}_e}{R_E \cdot \left(1 + \frac{1}{\underline{\beta}}\right)}$$

$$\underline{U}_a = \frac{R_C \cdot \underline{U}_e}{R_E \cdot \left(1 + \frac{1}{\underline{\beta}_0} + \frac{j \cdot f}{f_T}\right)} \approx \frac{R_C \cdot \underline{U}_e}{R_E \cdot \left(1 + \frac{j \cdot f}{f_T}\right)} = \frac{v_{U0} \cdot \underline{U}_e}{1 + \frac{j \cdot f}{f_{V0}}}$$

Die Verstärkung für niedrige Frequenzen beträgt:

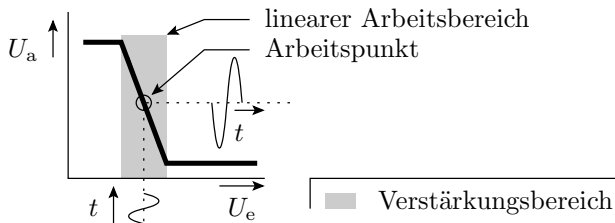
$$v_{U0} = R_C / R_E$$

Die Grenzfrequenz der Spannungsverstärkung f_{V0} (für $v_{V0} / \sqrt{2}$) ist etwa die Transitfrequenz der Stromverstärkung:

$$f_{V0} \approx f_T$$

Arbeitspunkt

- Der Arbeitspunkt beschreibt die Spannungen und Ströme im stationären Zustand.
- Der Transistor muss für den gesamten nutzbaren Ein- und Ausgangsspannungsbereich im Normalbereich arbeiten.
- Ein großer Ein- und Ausgangsspannungsbereich verlangt, dass der Arbeitspunkt auf der Übertragungsfunktion in der Mitte des Verstärkungsbereichs liegt.

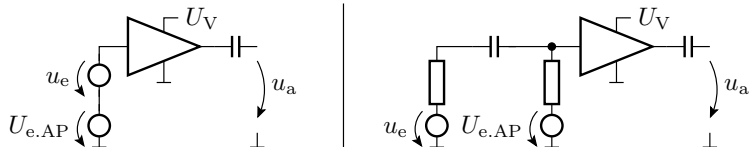


Einstellung des Arbeitspunktes:

- über den Gleichanteil der Eingangsspannung u_e oder
- eine Gleichspannungsquelle in Reihe zur Eingangssignalquelle.

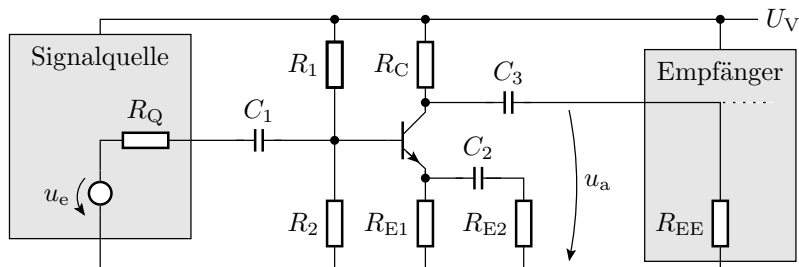
Alternative:

- Nur Spektralanteile mit einer Frequenz $f \geq f_u$ verstärken (f_u – minimale Nutzfrequenz).
- Der Frequenzbereich darunter und der stationäre Betrieb werden für die Einstellung des Arbeitspunkts genutzt.
- Trennung von Gleichanteil und Nutzsignal mit RC-Gliedern.



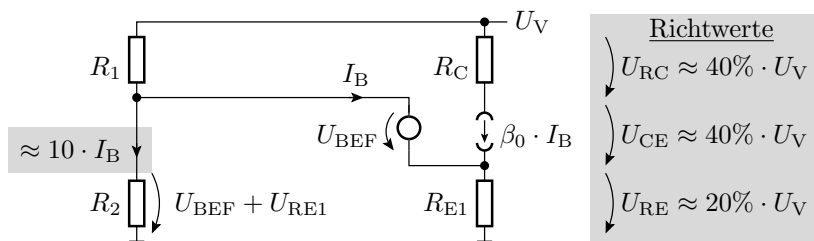
$U_{e.AP}$	Gleichspannung zur Arbeitspunkteinstellung
	Der Transistorverstärker selbst

Typischer Signalverstärker



- Für die Arbeitspunkteinstellung (stationärer Zustand) sind die Kapazitäten Unterbrechungen. Mit dieser Ersatzschaltung werden R_1 , R_2 , R_{E1} und R_C geeignet festgelegt.
- Im Frequenzbereich des Nutzsignals seien alle \underline{Z}_C vernachlässigbar klein. Mit dieser Ersatzschaltung werden C_1 bis C_3 und R_{E2} festgelegt.

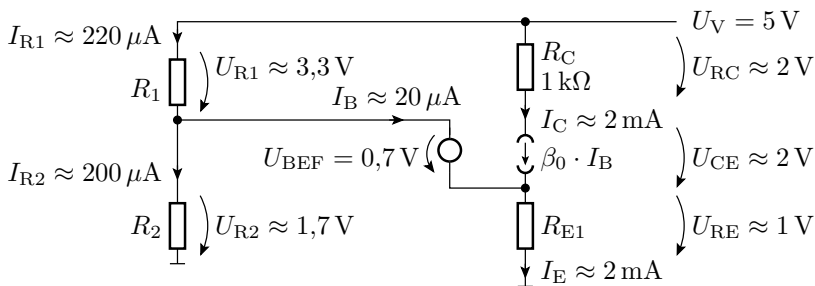
Arbeitspunkteinstellung



Beispiel:

gegeben: $U_V = 5 \text{ V}$, $\beta_0 \approx 100$, $U_{BEF} \approx 0,7 \text{ V}$ und $R_C = 1 \text{ k}\Omega$

gesucht: R_{E1} , R_1 und R_2

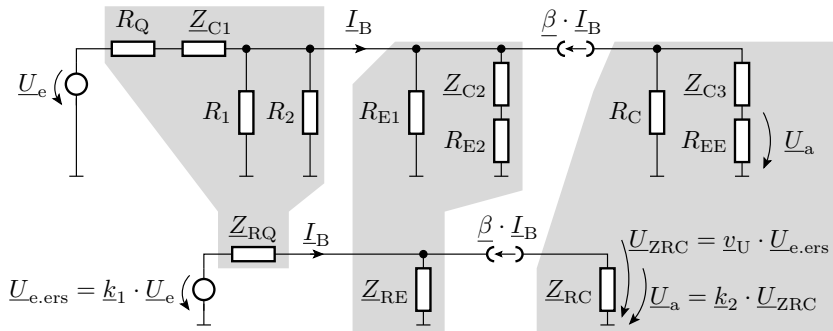


$$R_{E1} \approx \frac{1 \text{ V}}{2 \text{ mA}} \approx 500 \Omega$$

$$R_1 \approx \frac{3,3 \text{ V}}{220 \mu\text{A}} \approx 15 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 \approx \frac{1,7 \text{ V}}{200 \mu\text{A}} \approx 8,6 \text{ k}\Omega$$

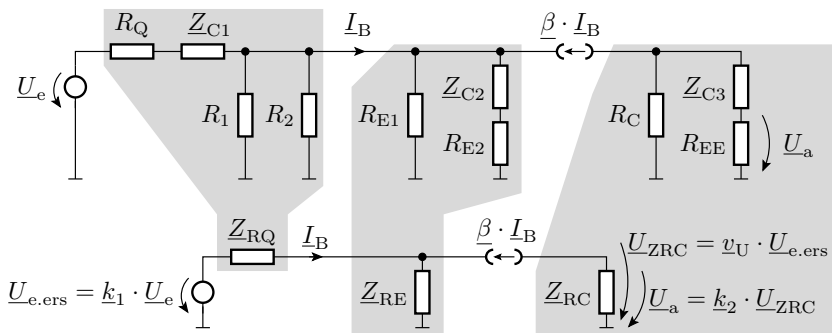
Ersatzschaltung im genutzten Frequenzbereich



Ersatzschaltungsparameter:

$$\underline{Z}_{RQ} = \left(R_{Q1} - \frac{j}{\omega \cdot C_1} \right) \parallel R_1 \parallel R_2$$

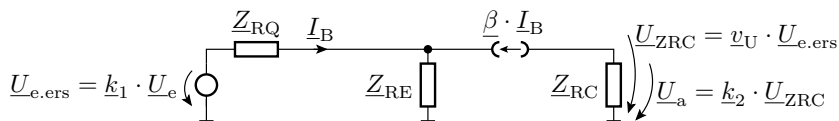
$$\underline{k}_1 = \frac{R_1 \parallel R_2}{(R_1 \parallel R_2) + R_{Q1} - \frac{j}{\omega \cdot C_1}}$$



$$\underline{Z}_{RE} = \left(R_{E2} - \frac{j}{\omega \cdot C_2} \right) \parallel R_{E1}$$

$$\underline{Z}_{RC} = \left(R_{EE} - \frac{j}{\omega \cdot C_3} \right) \parallel R_C$$

$$\underline{k}_2 = \frac{R_{EE}}{R_{EE} + \underline{X}_{C3}} = \frac{j\omega \cdot C_3 \cdot R_{EE}}{j\omega \cdot C_3 \cdot R_{EE} + 1}$$

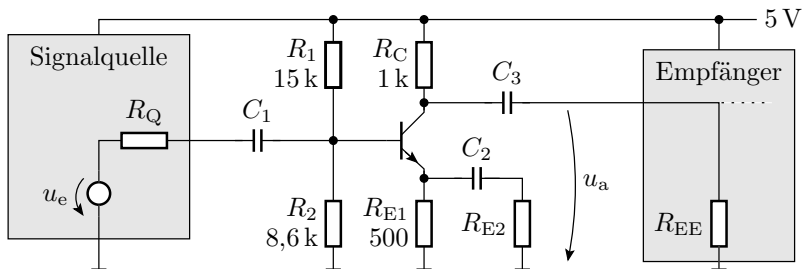


Die Spannungsverstärkung dieser Ersatzschaltung wurde bereits auf Folie 51, Gl. 2 hergeleitet:

$$\underline{v}_U = \frac{\underline{U}_{ZRC}}{\underline{U}_{e.ers}} = \frac{-\underline{Z}_{RC}}{(\underline{Z}_{RQ} + \underline{Z}_{RE}) \cdot \left(\frac{1}{\beta_0} + \frac{j \cdot f}{f_g}\right) + \underline{Z}_{RE}} \xrightarrow{f \ll f_g} \approx -\frac{\underline{Z}_{RC}}{\underline{Z}_{RE}}$$

Die gesamte Verstärkung ist um die beiden Spannungsteilerverhältnisse kleiner:

$$\underline{v}_{U.ges} = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \underline{k}_1 \cdot \underline{k}_2 \cdot \underline{v}_U \xrightarrow{f \ll f_g} \approx -\underline{k}_1 \cdot \underline{k}_2 \cdot \frac{\underline{Z}_{RC}}{\underline{Z}_{RE}}$$



Weitere Entwurfsschritte (am einfachsten mit Matlab oder einem Simulator durch Probieren):

- Mit R_{E2} gewünschte Spannungsverstärkung einstellen.
- C_1 bis C_3 so festlegen, dass $\underline{v}_{U.ges}$ bis zur unteren Nutzfrequenz auf nicht weniger als das 0,707-fache absinkt.
- Kontrolle der Verlustleistungen,
- Kontrolle über die gesamten Toleranzbereiche, ...



Operationsverstärker



Frequenzgang eines Operationsverstärkers

$$\underline{v}_0 = v_{00} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \frac{f}{f_0}} = \frac{1}{\frac{1}{v_{00}} + j \cdot \frac{f}{f_T}}$$

v_{00} Verstärkung für niedrige Frequenzen;

f_0 Grenzfrequenz;

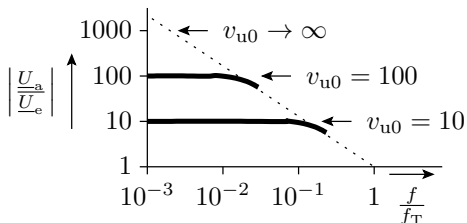
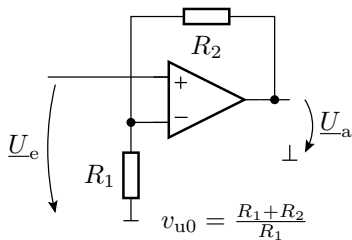
f_T Transistfrequenz: $f_T = v_{00} \cdot f_0$

Idealer Operationsverstärker $v_{00} \rightarrow \infty$:

$$\lim_{v_{00} \rightarrow \infty} (\underline{v}_0) = -j \cdot \frac{f_T}{f}$$

Der nutzbare Frequenzbereich hängt von der externen Beschaltung ab.

Nicht invertierender Verstärker

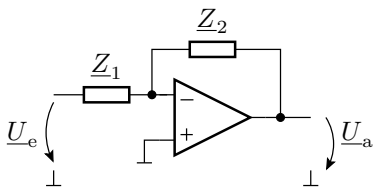
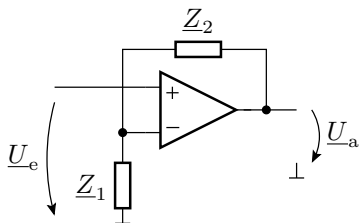


$$\underline{U}_a = \frac{\underline{U}_e}{\frac{1}{v_0} + \frac{R_1}{R_1 + R_2}} = \frac{\underline{U}_e}{\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_{u0}}} = \frac{v_{u0}}{j \cdot \frac{v_{u0} \cdot f}{f_T} + 1}$$

Die Grenzfrequenz des Verstärkers ist der Quotient aus Transistfrequenz des OV's und der eingestellten Verstärkung:

$$f_{v0} = \frac{f_T}{v_{u0}}$$

Im Frequenzbereich $f \ll f_{v0}$



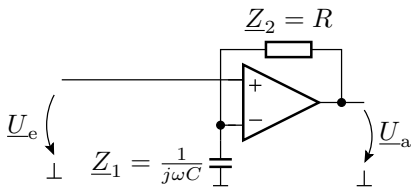
Verstärkung des nichtinvertierenden Verstärkers:

$$\underline{U}_a = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \cdot \underline{U}_e \quad (3)$$

Verstärkung des invertierenden Verstärkers:

$$\underline{U}_a = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \cdot \underline{U}_e \quad (4)$$

Nicht invertierender Verstärker mit RC-Beschaltung

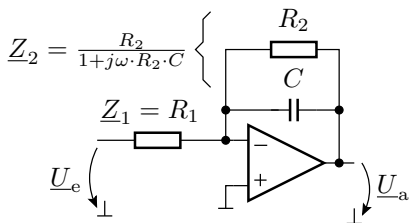


$$\underline{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C}; \quad \underline{Z}_2 = R$$

Übertragungsfunktion:

$$\underline{U}_a = \frac{\frac{1}{j\omega C} + R}{\frac{1}{j\omega C}} \cdot \underline{U}_e = (1 + j\omega \cdot R \cdot C) \cdot \underline{U}_e$$

Invertierender Verstärker mit RC-Beschaltung



$$\underline{Z}_1 = R_1; \quad \underline{Z}_2 = \frac{R_2}{1 + j\omega \cdot R_2 \cdot C}$$

Übertragungsfunktion:

$$\underline{U}_a = -\frac{R_2}{R_1 \cdot (1 + j\omega \cdot R_2 \cdot C)} \cdot \underline{U}_e$$



Auflösen nach \underline{U}_a (\underline{U}_e) durch eliminieren der 3 unbekanntenen Ströme:

$$\underline{U}_a = \frac{\underline{U}_e}{1 + j \cdot \omega \cdot C_2 \cdot (R_1 + R_2) - \omega^2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot C_2 \cdot C_3}$$

Das ist derselbe Typ von Übertragungsfunktion wie für den RLC-Spannungsteiler auf Folie 46:

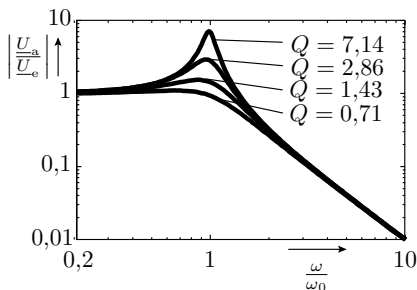
$$\underline{U}_a = \frac{\underline{U}_e}{1 + j \cdot \frac{\omega}{Q \cdot \omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt für die Resonanzfrequenz:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 \cdot R_2 \cdot C_2 \cdot C_3}}$$

und für die Güte:

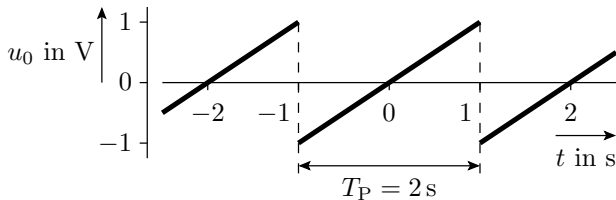
$$Q = \frac{1}{\omega_0 \cdot C_2 \cdot (R_1 + R_2)}$$





Aufgaben

Bestimmung des Spektrums



- Suchen einer geeigneten Fourierreihe.
- Anpassen an den gegebenen Signalverlauf.
- Darstellung der Abtastfolge und der Ergebnisse der Fourierreihe einmal mit drei und einmal mit neun Summanden (Matlabprogramm).



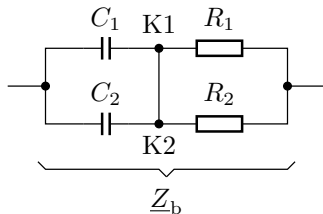
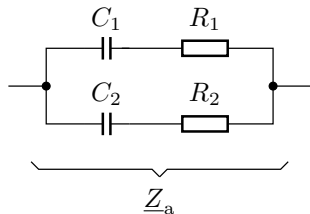
Imaginärer Strom?

Was bedeutet es physikalisch, wenn ein berechneter Strom einen Imaginärteil besitzt, wie z.B. der Strom:

$$\underline{I}_1 = (1 + j) \text{ mA}$$

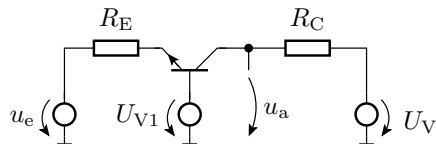
Gibt es dann in der Schaltung imaginäre Ströme?

Zusammenfassen komplexer Widerstände



- Wie groß sind die komplexen Ersatzwiderstände \underline{Z}_a und \underline{Z}_b ?
- Unter welcher Bedingung sind die Ersatzwiderstände beider Schaltungen gleich?

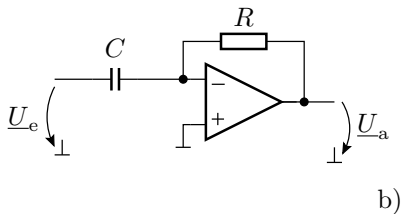
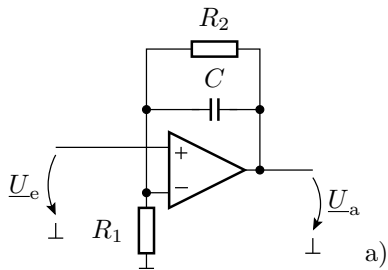
Grenzfrequenz und Arbeitspunkt



$R_E = 220 \Omega$	$\beta_0 = 100$
$R_C = 1 \text{ k}\Omega$	$f_T = 100 \text{ MHz}$
$U_V = 5 \text{ V}$	$U_{\text{BEF}} \approx 0,7 \text{ V}$

- Stellen Sie die Ersatzschaltung für den stationären Zustand mit dem Transistor im Normalbereich auf.
- Wie groß ist die Versorgungsspannung U_{V1} zu wählen, damit die Ausgangsspannung im stationären Zustand 3 V beträgt?
- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion.
- Welche Amplitude darf ein kosinusförmiges Ausgangssignal maximal haben (Mittelwert 3 V)?
- Stellen Sie die Ersatzschaltung für Frequenzen $f > 0$ null auf.
- Wie groß ist die Verstärkung für Frequenzen $f \ll f_T$?
- Wie groß ist die Grenzfrequenz der Verstärkung?

Filter mit Operationsverstärkern



- Wie lauten die Übertragungsfunktionen?