

# Elektronik 1, Foliensatz 4: MOS-Transistoren und Operationsverstärker

G. Kemnitz

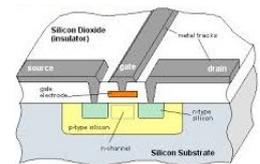
4. Mai 2022

## Inhaltsverzeichnis

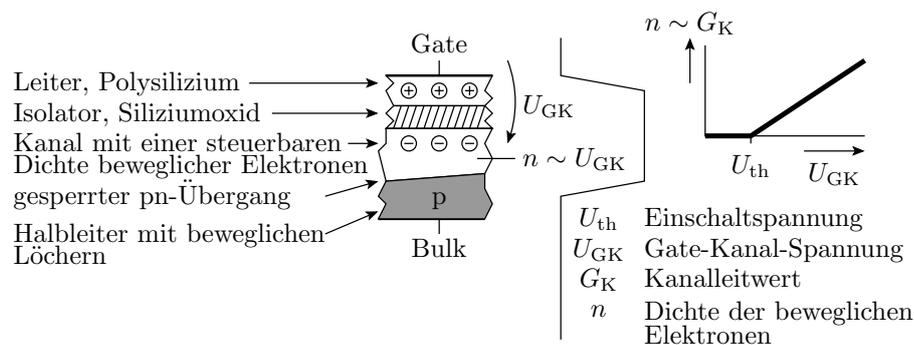
<b>1</b>	<b>MOS-Transistoren</b>	<b>1</b>
1.1	Verstärker . . . . .	3
1.2	Schaltbetrieb . . . . .	5
1.3	CMOS-Gatter . . . . .	9
1.4	Speicherzellen . . . . .	15
1.5	Aufgaben . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Operationsverstärker</b>	<b>20</b>
2.1	Verstärker . . . . .	21
2.2	Rechelemente . . . . .	22
2.3	Komparator . . . . .	24
2.4	Digital-Analog-Umsetzer . . . . .	26
2.5	Analog-Digital-Umsetzer . . . . .	27

## 1 MOS-Transistoren

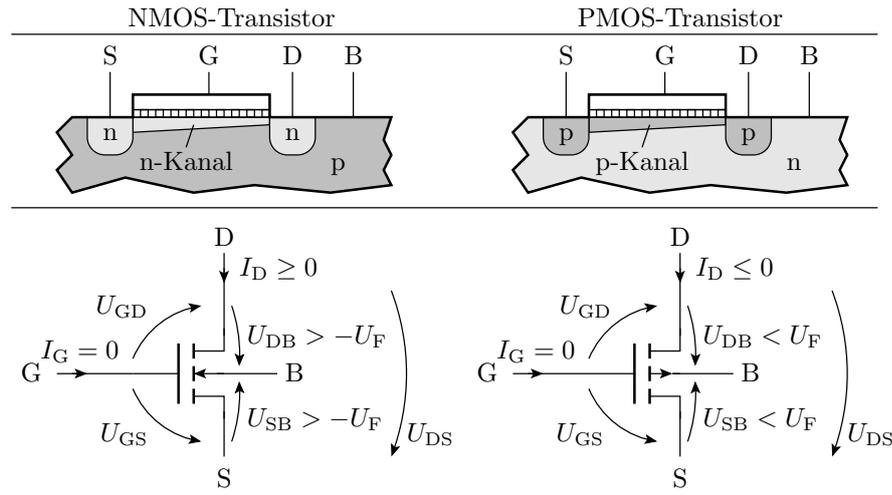
### Funktionsprinzip



- Über der Halbleiteroberfläche befindet sich, isoliert durch eine dünne Oxidschicht, die Steuerelektrode, das Gate.
- Die Gate-Kanal-Spannung steuert die Dichte der beweglichen Ladungsträger (Elektronen oder Löcher) und damit den Leitwert im Kanal.



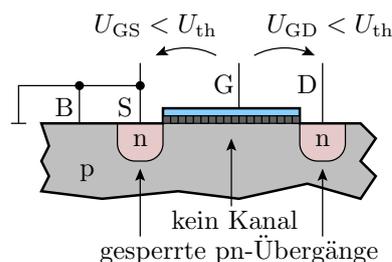
### Aufbau und Anschlüsse



### Bezeichnung der Anschlüsse, Spannungen etc.

G	Gate (Steueranschluss)	$U_{GS}$	Gate-Source-Spannung
S	Source (Quelle bewegl. Lad.)	$U_{GD}$	Gate-Drain-Spannung
D	Drain (Abfluss bewegl. Lad.)	$U_{DS}$	Drain-Source-Spannung
B	Bulk / Substrat	$U_{SB}$	Source-Bulk-Spannung
n	n-leitfähiges Gebiet (bewegliche Elektronen)	$U_{DB}$	Drain-Bulk-Spannung
p	p-leitfähiges Gebiet (bewegliche Löcher)	$U_F$	Flussspannung des pn-Übergangs
		$I_D$	Drainstrom
		$I_G$	Gatestrom (praktisch null)

### Arbeitsbereiche: Sperrbereich



Der Kanal ist von Anfang bis Ende ausgeschaltet:

$$\text{NMOS: } U_{GS} < U_{th} \text{ und } U_{GD} < U_{th}$$

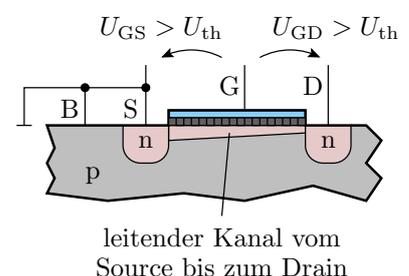
$$\text{PMOS: } U_{GS} > U_{th} \text{ und } U_{GD} > U_{th}$$

( $U_{th}$  – Einschaltspannung). Der Drainstrom ist Null.

### aktiver Bereich

$$\text{NMOS: } U_{GS} > U_{th} \text{ und } U_{GD} > U_{th}$$

$$\text{PMOS: } U_{GS} < U_{th} \text{ und } U_{GD} < U_{th}$$



- Wenn das Potenzial entlang des Kanals konstant ist ( $U_{DS} \rightarrow 0$ ):

$$G_{\text{Kanal}} = \frac{I_D}{U_{DS}} = K \cdot (U_{GS} - U_{th})$$

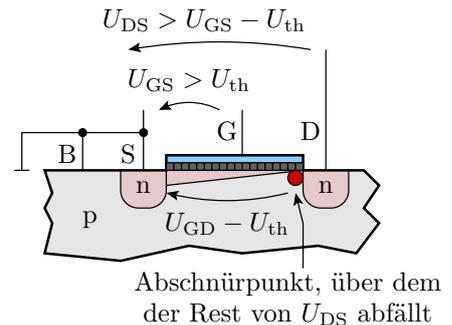
- Sonst, wenn im Kanal Strom fließt (für NMOS-Transistoren  $U_{DS} > 0$  und für PMOS-Transistoren  $U_{DS} < 0$ ):

$$I_D = K \cdot \left( (U_{GS} - U_{th}) \cdot U_{DS} - \frac{U_{DS}^2}{2} \right)$$

( $K$  – Steilheit,  $U_{th}$  – Einschaltspannung, beide für selbstsperrende NMOS-Transistoren positiv und für selbstsperrende PMOS-Transistoren negativ).

### Abschnürbereich

- NMOS:  $U_{GS} > U_{th}$  und  $U_{GD} < U_{th}$   
 PMOS:  $U_{GS} < U_{th}$  und  $U_{GD} > U_{th}$



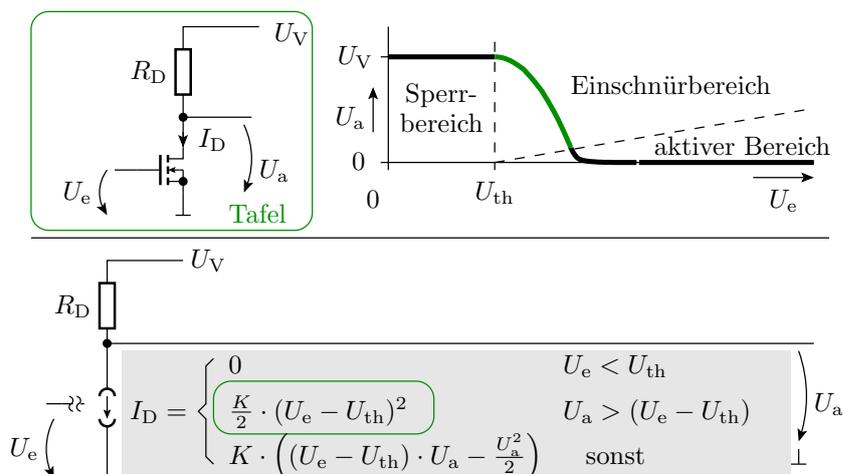
Für  $U_{DS} > U_{GS} - U_{th}$  nehmen Ladungsdichte, Feldstärke und Strom im leitfähigen Teil des Kanal gegenüber  $U_{DS} = U_{GS} - U_{th}$  nicht weiter zu. Die hinzukommende Spannung fällt über dem Abschnürpunkt ab. Verhalten einer gesteuerten Stromquelle:

$$I_D = K \cdot \frac{(U_{GS} - U_{th})^2}{2}$$

( $K$  – Steilheit,  $U_{th}$  – Einschaltspannung).

## 1.1 Verstärker

### Einfacher Verstärker



### Übertragungsfunktion und Verstärkung

Verstärker nutzen hauptsächlich den Abschnürbereich. Voraussetzungen für den Abschnürbereich:

- Eingangsspannung:

$$U_e > U_{th}$$

- Ausgangsspannung:

$$U_a > U_e - U_{th}$$

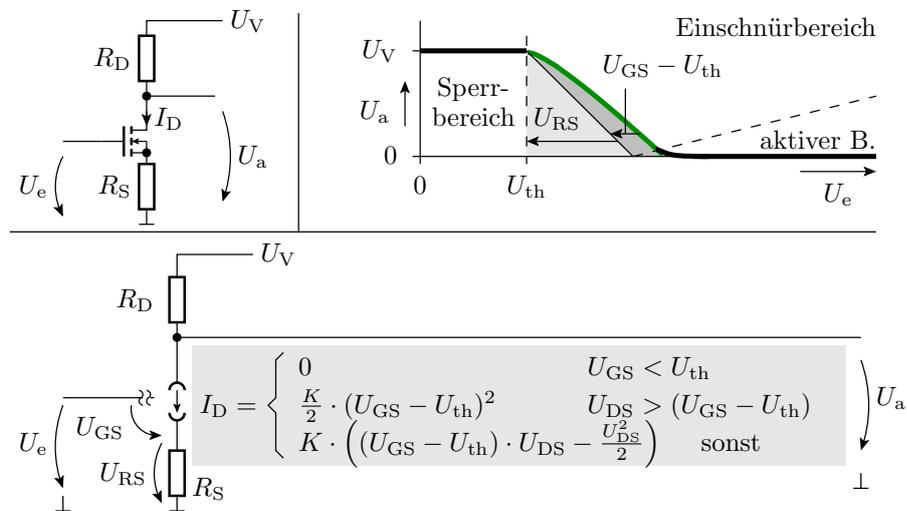
Übertragungsfunktion:

$$U_a = U_V - \frac{K \cdot R_{DS}}{2} \cdot (U_e - U_{th})^2$$

Verstärkung:

$$v_U = \frac{dU_a}{dU_e} = -K \cdot R_{DS} \cdot (U_e - U_{th})$$

### Linearisierung



### Betrieb im Abschnürbereich

$$U_e = U_{GS} + U_{RS}$$

$$U_{GS} = \sqrt{\frac{2 \cdot I_D}{K}} + U_{th} = \sqrt{\frac{2 \cdot (U_V - U_a)}{K \cdot R_D}} + U_{th}$$

$$U_e = \sqrt{\frac{2 \cdot (U_V - U_a)}{K \cdot R_D}} + U_{th} + \frac{R_S}{R_D} \cdot (U_V - U_a)$$

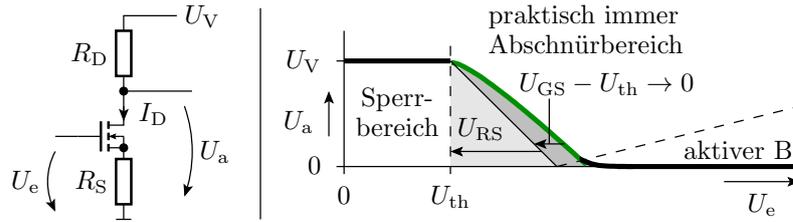
Kehrwert der Verstärkung:

$$\frac{dU_e}{dU_a} = \frac{1}{v_u} = -\frac{R_S}{R_D} - \frac{1}{R_D} \cdot \sqrt{\frac{R_D}{2 \cdot K \cdot (U_V - U_a)}}$$

für

$$R_S \gg \sqrt{\frac{R_D}{2 \cdot K \cdot (U_V - U_a)}} \Rightarrow v_u \approx -\frac{R_D}{R_S}$$

### Linearisierung graphisch



Für  $U_{GS} \ll U_{RS}$  gilt:

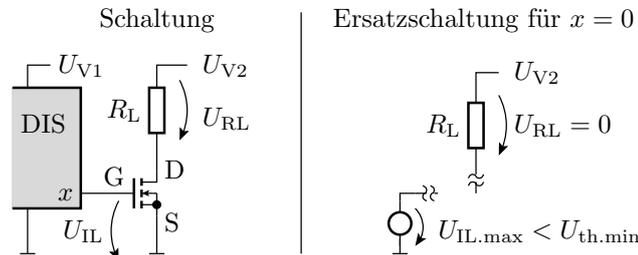
$$\begin{aligned}
 U_e &\approx U_{RS} + U_{th} \\
 U_a &= U_V - \frac{R_D}{R_S} \cdot U_{RS} \approx U_V - \frac{R_D}{R_S} \cdot (U_e - U_{th}) \\
 v_u &= \frac{dU_a}{dU_e} \approx -\frac{R_D}{R_S}
 \end{aligned}$$

## 1.2 Schaltbetrieb

### Low-Side-Schalter

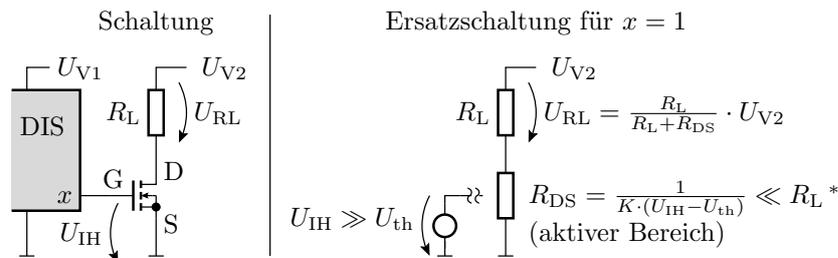
- Schalten des »Minusanschlusses«
- Source ist der Bezugspunkt (Masse)

Fall 1: Transistor sperrt ( $x = 0$ ;  $U_{GS} < U_{th}$ )



(DIS – digitaler integrierter Schaltkreis, z.B. ein Mikroprozessor).

Fall 2: Transistor eingeschaltet ( $x = 1$ ;  $U_{GS} \gg U_{th}$ )



\* Gültigkeitsvoraussetzung für das Berechnungsmodell

$$I_D = K \cdot \left( (U_{IH} - U_{th}) \cdot U_{DS} - \frac{U_{DS}^2}{2} \right) \approx K \cdot (U_{IH} - U_{th}) \cdot U_{DS}$$

## Leistungsumsatz

$$I_D = \frac{U_{V2}}{R_L + R_{DS}}$$

- Umgesetzte Leistungen:

$$P_{RL} = \frac{R_L \cdot U_{V2}^2}{(R_L + R_{DS})^2} \quad P_{Tr} = \frac{R_{DS} \cdot U_{V2}^2}{(R_L + R_{DS})^2}$$

$P_{RL}$ : Leistungsumsatz im Lastwiderstand

$P_{Tr}$ : Leistungsumsatz im Transistor

$$P_{Tr} = \frac{R_{DS}}{R_L} \cdot P_{RL}$$

- Wegen  $R_{DS} \ll R_L$  sehr günstiges Verhältnis.

⇒ Steuerung von Lasten bis zu mehreren hundert Watt.

## Beispiele für Low-Side-Schalter

Typ	$R_{DS}(U_{IH})$	$U_{th}$	$I_{Dmax}$	$U_{DSmax}$	$P_{max}$
IRFD014	200 mΩ (10 V)	2 ... 4 V	1,2 A	60 V	1,3 W
RFD14N05L	100 mΩ (5 V)	1 ... 2 V	14 A	50 V	48 W
BUK100-50GL <sup>(1)</sup>	125 mΩ (5 V)	1 ... 2 V	13,5 A	50 V	40 W

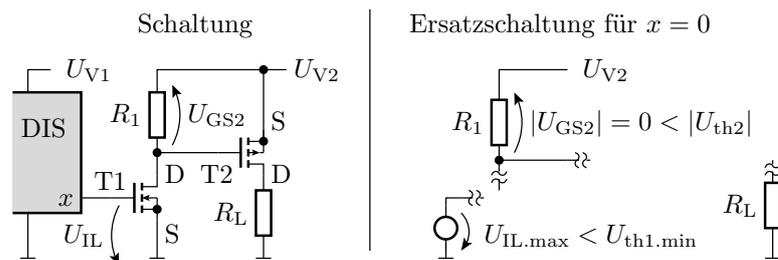
<sup>(1)</sup> mit integrierten Schutzfunktionen gegen zu hohe Bauteiltemperaturen und Ströme;  $R_{DS}$  – Drain-Source-Widerstand;  $U_{GS}$  – Gate-Source-Spannung;  $U_{th}$  – Einschaltspannung;  $I_{Dmax}$  – max. zulässiger Drain-Strom;  $U_{DSmax}$  – max. zulässige Drain-Source-Spannung;  $P_{max}$  – max. zulässige Verlustleistung. Die Steilheit ergibt sich aus  $R_{DS}$  und der zugehörigen Gate-Source-Spannung:

$$K = \frac{1}{R_{DS} \cdot (U_{IH} - U_{th})}$$

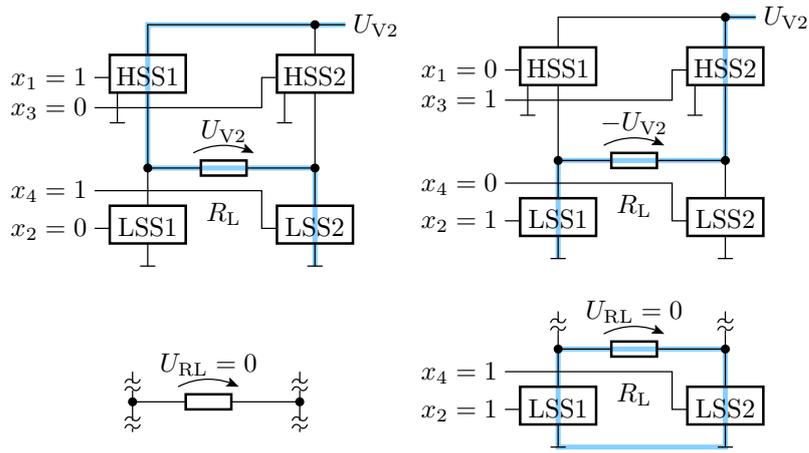
## High-Side-Schalter

Ein High-Side-Schalter schaltet die Verbindung zwischen dem Ausgabelement und dem positiven Versorgungsanschluss:

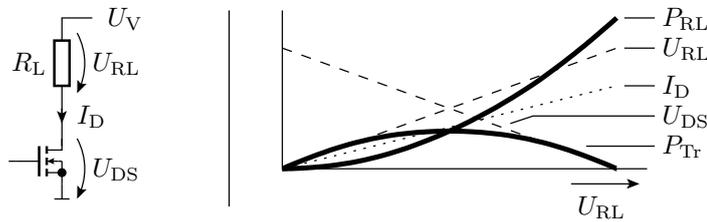
- PMOS-Transistor mit dem Source (Bezugspunkt) an  $+U_V$ .
- Digitale Schaltkreise haben den negativen Versorgungsanschluss als Bezugspunkt.
- Zweiter Transistor zur Änderung des Bezugspotentials.







**Stufenlose Leistungssteuerung konventionell**

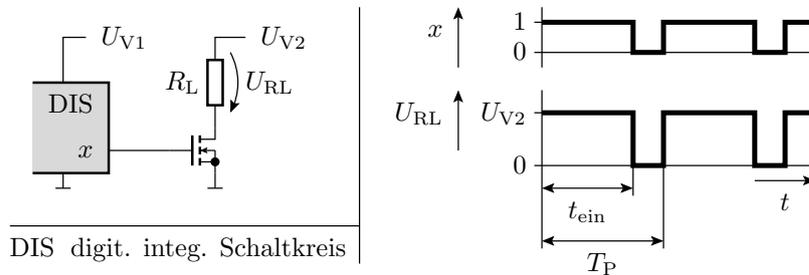


$$P_{RL} = \frac{(U_{v2})^2}{R_L}$$

$$P_{Tr} = \frac{(U_V - U_{v2}) \cdot U_{v2}}{R_L}$$

$$P_{Tr,max} = \frac{U_V^2}{4 \cdot R_L}$$

**Pulsweitenmodulation**



Ausgabeleistung proportional zur relativen Pulsweite:

$$\eta_T = \frac{t_{ein}}{T_P}$$

Im Mittel im Transistor umgesetzte Leistung:

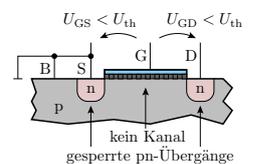
$$P_{Tr} = \frac{R_{DS}}{R_L} \cdot P_{RL}$$

**Wiederholung 25.11.2021**

Ausschaltbereich:  $I_D = 0$

NMOS:  $U_{GS} < U_{th}$  und  $U_{GD} < U_{th}$

PMOS:  $U_{GS} > U_{th}$  und  $U_{GD} > U_{th}$

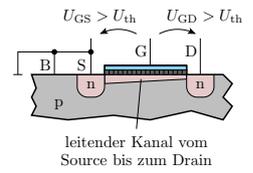


Aktiver Bereich:

$$I_D = K \cdot \left( (U_{GS} - U_{th}) \cdot U_{DS} - \frac{U_{DS}^2}{2} \right)$$

NMOS:  $U_{GS} > U_{th}$  und  $U_{GD} > U_{th}$

PMOS:  $U_{GS} < U_{th}$  und  $U_{GD} < U_{th}$

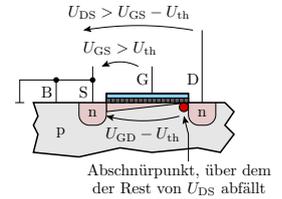


Einschnürrbereich:

$$I_D = \frac{K}{2} \cdot (U_{GS} - U_{th})^2$$

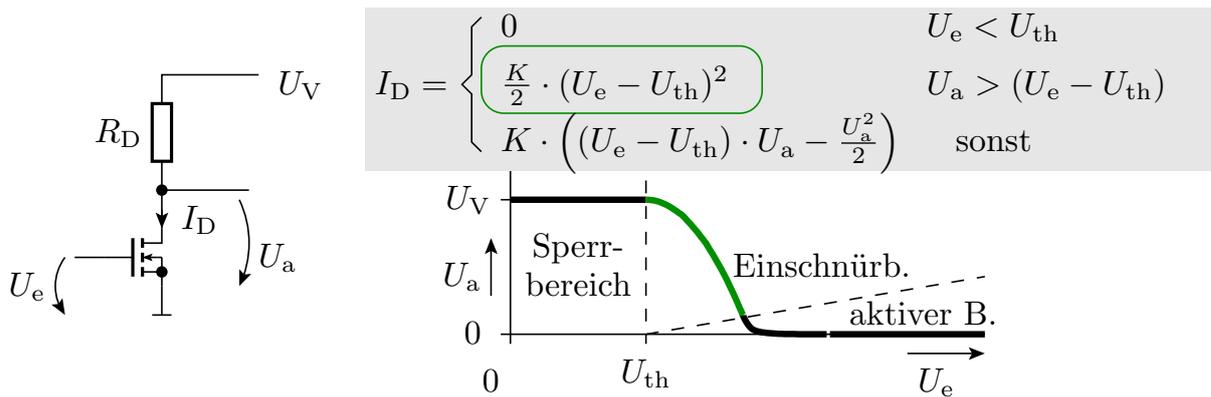
NMOS:  $U_{GS} > U_{th}$  und  $U_{GD} < U_{th}$

PMOS:  $U_{GS} < U_{th}$  und  $U_{GD} > U_{th}$

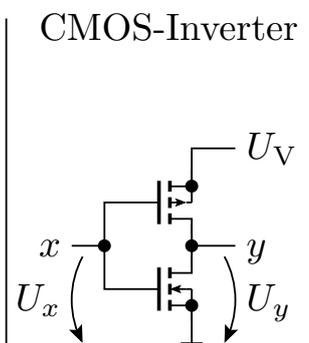
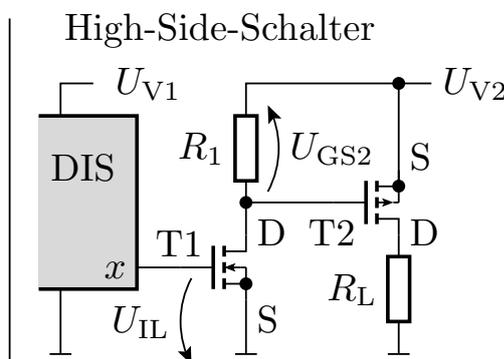
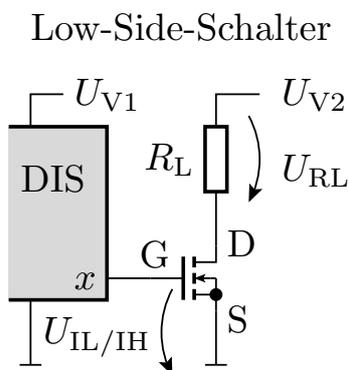


( $K$  – Steilheit,  $U_{th}$  – Einschaltspannung).

- Verstärker nutzen den Einschnürrbereich:

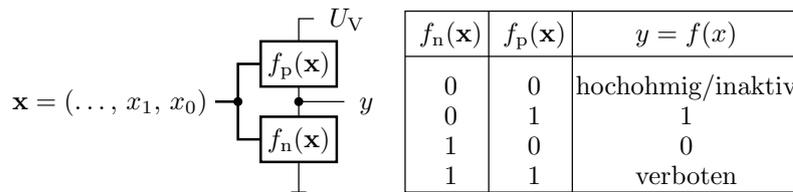


- Schaltbetrieb



### 1.3 CMOS-Gatter

Allgemeiner Aufbau

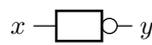


$$f_n(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{Zweipol gesperrt} \\ 1 & \text{Zweipol leitend} \end{cases}$$

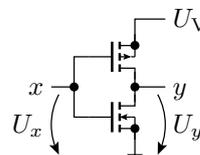
$$f_p(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{Zweipol gesperrt} \\ 1 & \text{Zweipol leitend} \end{cases}$$

### CMOS-Inverter

Schaltsymbol

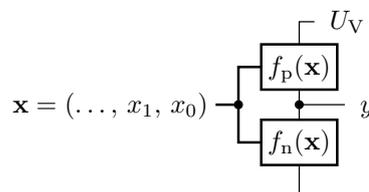


Transistorschaltung



- $x = 0$ : NMOS-Transistor aus, PMOS-Transistor ein,  $y = 1$
- $x = 1$ : NMOS-Transistor ein, PMOS-Transistor aus,  $y = 0$

### FCMOS-Gatter



- Komplementäre Funktionen des NMOS- und des PMOS-Zweipols

$$f_p(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

$$f_n(\mathbf{x}) = \overline{f(\mathbf{x})}$$

- Innerhalb der Zweipole:
  - Reihenschaltung von Transistoren  $\Rightarrow$  UND (Operator  $\wedge$ )
  - Parallelschaltung von Transistoren  $\Rightarrow$  ODER (Operator  $\vee$ )
  - PMOS-Transistoren invertieren (schalten bei  $x_i = 0$  ein)

### Umformregeln für logische Ausdrücke

Umformungsregel	Bezeichnung
$\overline{\overline{x}} = x$	doppelte Negation
$x \vee 1 = 1$ $x \vee \overline{x} = 1$ $x \wedge 0 = 0$ $x \wedge \overline{x} = 0$	Eliminationsgesetze

Umformungsregel	Bezeichnung
$x_1 \vee (x_1 \wedge x_2) = x_1$ $x_1 \wedge (x_1 \vee x_2) = x_1$	Absorbtionsgesetze
$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = \overline{x_1 \wedge x_2}$ $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 = \overline{x_1 \vee x_2}$	de morgansche Regeln
$x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1$ $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$	Kommutativgesetz
$(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)$ $(x_1 \wedge x_2) \wedge x_3 = x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3)$	Assoziativgesetz
$x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3)$	Distributivgesetz

**Beweis durch Aufstellen der Wertetabellen**

Beispiel De Morgan'sche Regeln:

$x_1$	$x_2$	$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$	$\overline{x_1 \wedge x_2}$	$\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$	$\overline{x_1 \vee x_2}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0

- Ohne Klammern hat UND-Vorrang vor ODER.
- Der UND-Operator » $\wedge$ « kann in logischen Ausdrücken weggelassen werden und hat Vorrang vor ODER » $\vee$ «:

$$(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3$$

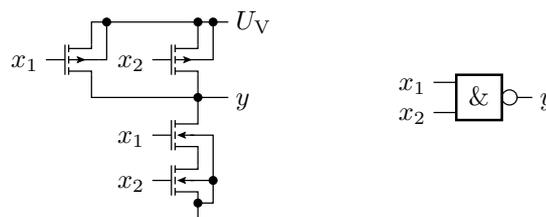
- Vor Anwendung »De Morgan« (Tausch UND  $\Leftrightarrow$  ODER) Klammern einfügen.

**NAND-Gatter**

$$y(\mathbf{x}) = \overline{x_1 x_2}$$

$$f_n(\mathbf{x}) = x_1 x_2$$

$$f_p(\mathbf{x}) = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$$

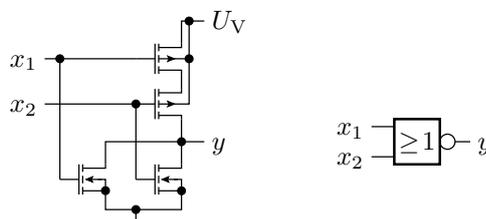


**NOR-Gatter**

$$y(\mathbf{x}) = \overline{x_1 \vee x_2}$$

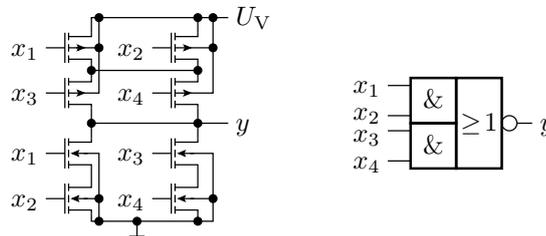
$$f_n(\mathbf{x}) = x_1 \vee x_2$$

$$f_p(\mathbf{x}) = \bar{x}_1 \bar{x}_2$$



### Komplexgatter

$$\begin{aligned}
 y(\mathbf{x}) &= \overline{x_1 x_2 \vee x_3 x_4} \\
 f_n(\mathbf{x}) &= x_1 x_2 \vee x_3 x_4 \\
 f_p(\mathbf{x}) &= (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)
 \end{aligned}$$



### Logische Ausdrücke vorher vereinfachen

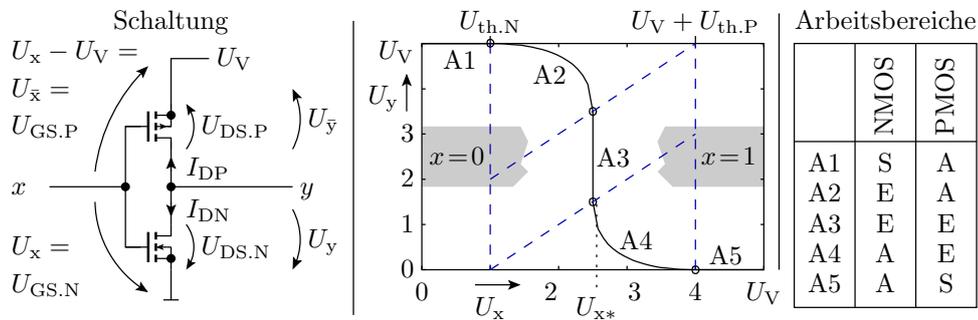
Komplexe logische Zielfunktionen lassen sich oft vor der Umsetzung in ein Gatter durch Anwendung der

- Eliminationsgesetze,
- Absorbationsgesetze und

anderer Umformungsregeln vereinfachen. Beispiel:

$$y = \overline{(x_1 x_2 x_3) \vee x_1 \vee x_2} = \overline{x_1 \vee x_2}$$

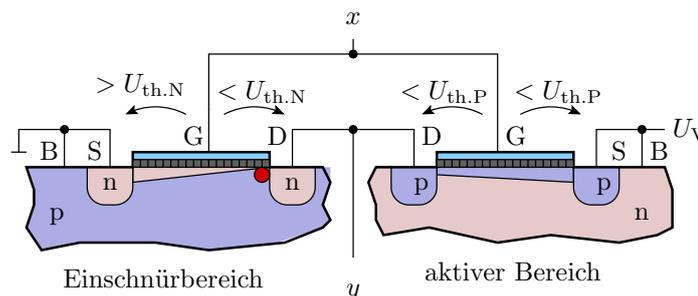
### Übertragungsfunktion eines CMOS-Inverters



(S – Sperrbereich; E – Ab- (Ein-) schnürbereich; A – aktiver Bereich)

- In einem korrekten Entwurf ist nach jedem Schaltvorgang ein Transistorzweig gesperrt (Arbeitsbereich A1 oder A5).
- Die Arbeitsbereiche A2 bis A4 sollten nur während der Schaltvorgänge auftreten.

### Arbeitsbereich A2



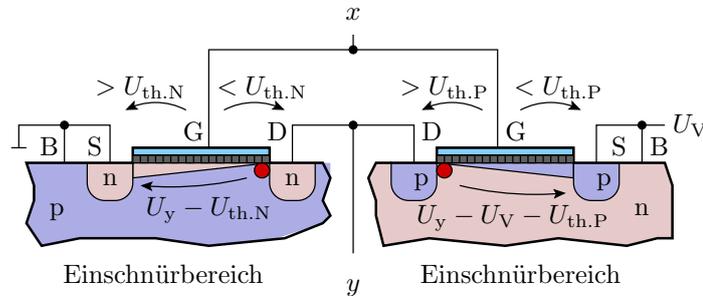
- Bedingung:

$$U_{th.N} < U_x < U_{x*}$$

- $U_x \rightarrow U_y$ : Lösungen der folgenden quadratischen Gleichung:

$$0 = K_N \cdot \frac{(U_x - U_{th.N})^2}{2} + K_P \cdot \left( (U_x - U_{th.P}) \cdot U_y - \frac{U_y^2}{2} \right)$$

### Arbeitsbereich A3

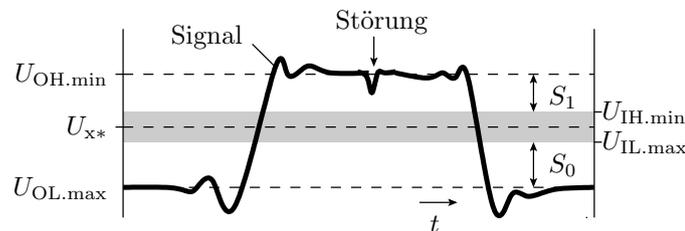


- Für eine bestimmte Eingangsspannung  $U_x = U_{x*}$  arbeiten beide Transistoren als gesteuerte Stromquellen, die denselben Strom liefern.
- Gleichung zur Berechnung dieser Spannung:

$$0 = K_N \cdot \frac{(U_{x*} - U_{th.N})^2}{2} + K_P \cdot \frac{(U_V - U_{x*} + U_{th.P})^2}{2}$$

- Laut Modell senkrechter Kennlinienverlauf.

### Störabstand

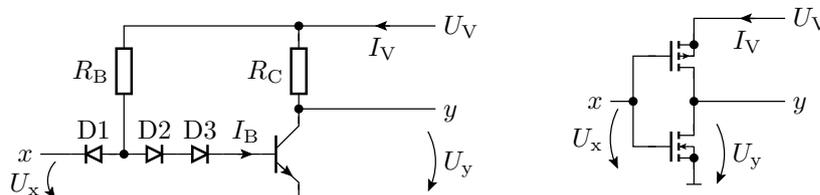


$U_{x*}$	Umschaltspannung zwischen null und eins
$U_{IL}, U_{IH}$	Eingangsspannung für eine 0 bzw. 1
$U_{OL}, U_{OH}$	Ausgangsspannung für eine 0 bzw. 1

Störabstand: Maximale, der Eingangsspannung überlagerte Störspannung, bei der garantiert keine Fehlfunktion auftritt:

$$S = \min(S_0, S_1) = \min(U_{IL.max} - U_{OL.min}, U_{OH.min} - U_{IH.max})$$

### Vergleich CMOS-Inverter und DT-Inverter



	DT-Inverter	CMOS-Inverter
$U_{OL,max}$	$U_{CEX} \approx 0,2V$	0
$U_{OH,min}$	$U_V$	$U_V$
$U_{x*}$	$U_{BEF} + U_F \approx 1,4V^*$	ideal $U_V/2 \approx 2,5V^*$
$S$	$> 1V^*$	$> 2V^*$
$I_V$ für $x = 0$	Strom durch $R_B$	0
$I_V$ für $x = 1$	Strom durch $R_C$	0

( $I_V$  – Versorgungsstrom,  $I_V \cdot U_V$  – Verlustleistung, \* für  $U_V = 5V$ ).

**Warum werden heute fast nur noch CMOS-Gatter eingesetzt?**

- Einfacher Entwurf.
- Geringe Verlustleistung als Voraussetzung für die Integration von Millionen von Gattern auf einem Chip.
- Großer Störabstand.

Frühere Gatterschaltungen, insbesondere solche mit Bipolartransistoren, sind aus fast allen Anwendungen verdrängt, auch die behandelten DT-Gatter und ihre Weiterentwicklungen, die TTL-Gatter (TTL – Transistor Transistor Logic), STTL-Gatter (Schottky-TTL-Gatter) etc.

**Transferrgatter**

Nachbildung eines Schalters, der sowohl null als auch eine eins an seinen Ausgang weiterleiten kann:

- Parallelschaltung eines NMOS- und eines PMOS-Transistors.
- Benötigt das direkte und das negierte Steuersignal.

Schaltung

Schaltermodell

Wertetabelle

s	x	Tn	Tp	y
0	0	S	S	Z
0	1	S	S	Z
1	0	A	S*	0
1	1	S*	A	1

A aktiver Bereich  
 S Sperrbereich  
 Z hochohmig  
 S\* Sperrbereich, wenn Paralleltransistor ein

Sperrbereich, wenn Paralleltransistor ein

Kanal könnte beweglich Elektronen aufnehmen, ist aber beidseitig eingeschnürt

**Umschalter aus zwei Transferrgattern**

Schaltung

Schaltermodell

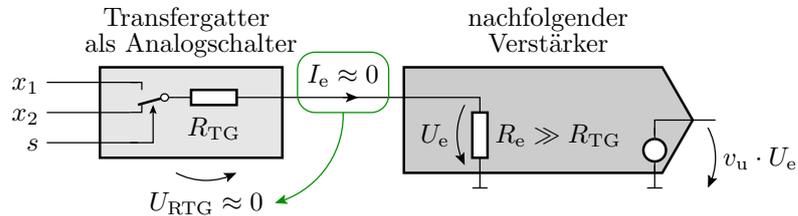
s	x2	x1	y
0	-	0	0
0	-	1	1
1	0	-	0
1	1	-	1

Schaltzeichen

(- – logischer Wert ohne Einfluss, don't care)

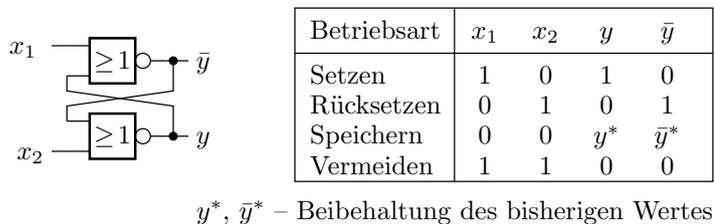
### Transferrgatter als Analogschalter

- Der Drain-Source-Widerstand ist von der Ein- und Ausgangsspannung abhängig.
- Zur Vermeidung nichtlinearer Spannungsabfälle benötigt die Schaltung hinter einem Transferrgatter einen hohen Eingangswiderstand.



### 1.4 Speicherzellen

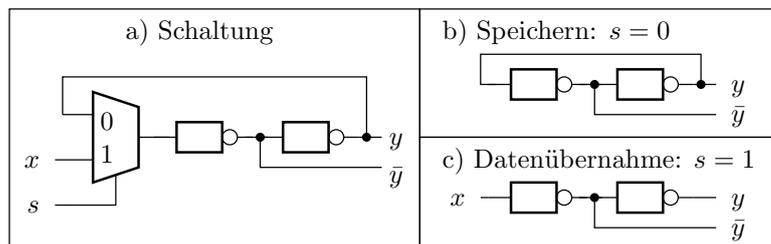
#### RS-Flipflop



- $x_1 = x_2 = 1$  ist zu vermeiden, weil bei zeitgleicher Änderung von  $x_1$  und  $x_2$  von eins nach null der Folgezustand unbestimmt ist.
- Ungebräuchlich, weil stör anfällig<sup>2</sup>.

#### D-Flipflop

- störsicherere Alternative

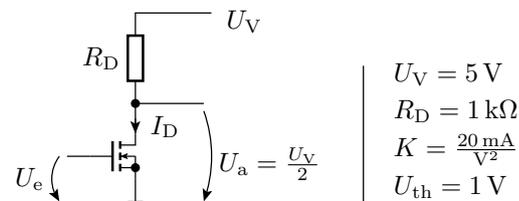


- Im Speichermodus werden Störpulse auf der Datenleitung toleriert.

### 1.5 Aufgaben

#### Aufgabe 4.1: MOS-Verstärker

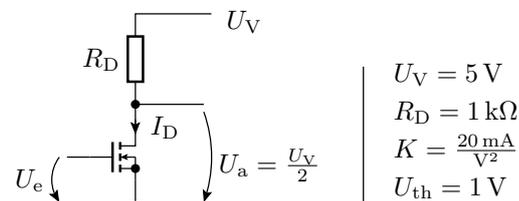
<sup>2</sup>Störpulse können den gespeicherten Wert umkippen.



Gesucht sind:

1. Übertragungsfunktion mit dem Transistor im Abschnürbereich?
2. Ein- und Ausgangsspannungsbereich, in dem der Transistor im Abschnürbereich arbeitet?
3. Eingangsspannung  $U_e$  für  $U_a = \frac{U_V}{2}$ ?
4. Spannungsverstärkung  $v_u = \frac{dU_a}{dU_e}$  bei dieser Eingangsspannung?

### Lösung zu Aufgabe 4.1



1. Übertragungsfunktion mit dem Transistor im Abschnürbereich:

$$U_a = U_V - \frac{R_D \cdot K}{2} \cdot (U_e - U_{th})^2 = 5 \text{ V} - \frac{(U_e - 1 \text{ V})^2}{0,1 \text{ V}}$$

2. Ein- und Ausgangsspannungsbereich, in dem der Transistor im Abschnürbereich arbeitet:

$$U_{th} < U_e < U_{e, \max} = U_a + U_{th} = U_V + U_{th} - \frac{R_D \cdot K}{2} \cdot (U_{e, \max} - U_{th})^2$$

$$U_{e, \max} = 6 \text{ V} - \frac{(U_{e, \max} - 1 \text{ V})^2}{0,1 \text{ V}}$$

$$U_{e, \max} = U_a + U_{th} = U_V + U_{th} - \frac{R_D \cdot K}{2} \cdot (U_{e, \max} - U_{th})^2$$

$$U_{e, \max} = 6 \text{ V} - \frac{(U_{e, \max} - 1 \text{ V})^2}{0,1 \text{ V}}$$

$$0,1 \text{ V} \cdot U_{e, \max} = 0,6 \text{ V}^2 - (U_{e, \max}^2 - 2 \text{ V} \cdot U_{e, \max} + 1 \text{ V}^2)$$

$$0 = U_{e, \max}^2 - 1,9 \text{ V} \cdot U_{e, \max} + 0,4 \text{ V}^2$$

$$U_{e, \max} = \frac{1,9 \text{ V}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1,9 \text{ V}}{2}\right)^2 - 0,4 \text{ V}^2}$$

Mögliche Lösungen:

$$U_{e, \max} \in \{0,241 \text{ V}, 1,659 \text{ V}\}$$

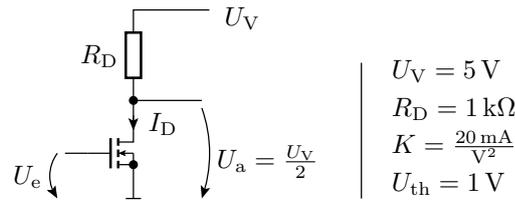
Größer als  $U_{th} = 1 \text{ V}$  ist davon nur:

$$U_{e, \max} = 1,659 \text{ V}$$

Probe:

$$U_a(U_{e, \max}) = U_V - \frac{R_D \cdot K}{2} \cdot (U_e - U_{th})^2 = 5 \text{ V} - \frac{(U_e - 1 \text{ V})^2}{0,1 \text{ V}}$$

$$= 0,659 \text{ V} = U_e - U_{th} \checkmark$$



3. Eingangsspannung  $U_e$  für  $U_a = \frac{U_V}{2} = U_V - \frac{R_D \cdot K}{2} \cdot (U_e - U_{th})^2$ :

$$U_e = \sqrt{\frac{U_V}{R_D \cdot K}} + U_{th} = 1,5 \text{ V}$$

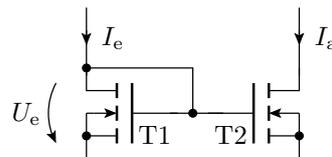
4. Spannungsverstärkung  $v_u = \frac{dU_a}{dU_e}$  für diese Eingangsspannung:

$$U_a = U_V - \frac{R_D \cdot K}{2} \cdot (U_e - U_{th})^2$$

$$v_u = \frac{dU_a}{dU_e} = -R_D \cdot K \cdot (U_e - U_{th})$$

$$= -\frac{20}{\text{V}} \cdot 0,5 \text{ V} = -10$$

### Aufgabe 4.2: Stromspiegel



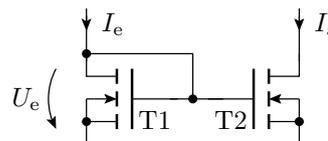
	T1	T2
Einschaltspannung ( $U_{th}$ ):	1 V	1 V
Steilheit $K$ :	5 mA/V <sup>2</sup>	10 mA/V <sup>2</sup>

Wie bildet sich in der Schaltung mit T1 und T2 im Einschnürrbereich

1. der Eingangsstrom  $I_e$  auf die Eingangsspannung  $U_e$ ,
2. die Eingangsspannung  $U_e$  auf den Ausgangsstrom  $I_a$  und
3. der Eingangsstrom  $I_e$  auf den Ausgangsstrom  $I_a$  ab?
4. Bedingungen, dass T1 und T2 im Einschnürrbereich arbeiten.

### Lösung zu Aufgabe 4.2

	T1	T2
$U_{th}$	1 V	1 V
$K$	5 mA/V <sup>2</sup>	10 mA/V <sup>2</sup>



1. Abbildung des Eingangsstroms auf die Eingangsspannung:

$$I_e = \frac{K_1}{2} \cdot (U_e - U_{th})^2$$

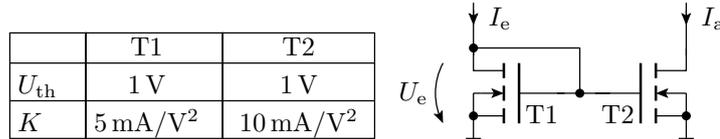
$$U_e = U_{th} + \sqrt{\frac{2 \cdot I_e}{K_1}}$$

2. Abbildung der Eingangsspannung auf den Ausgangsstrom:

$$I_a = \frac{K_2}{2} \cdot (U_e - U_{th})^2$$

3. Abbildung des Eingangsstroms auf den Ausgangsstrom:

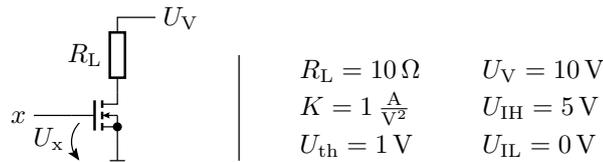
$$I_a = \frac{K_2}{K_1} \cdot I_e = 2 \cdot I_e$$



4. Wegen  $U_{GD1} = 0$  und  $U_{th} = 1\text{ V}$  arbeitet T1 für  $I_e > 0$  immer im Einschnürrbereich. Für T2 muss zusätzlich gelten:

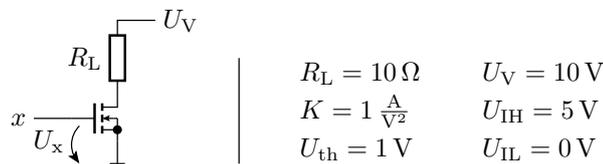
$$U_{DS2} > U_e - U_{th} = \sqrt{\frac{I_e}{K_1}}$$

### Aufgabe 4.3: Stufenlose Leistungssteuerung durch Pulsweitenmodulation



- Wie groß ist der Einschaltwiderstand  $R_{DS} = \frac{dU_{DS}}{dI_D}$  des eingeschalteten MOS-Transistors?
- Welche relative Pulsweite  $\eta$  ist erforderlich, damit im Lastwiderstand  $R_L$  eine Leistung von  $P_{RL.soll} = 3\text{ W}$  umgesetzt wird?
- Welche Leistung  $P_{Tr}$  wird dabei im Transistor umgesetzt?

### Lösung zu Aufgabe 4.3



1. Einschaltwiderstand:

$$R_{DS} = \frac{1}{K \cdot (U_{IH} - U_{th})} = \frac{1}{1\ \frac{\text{A}}{\text{V}^2} \cdot 4\text{ V}} = 0,25\ \Omega$$

2. Relative Pulsbreite:

$$P_{RL.max} \approx \frac{U_V^2}{R_L} = \frac{(10\text{ V})^2}{10\ \Omega} = 10\text{ W}$$

$$\eta = \frac{P_{RL.soll}}{P_{RL.max}} = 30\%$$

3. Leistungsumsatz im Transistor:

$$P_{Tr} = \frac{R_{DS}}{R_L} \cdot P_{RL,soll} = \frac{3W}{40}$$

**Aufgabe 4.4: FCMOS-Gatter**

Entwerfen Sie je ein FCMOS-Gatter

1. mit der Funktion:

$$y_1 = \overline{((x_1 \wedge x_2) \vee x_3) \wedge (x_4 \vee x_5)}$$

2. mit der Funktion:

$$y_2 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \overline{(x_1 \vee (x_2 \wedge x_3))}$$

**Lösung zu Aufgabe 4.4**

1.

$$y_1 = \overline{((x_1 \wedge x_2) \vee x_3) \wedge (x_4 \vee x_5)}$$

$$f_n = ((x_1 \wedge x_2) \vee x_3) \wedge (x_4 \vee x_5)$$

$$f_p = ((\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_4 \wedge \bar{x}_5)$$

2.

$$y_2 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \overline{(x_1 \vee (x_2 \wedge x_3))}$$

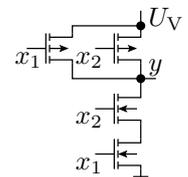
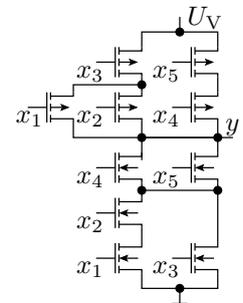
$$= \overline{x_1 x_2 (x_1 \vee (x_2 x_3))}$$

$$= \overline{x_1 x_2} \vee \overline{x_1 x_2 x_3}$$

$$= \bar{x}_1 \bar{x}_2$$

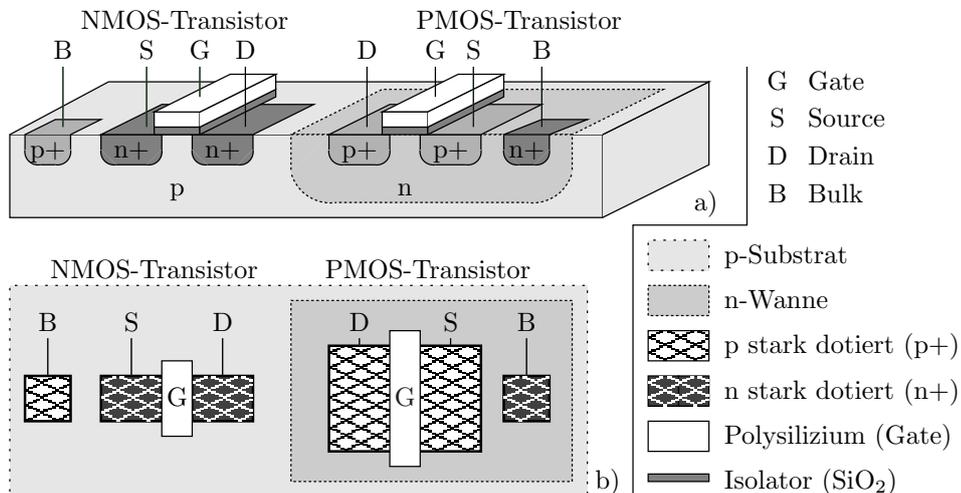
$$f_n = x_1 x_2$$

$$f_p = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$$

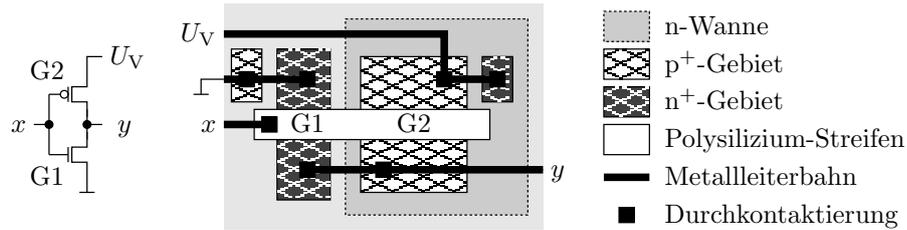


**Geometrischer Entwurf**

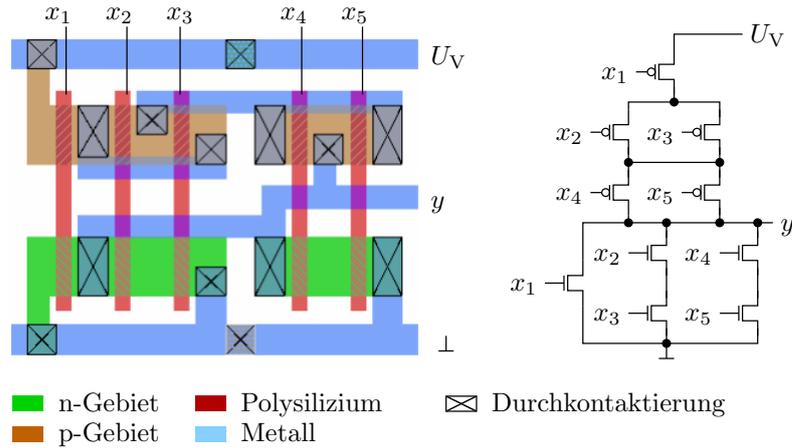
**3D-Ansicht eines NMOS- und eines PMOS-Transistor**



### Geometrischer Entwurf eines Inverters

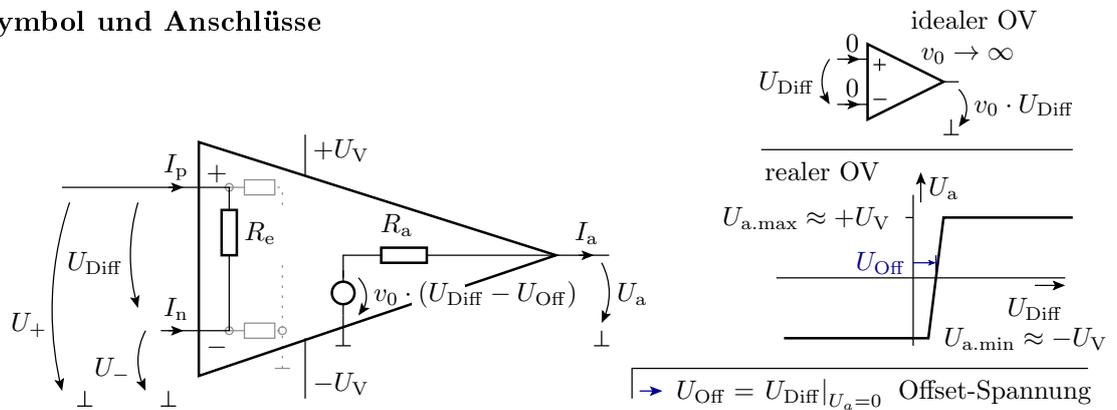


### Geometrischer Entwurf eines Komplexgatters



## 2 Operationsverstärker

### Schaltsymbol und Anschlüsse



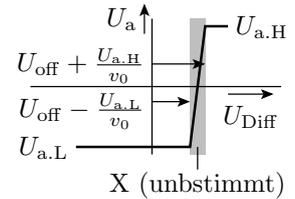
Wichtige Kenngrößen:

		ideal	real
Spannungsverstärkung	$v_0 = \frac{dU_a}{dU_{\text{Diff}}}$	$\infty$	$10^4 \dots 10^6$
Eingangswiderstand	$R_e = \frac{dU_{\text{Diff}}}{dI_p - I_n}$	$\infty$	$1 \text{ M}\Omega \dots 1 \text{ T}\Omega$
Ausgangswiderstand	$R_a = \frac{dU_a}{dI_a}$	0	$2 \Omega \dots 100 \Omega$
Offset-Spannung	$U_{\text{off}} = U_{\text{Diff}} _{U_a=0}$	0	10 mV

Ein Operationsverstärker hat in der Regel nicht den auf der Folie eingezeichneten Masseanschluss. Wird der nicht gebraucht?

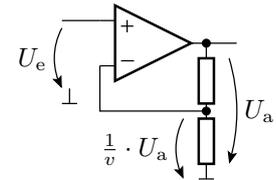
- Die Eingangs-Offset-Spannung ist viel größer als der Ausgangsspannungsbereich geteilt durch die Verstärkung. Unbeschaltet nur als Schwellwertschalter nutzbar:

$$U_a = \begin{cases} U_{a.L} & U_{\text{Diff}} < U_{\text{off.min}} - \frac{U_{a.L}}{v_0} \\ U_{a.H} & U_{\text{Diff}} > U_{\text{off.max}} + \frac{U_{a.H}}{v_0} \\ X & \text{sonst} \end{cases}$$



- Der Betrieb als Verstärker verlangt eine Rückkopplung, d.h. eine Subtraktion eines Teils von  $U_a$  von  $U_{\text{Diff}}$ , z.B.:

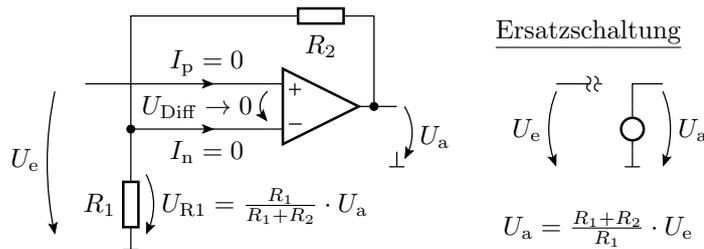
$$\begin{aligned} U_a &= v_0 \cdot (U_e + U_{\text{off}} - \frac{U_a}{v}) \\ U_a &= \frac{v_0}{1 + \frac{v_0}{v}} \cdot (U_e + U_{\text{off}}) \\ &\approx v \cdot (U_e + U_{\text{off}}) \end{aligned}$$



- Für beide Anwendungen braucht der Operationsverstärker keinen Masseanschluss.

## 2.1 Verstärker

### Nichtinvertierender Verstärker



$$\begin{aligned} U_+ &= U_e \\ U_- &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U_a \\ U_a &= \lim_{v_0 \rightarrow \infty} v_0 \cdot (U_+ - U_-) = \lim_{v_0 \rightarrow \infty} v_0 \cdot \left( U_e - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U_a \right) \\ &= \lim_{v_0 \rightarrow \infty} \frac{v_0}{1 + \frac{v_0}{\frac{R_1}{R_1 + R_2}}} \cdot U_e = \lim_{v_0 \rightarrow \infty} \frac{\frac{R_1 + R_2}{R_1}}{\frac{R_1 + R_2}{v_0 \cdot R_1} + 1} \cdot U_e = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \cdot U_e \end{aligned}$$

### Verkürzter Rechenweg

Die Rückkopplung

$$(U_a \uparrow \mapsto U_{\text{Diff}} \downarrow) \wedge (U_a \downarrow \mapsto U_{\text{Diff}} \uparrow)$$

regelt die Eingangsspannungsdifferenz gegen Null:

$$U_{\text{Diff}} = U_+ - U_- \rightarrow 0$$

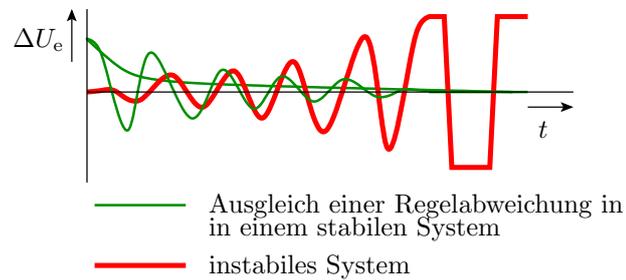
Aus

$$\begin{aligned} U_+ &= U_e \\ U_- &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U_a \\ U_+ - U_- &= U_e - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U_a = 0 \end{aligned}$$

ist die Übertragungsfunktion fast ablesbar.

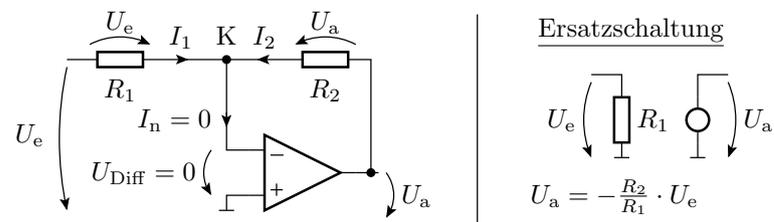
### Generelles Problem

- Eine Rückkopplung führt zu einem Regelkreis und ein falsch dimensionierter Regelkreis kann schwingen:



- Die heutigen Operationsverstärker haben nur noch eine geringe Schwingungsneigung.
- Bei Fehlverhalten, Spannungen mit Oszi kontrollieren.

### Invertierender Verstärker



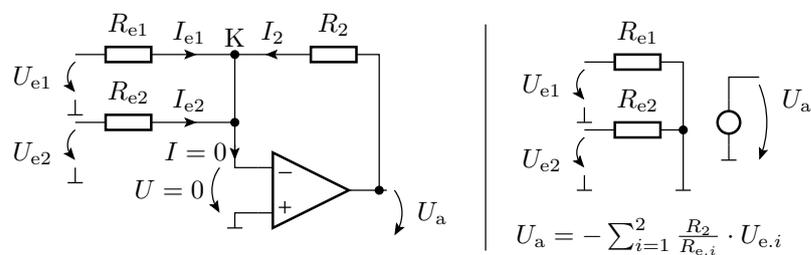
$$K : I_1 + I_2 = 0$$

$$\frac{U_e}{R_1} + \frac{U_a}{R_2} = 0$$

$$U_a = -\frac{R_2}{R_1} \cdot U_e$$

## 2.2 Rechenelemente

### Summationsverstärker (Addition)

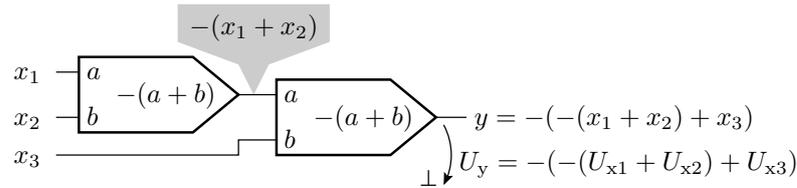


$$K : I_{e1} + I_{e2} + I_2 = 0$$

$$\frac{U_{e1}}{R_{e1}} + \frac{U_{e2}}{R_{e2}} + \frac{U_a}{R_2} = 0$$

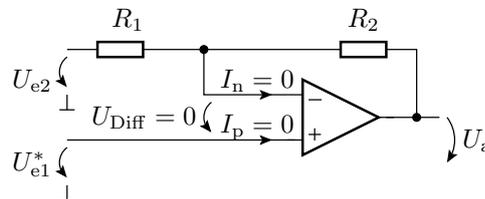
$$U_a = -\left( \frac{R_2}{R_{e1}} \cdot U_{e1} + \frac{R_2}{R_{e2}} \cdot U_{e2} \right)$$

## Subtraktion mit Summationsverstärkern



## Differenzverstärker

- Nur der »+«-Anschluss steht exklusiv als Eingang zu Verfügung.
- Auf den Minuseingang muss zusätzlich wie beim Nichtinvertierende Verstärker  $\frac{U_a}{V}$  rückgekoppelt werden.
- Am Minuseingang kommt von  $U_{e2}$  nur der  $\frac{R_2}{R_1+R_2}$ -te Teil an.



$$U_+ = U_{e1}^* = U_- = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_{e2} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U_a$$

$$U_a = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \left( U_{e1}^* - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_{e2} \right)$$

$$U_a = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \left( U_{e1}^* - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_{e2} \right)$$

$$U_a = \frac{R_2}{R_1} \cdot \left( \frac{R_1 + R_2}{R_2} \cdot U_{e1}^* - U_{e2} \right)$$

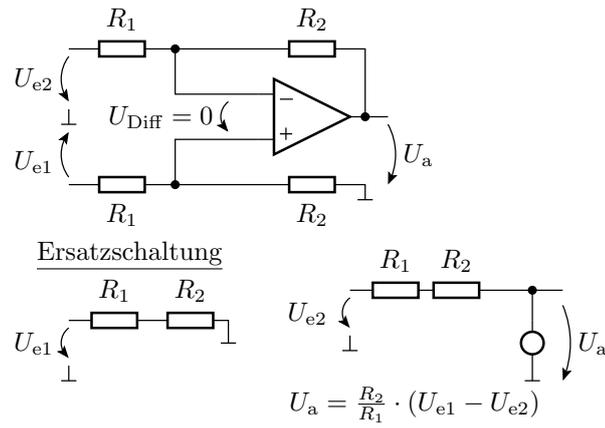
Mit einem zusätzlichen Spannungsteiler:

$$U_{e1}^* = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_{e1}$$

ergibt sich ein Differenzverstärker mit der Differenzverstärkung  $v_{\text{Diff}} = \frac{R_2}{R_1}$ :

$$U_a = \frac{R_2}{R_1} \cdot (U_{e1} - U_{e2})$$

## Differenzverstärker komplett



### 2.3 Komparator

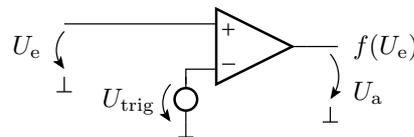
#### Soll-Funktion und Realisierung

- Abbildung einer stetigen Größe auf eine zweiwertige Größe<sup>3</sup>:

$$f(U_e) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } U_e < U_{\text{trig}} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1)$$

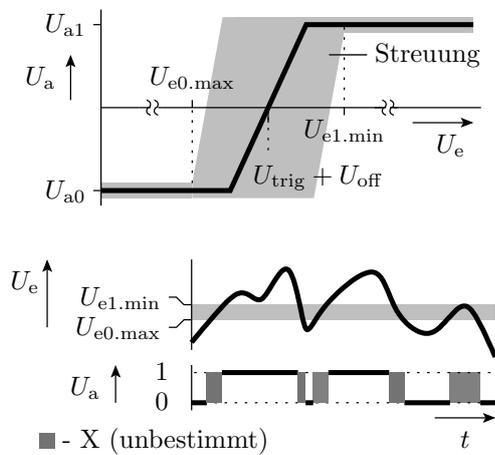
( $U_{\text{trig}}$  – Schaltspannung des Komparators).

- Nachbildung durch einen Operationsverstärker plus Quelle mit der Schaltspannung:



- Die Quellspannung  $U_{\text{trig}}$  kann auch mit einem Spannungsteiler aus der Versorgungsspannung gebildet werden.

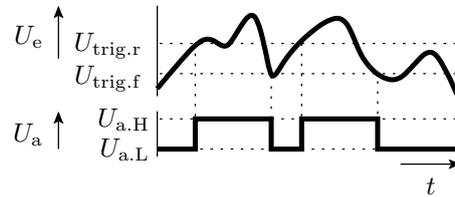
#### Abweichung vom Idealverhalten



<sup>3</sup>Das verstand man bis vor Kurzem noch unter »Digitalisierung«.

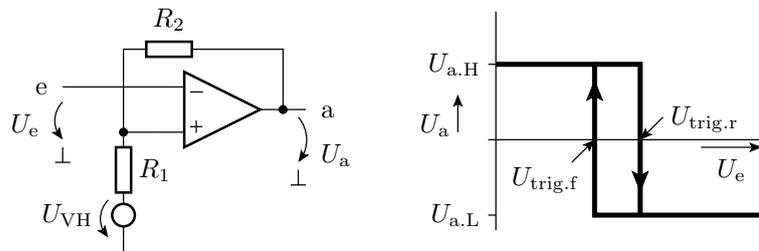
## Schwellwertschalter mit Hysterese

- Einschaltswelle  $>$  Ausschaltswelle
- Überschreiten  $U_{\text{trig.r}} \Rightarrow$  kippen in den Zustand  $U_{\text{trig}} = U_{\text{trig.f}}$
- Unterschreiten  $U_{\text{trig.f}} \Rightarrow$  kippen in den Zustand  $U_{\text{trig}} = U_{\text{trig.r}}$



$U_{\text{trig.r}}$  Schaltspannung für steigende (rising) Eingangsspannungen  
 $U_{\text{trig.f}}$  Schaltspannung für fallende (falling) Eingangsspannungen  
 $U_{\text{a.H}}$  große Ausgangsspannung (High, log. 1)  
 $U_{\text{a.L}}$  kleine Ausgangsspannung (Low, log. 0)

## Invertierender Schwellwertschalter mit OV



$$U_{\text{trig.r}} = U_{\text{VH}} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot (U_{\text{a.H}} - U_{\text{VH}})$$

$$U_{\text{trig.f}} = U_{\text{VH}} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot (U_{\text{a.L}} - U_{\text{VH}})$$

( $U_{\text{VH}}$  – Hilfsspannung)

## Beispiel

$$U_{\text{a.H}} = U_{\text{V}} = 5 \text{ V}$$

$$U_{\text{a.L}} = 0$$

$$U_{\text{trig.r}} = 3 \text{ V}$$

$$U_{\text{trig.f}} = 2 \text{ V}$$

- Bestimmung des Spannungsteilerverhältnisses

$$k = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

und der Hilfsspannung  $U_{\text{VH}}$  mit folgendem Gleichungssystem:

$$3 \text{ V} = U_{\text{VH}} + k \cdot (5 \text{ V} - U_{\text{VH}})$$

$$2 \text{ V} = U_{\text{VH}} + k \cdot (-U_{\text{VH}})$$

- $U_{\text{VH}} \Rightarrow$  Quotienten beider Gleichungen

$$\frac{3 \text{ V} - U_{\text{VH}}}{2 \text{ V} - U_{\text{VH}}} = \frac{5 \text{ V} - U_{\text{VH}}}{-U_{\text{VH}}}$$

$$U_{\text{VH}} = 2,5 \text{ V}$$

- $k \Rightarrow$  Differenz beider Gleichungen:

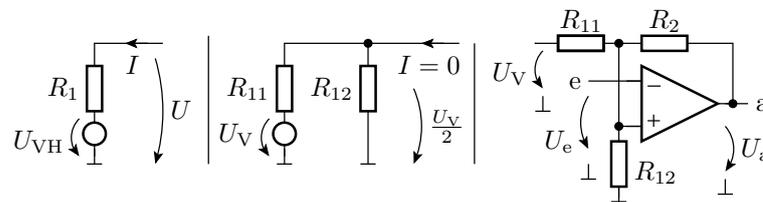
$$1 \text{ V} = k \cdot 5 \text{ V}$$

$$k = 0,2$$

- willkürliche Festlegung:  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$
- Berechnung von  $R_2$  aus

$$0,2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \Rightarrow R_2 = 40 \text{ k}\Omega$$

- Transformation des Zweipols aus  $U_{VH}$  und  $R_1$  in einen funktionsgleichen Zweipol aus  $U_V$  und Spannungsteiler:



$$R_{11} = R_{12} = 2 \cdot R_1 = 20 \text{ k}\Omega$$

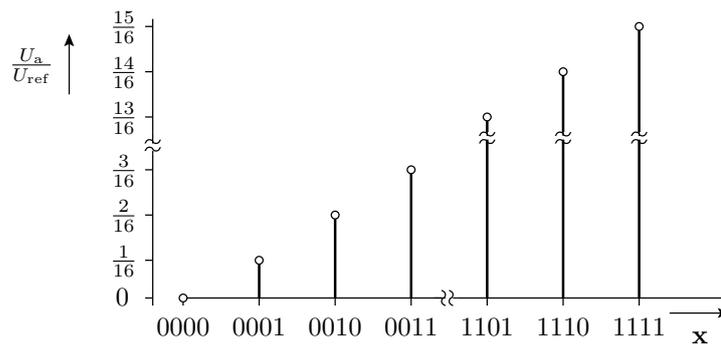
## 2.4 Digital-Analog-Umsetzer

### Digital-Analog-Umsetzer (DAU)

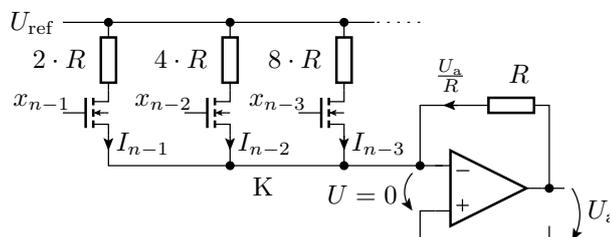
Ausgabe eines Bitvektors als Spannung:

$$\mathbf{x} = x_{n-1} x_{n-2} \dots x_0 \Rightarrow U_a(\mathbf{x}) = \frac{U_{\text{ref}}}{2^n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot 2^i$$

( $x_i \in \{0, 1\}$  – Binärziffern;  $n$  – Bitanzahl;  $U_{\text{ref}}$  – Referenzspannung).



### Eine Schaltung zur Nachbildung dieser Funktion



- Stromquellen mit binär abgestuften Strömen:

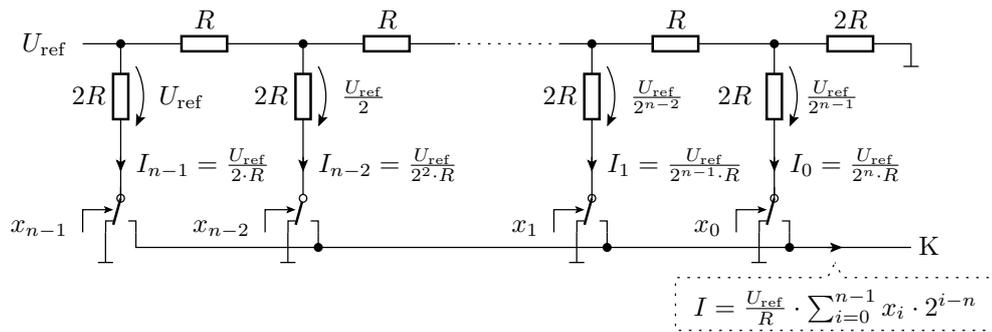
$$I_i = \frac{U_{\text{ref}}}{R} \cdot 2^{i-n}$$

- Transistorschalter, die die Ströme wahlweise in den Summationspunkt leiten oder nicht.
- Summationsverstärker für die ausgewählten Ströme:

$$U_a = -R \cdot \sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot I_i = -\frac{U_{\text{ref}}}{2^n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot 2^i$$

### Digital-Analog-Umsetzer mit R2R-Netzwerk

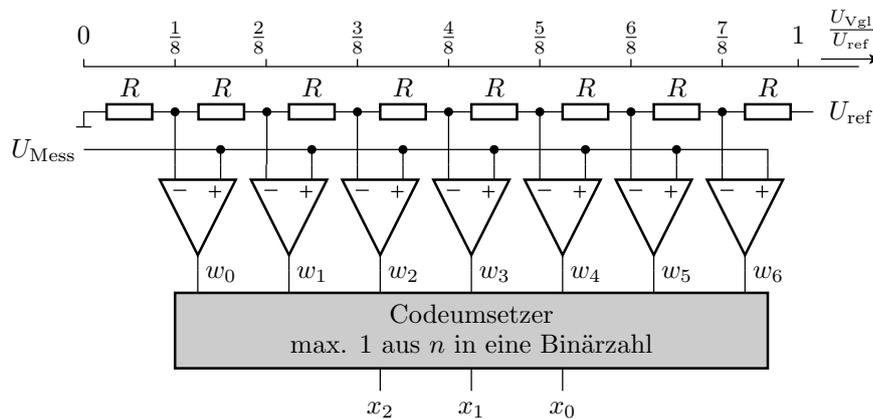
- Die Fertigung von sehr unterschiedlich großer Widerstände mit exaktem Widerstandsverhältnis ist schwierig.
- Ein R2R-Netzwerk ist eine Spannungsteilerkette, die die eingangsseitige Referenzspannung fortlaufend halbiert.
- Die Transistorschalter an den Fußpunkten leiten die Ströme bei  $x_i = 1$  zum Summationspunkt K und bei  $x_i = 0$  zum Bezugspunkt.



## 2.5 Analog-Digital-Umsetzer

### Paralleler Analog-Digital-Umsetzer (ADU)

- Zuordnung von 1 aus  $n$  Digitalwerten in einem Schritt.
- Paralleler Vergleich der analogen Eingangsspannung mit  $2^n-1$  Vergleichsspannungen. Erfordert  $2^n - 1$  Komparatoren.

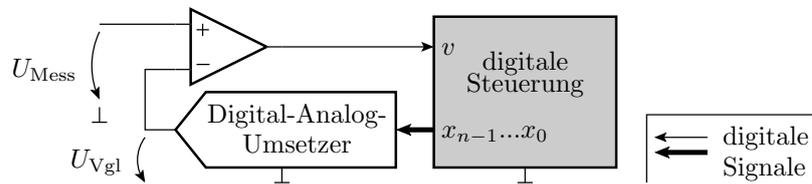


**Funktion des Codeumsetzers**

Komparatorausgabe $w_6 w_5 w_4 w_3 w_2 w_1 w_0$	Ergebnis $x_2 x_1 x_0$
0000000	000
0000001	001
0000011	010
0000111	011
0001111	100
0011111	101
0111111	110
1111111	111

**Serielle Umsetzer**

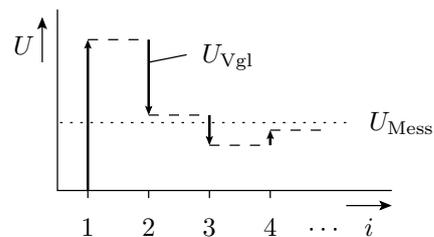
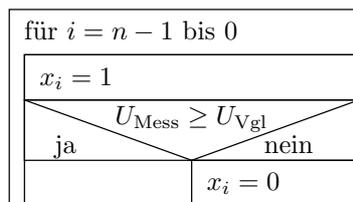
- Ein Vergleich je Wandlerschritt:



$$v = \begin{cases} 0 & \text{wenn } U_{\text{Mess}} < U_{\text{Vgl}} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Sukzessive Approximation**

- schnellster serieller Wandlernalgorithmus
- ein Vergleich je Bit

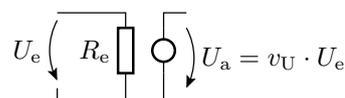


**Aufgaben**

**Aufgabe 4.5: Verstärkerentwurf**

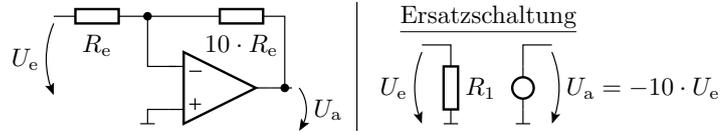
Entwickeln Sie Schaltungen mit Operationsverstärkern, die das Verhalten der nachfolgenden Ersatzschaltung nachbilden mit den Parametern:

1.  $v_U = -10$  und  $R_e = 10 \text{ k}\Omega$
2.  $v_U = 3$  und  $R_e = 100 \text{ k}\Omega$ .

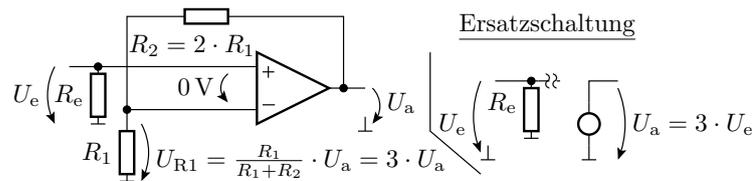


**Lösung zu Aufgabe 4.5**

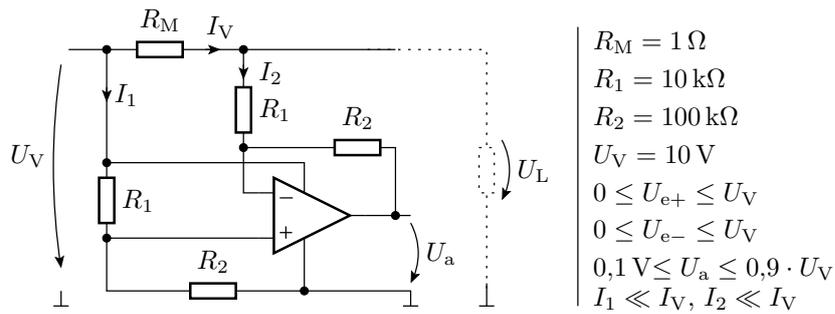
- $v_U = -10$  und  $R_e = 10\text{ k}\Omega$ : invertierender Verstärker mit  $R_1 = R_e$  und  $R_2 = 10 \cdot R_1 = 100\text{ k}\Omega$  :



- $v_U = 3$  und  $R_e = 100\text{ k}\Omega$ : nicht invertierender Verstärker mit  $R_e$  parallel zum Eingang und  $R_2 = 2 \cdot R_1$ .



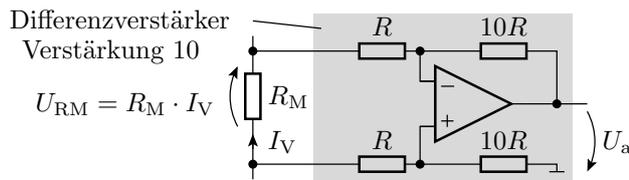
**Aufgabe 4.6: Analyse einer OV-Schaltung**



- Grundbeschaltung des Operationsverstärkers?
- Bestimmen Sie die Funktion  $U_a = f(I_V)$  für  $I_2 \ll I_V$ ?
- Für welchen Bereich von  $I_V$  gilt diese Funktion?

**Lösung zu Aufgabe 4.6**

- Grundschialtung:



- Funktion:

$$U_a = 10 \cdot U_{RM} = 10\ \Omega \cdot I_V$$

- Wertebereich  $I_V$ :

$$0,1\text{ V} \leq U_a \leq 9\text{ V} \quad \text{und} \quad I_V = \frac{U_a}{10\ \Omega}$$

$$10\text{ mA} \leq I_V \leq 900\text{ mA}$$

**Aufgabe 4.7: Entwurf von Rechenelementen**

Entwickeln Sie mit Hilfe von Operationsverstärkern eine Schaltung mit der Funktion:

$$U_a = U_{e1} + 2 \cdot U_{e2} - U_{e3} - 2 \cdot U_{e4}$$

Der Eingangswiderstand soll für jeden Eingang

$$R_{e,i} = \frac{U_{e,i}}{I_{e,i}} = 10 \text{ k}\Omega$$

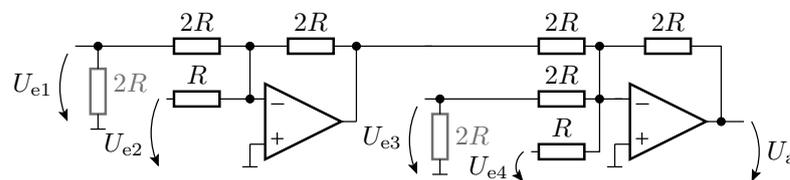
betragen.

Hinweis: Es werden mindesten zwei Operationsverstärker und 9 Widerstände benötigt.

**Lösung zu Aufgabe 4.7**

Aufspaltung in zwei Summationsverstärker:

$$\begin{aligned} U_a &= U_{e1} + 2 \cdot U_{e2} - U_{e3} - 2 \cdot U_{e4} \\ &= -(- (U_{e1} + 2 \cdot U_{e2}) + U_{e3} + 2 \cdot U_{e4}) \end{aligned}$$



Bei Wahl von  $R = 10 \text{ k}\Omega$  haben die Eingänge 2 und 4 bereits den gewünschten Eingangswiderstand von  $10 \text{ k}\Omega$ . An den beiden anderen Eingängen beträgt  $R_{e,i} = 2 \cdot R$  und muss durch Parallelschaltung von je  $20 \text{ k}\Omega$  auf  $10 \text{ k}\Omega$  verringert werden.

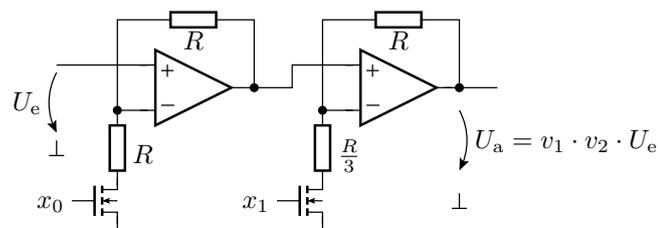
**Aufgabe 4.8: Verstärker mit umschaltbarer Verstärkung**

Konstruieren Sie eine Verstärkerschaltung, deren Verstärkung mit einem 2-Bit-Vektor in folgender Weise eingestellt werden kann:

$\mathbf{x} = (x_1 \ x_0)$	11	10	01	00
$v_U = \frac{U_a}{U_e}$	8	4	2	1

Hinweis: Es werden mindestens zwei Operationsverstärker, zwei NMOS-Transistoren und vier Widerstände benötigt.

**Lösung zu Aufgabe 4.8**

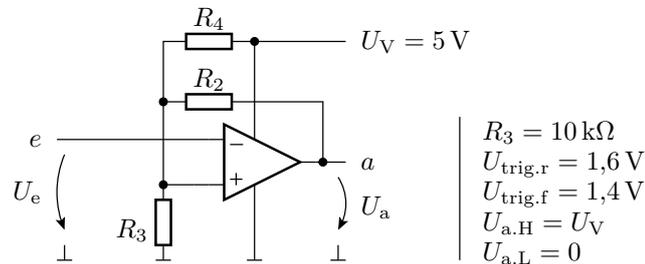


$$v_1 = \begin{cases} 1 & x_0 = 0 \\ \frac{R+R}{R} = 2 & x_0 = 1 \end{cases}$$

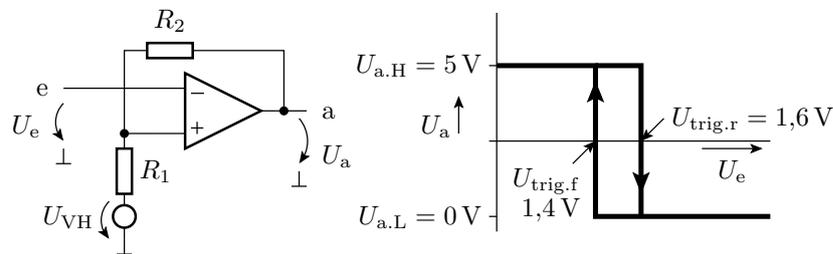
$$v_2 = \begin{cases} 1 & x_1 = 0 \\ \frac{R+\frac{R}{3}}{\frac{R}{3}} = 4 & x_1 = 1 \end{cases}$$

### Aufgabe 4.9: Schwellwertschalter mit Hysterese

Legen Sie für den invertierenden Komparator mit Hysterese in der nachfolgenden Abbildung die Widerstandswerte  $R_1$  und  $R_2$  so fest, dass der Komparator die vorgegebene Ein- und Ausschaltswelle besitzt.



### Lösung zu Aufgabe 4.9



$$U_{\text{trig.r}} = U_{\text{VH}} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot (5\text{ V} - U_{\text{VH}}) = 1,6\text{ V}$$

$$U_{\text{trig.f}} = U_{\text{VH}} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot (-U_{\text{VH}}) = 1,4\text{ V}$$

Differenz beider Gleichungen:

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot 5\text{ V} = 0,2\text{ V} \Rightarrow R_2 = 24 \cdot R_1$$

Eingesetzt in die 2. Gleichung:  $\frac{24}{25} \cdot U_{\text{VH}} = 1,4\text{ V}$



$$\frac{R_3}{R_3 + R_4} \cdot 5\text{ V} = \frac{25}{24} \cdot 1,4\text{ V}$$

$$R_4 \approx 2,429 \cdot R_3$$

$$R_1 = R_3 \parallel R_4 = 0,708 \cdot R_3$$

$$R_2 = 24 \cdot R_1 = 17 \cdot R_3$$

mit  $R_3 = 10\text{ k}$  ergibt sich  $R_4 = 24,29\text{ k}$  und  $R_2 = 170\text{ k}$ .